http://fbe.trakya.edu.tr/tujs
Trakya Univ J Sci, 8(2):77-86, 2008
ISSN 1305–6468
DIC: 260YYET19120812080109

Araştırma Makalesi / Research Article

LİNEER PROGRAMLAMADA TEKNOLOJİK KATSAYILARIN DUYARLILIK ANALİZİ

Yılmaz YÜCEL
Trakya Üniversitesi, Mühendislik Mimarlık Fakültesi,
Bilgisayar Mühendisliği Bölümü, 22100, Edirne, Türkiye
e-mail: yilmazy@trakya.edu.tr

Alınış: 14 Ekim 2008
Kabul Ediliş: 19 Aralık 2008

Abstract: *In many cases, the information provided by an application of senstivity analysis may be more important and much more informative than the single result obtained in the optimal solution. In a sense, senstivity analysis makes the static linear-programming solution a dynamic tool that evulates changing conditions. Thus, it becomes more useful as a managerial tool since business and industry are subject to continuous change and subsequent reevaluation.*
Keywords: *Senstivity Analysis, Linear Programming, Senstivity Analysis of Technological Coefficents*

Özet: *Bir çok durumlarda duyarlılık analizinin uygulanması optimal sonucun vermiş olduğundan daha fazla bilgi vericidir. Bir anlamda duyarlılık analizi statik doğrusal programlama probleminin çözümünü değişen şartları da verebilen dinamik bir araç haline getirmiştir. İş ve endüstri hayatı devamlı değişikliklere konu olduğundan bu analiz kullanışlı bir yönetim aracı haline gelmiştir.*
Anahtar kelimeler: *Lineer programlama, Duyarlılık analizi, Teknolojik katsayıların duyarlılık analizi*

Giriş

Optimalite sonrası genellikle amaç fonksiyonu katsayıları ve sağ taraf katsayılarının duyarlılık analizi ile yetinilir. Burada uygulamada çok az kullanılan bir yöneylem araştırması tekniği olarak teknolojik katsayıların duyarlılık analizi ele alınmıştır. Teknolojik katsayıların duyarlılık analizinden önce amaç fonksiyonu ve sağ taraf katsayılarının da duyarlılık analizine değinilmiştir. Duyarlılık analizi ile ilgili ayrıntılar Courtillot, Webb ve Gass da [1,2,3,4] ve burada kullanılan notasyon ile L.P probleminin çözümü [5] bulunabilir.

2. Duyarlılık Analizi

2.1. Amaç fonksiyonu katsayıları c_j'lerdeki değişmeler

Daha önceden biliyoruz ki her $j \varepsilon J$ için maksimizasyon probleminde $(Z_j - c_j) \geq 0$ minimizasyon probleminde ise $(Z_j - c_j) \leq 0$ olduğunda optimum çözüme varılmıştır. Δc_j ile c_j ye ilave edilecek miktarı gösterelim. Bu değişkenler son temelde olmadıkları için maksimizasyonda $Z_j - (c_j + \Delta c_j) \geq 0$ minimizasyonda ise $Z_j - (c_j + \Delta c_j) \leq 0$ almalıyız. Bundan dolayı $Z_j - c_j \geq \Delta c_j$ veya $Z_j - c_j \leq \Delta c_j$ olup Δc_j için bir alt veya üst sınır yoktur. Temel olmayan $\vec{x}_G = (x_j)\ j\varepsilon J \quad x_j = 0$ iken c_j deki uygun bir değişim amaç fonksiyonunun değerini değiştirmez. $\vec{x}_G = (x_j)\ j\varepsilon J$ için maksimizasyonda $\Delta c_j \leq Z_j - c_j$ minimizasyonda ise $\Delta c_j \geq Z_j - c_j$ olur. $\vec