http://www.trakya.edu.tr/Enstituler/FenBilimleri/fenbilder/index.php
Trakya Univ J Sci, 6(1): 113-115, 2005
ISSN 1302 647X
DIC: 156APET65057705

Araştırma Makalesi/Research Article

$p=(2q-1)^2-2$ ASALI İÇİN $Q(\sqrt{p})$ REEL KUADRATİK SAYI CİSMİNİN SINIF SAYISI VE $x^2-py^2=\mp q$ PELL DENKLEMİNİN ÇÖZÜLEBİLİRLİĞİ

Ayten PEKİN
Trakya Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü 22030 Edirne- TURKEY,
e-mail: aytenpekin@trakya.edu.tr

Alınış : 10.06.2004
Kabul ediliş : 21.09.2004

Özet: p ve q , $p=(2q-1)^2-2$, ($q\not\equiv 3(\mathrm{mod}\,4)$) sağlayan asallar olmak üzere, bu p ve q değerine karşılık gelen geniş (wide) Richaut Degert tipinden reel kuadratik sayı cisminin sınıf sayısının 1 olması için bir teorem elde edilmiş ve bunun sonucunda aynı p ve q değerleri için $x^2-py^2=\mp q$ Pell Denkleminin çözülebilirliği irdelenmiştir.

Anahtar kelimeler: Sınıf Sayısı, Pell Denklemi, Esas Form Zincirleri, Sürekli Kesirler

The Class Number of The Real Quadratic Field $Q(\sqrt{p})$ and The Solvability of The Pell Equation $x^2-py^2=\mp q$ for The Prime $p=(2q-1)^2-2$.

Abstract: It has been obtained a theorem so that the class number to be one of the real quadratic field the type of which the wide Richauct Degert for the p and q primes satisfying $p=(2q-1)^2-2$, ($q\not\equiv 3(\mathrm{mod}\,4$). Finally it has been investigated solvability of the Pell equation $x^2-py^2=\mp q$ for the primes p and q.

Key words: Class Number, Pell Equation, Principal Forms Chain, Continued Fractions

Giriş

[1], [5] ve [7] ile belirtilen çalışmalarda, Richaut Degert tipindeki $Q(\sqrt{p})$ reel kuadratik sayı cisimleri, p ve q asal değerlerine bağlı olarak çeşitli formlarda yazılarak $x^2-py^2=\mp q$ denklemlerinin çözülebilirliği incelenmiş ve bunun sonucunda sınıf sayısı 1 probleminin çözümü için çeşitli kriterler elde edilmiştir.

Bu çalışmada da, yukarıda belirtilen çalışmalardaki formlardan bağımsız olarak, q, ($q\not\equiv 3(\,mod\,4\,)$) sağlayan bir asal sayı olmak üzere, $p=(2q-1)^2-2$ biçiminde yazılan p asal değerine karşılık gelen Richaut Degert tipinden $Q(\sqrt{p})$ reel kuadratik sayı cisminin sınıf sayısının 1 olması için bir gerek ve yeter koşul elde edilerek $x^2-py^2=\mp q$ Pell denkleminin çözülebilirliği irdelenmiştir.

Bu çalışmada elde edilen temel kriterlerin kanıtı için gerekli olan tanım, teorem ve lemmalar aşağıda verilmektedir.

1.Teorem : α bir irrasyonel sayı olsun. u ve v tamsayıları $v>0$, $(u,v)=1$, $\left|\alpha-\frac{u}{v}\right|<\frac{1}{2v^2}$ ifadelerini sağlıyor iseler $\frac{u}{v}$ rasyonel sayısı α 'nın yakınsaklarından birisidir ([6]).

1. Tanım : $|N|<\sqrt{d}$ eşitsizliğini sağlayan N değerleri için $x^2-dy^2=N$ denklemine "Genel Pell Denklemi" denir.

2. Teorem : $x^2-dy^2=N$ denkleminin tüm çözümleri $\sqrt{d}$ irrasyonel sayısının yakınsaklarından oluşmaktadır ([6]).

3. Tanım: d kare çarpansız tamsayısı için,

$$w=\begin{cases}\dfrac{1+\sqrt{d}}{2} & d\equiv 1(\mathrm{mod}\,4)\ ise\\ \sqrt{d} & d\equiv 2,3(\mathrm{mod}\,4)\ ise\end{cases}$$

olmak üzere, $Q(\sqrt{d})$ cisminin tamlık tabanı $\{1\ ,w\}$ olsun. w kuadratik irrasyonel sayısının sürekli kesre açılımı;

$$w=<a_o,\overline{a_1,\ .\ .\ .\ ,\ Tr(a_o-w)}>$$

biçiminde olup $\phi_o=x^2+iz(a_o-w)\,x\,y+N(a_o-w)\,y^2$ formuna "kuadratik form" denir.

4. Tanım : ϕ_1 , $\tau:\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 8\end{pmatrix}$ integral dönüşümü yardımıyla ϕ_o formundan elde edilmiş bir form olsun. ϕ_1 'e ϕ_o formunun "sağ komşuluğu" denir. ϕ_o formuyla başlayan ve denk indirgenmiş formların oluşturduğu sağ komşular zincirine $Q(\sqrt{d})$ cismine karşılık gelen "temel zincir" denir ve bu zincirin ilk katsayılar dizisi $A_p=\{A_o,A_1,A_2,\ .\ .\ .\ ,\ A_{k-1}\}$ kümesi ile verilir. Bu temel zincirin katsayıları arasında $A_o=1$, $B_o=iz(a_o-w)$, $A_1=-N(a_o-w)$ bağıntıları mevcuttur ([4]).

1. Lemma : D, K=$Q(\sqrt{p})$ reel kuadratik sayı cisminin diskriminantı olmak üzere, K= $Q(\sqrt{p})$' nin sınıf sayısının 1 olması için gerek ve yeter koşul

$$M=\left\{\ q\ \mid\ q\quad asal\,,\ q\leq\frac{\sqrt{D}}{2}\ ,\ \left(\frac{D}{q}\right)\neq-1\right\}$$

kümesine ait her q asal tamsayısının bu cisme ait olan A_p kümesinin elemanı olmasıdır ([3]).

Temel Teoremler

3. Teorem : p ve q, $(\,q\not\equiv 3(\,mod\,4\,)\,)$ $p=(2q-1)^2-2$ sağlayan asallar olsun. h_p $Q(\sqrt{p})$ wide R-D tipinden reel kuadratik sayı cisminin sınıf sayısını göstermek üzere, $h_p=1 \Leftrightarrow p=7$ olmasıdır.

Kanıt : $\Leftarrow$: $p=7$ ise $Q(\sqrt{7})$ cisminin sınıf sayısının 1 olduğu bilinmektedir.

: $\Rightarrow$ $h_p=1$ olduğunu varsayalım.

$p=(2q-1)^2-2$ ifadesinden ve q'nun seçiminden $\left(\frac{p}{q}\right)=\left(-\frac{1}{q}\right)\neq -1$ dir. Bu durumda $D=2\sqrt{p}$ olmak üzere $q \leq \sqrt{p}$ sağlayan q asalı, $p=(2q-1)^2-2$ asal değeri için $A_p=\{1,4q-5,2\}$ biçiminde belirlenen A_p kümesinin elemanı olmalıdır.

Bu durumda $q\in A_p$ ise $q=4q-5$ ya da $q=2$ olmak zorundadır. Ancak $q=4q-5$ için $q=5/3$ olur ve bu bir çelişkidir. O halde $q=2$ olmalıdır.

4. Teorem : p ve q, $p=(2q-1)^2-2$ $\,(q\not\equiv 3(\mathrm{mod}\,4))$ sağlayan asallar olsunlar.

$h_p=1 \Rightarrow x^2-py^2=\mp q$ Pell denkleminin tamsayılarda en az bir çözümü vardır.

Kanıt : 3. Teoremden $h_p=1$ olması için gerekli ve yeterli koşul $p=7$ ve $q=2$ olması idi. Bu durumda $x^2-7y^2=\mp 2$ denklemi göz önüne alınacaktır. Bu denklemin tüm çözümleri $\sqrt{7}$ değerinin yakınsaklarından ibarettir ve $\sqrt{7}$ irrasyonel sayısının sürekli kesre açılımı $\sqrt{7}=<2,\overline{1,1,1,4}>$ olacağından bu yakınsak değerleri [2]'de verilen $h_i=a_i\,h_{i-1}+h_{i-2}$, $k_i=a_i\,k_{i-1}+k_{i-2}$ $(i\geq 0)$ rekürans bağıntıları ve $h_{-2}=0$, $h_{-1}=1$, $k_{-2}=1$, $k_{-1}=0$ başlangıç şartları için $\frac{h_o}{k_o}=2$, $\frac{h_1}{k_1}=3$, $\frac{h_2}{k_2}=\frac{5}{2}$, $\frac{h_3}{k_3}=\frac{8}{3}$, $\frac{h_4}{k_4}=\frac{37}{14}$ olarak belirlenir.

Bu durumda $x^2-7y^2=\mp 2$ denkleminin tamsayılarda $(3,1)=(x,y)$ gibi bir çözümünün mevcut olacağı açıktır.

Kaynaklar

1 ANKENY N.C., CHOWLA S., HASSE H. On the class number of the maximal real subfield of a cyclotomic field. *J. Reine Angew Math*. 217, 217-220, 1965.

2 AZUHATA T. On the fundamental units and the class numbers of real quadratic fields. *Nagoya Math. J.* Vol. 95, pp. 125-135, 1984.

3 DEVELİ M. H., ÇALLIALP F. Some criterions for the class number of a real quadratic field of R-D type to be one. *İstanbul Üniv Fen Fak Mat Derg*. 49, 13-20, 1990.

4 DICKSON L.E. Introduction to Theory of Numbers (Dever Publ. Inc. New York, 1957).

5 LANG S.D. Note on the class number of the maximal real subfield of a cyclotomic field. *J.Reine Angew. Math*., 290, 70-72, 1997.

6 Mc COY N.H. The theory of numbers (New York, MacMillan 1965).

7 YOKOI H. The diophantine equation $x^2-py^2=\mp 4q$ and the class number of real subfields of a cyclotomic fields. *Nagoya Math. J.,* Vol. 91, 151-161, 1983.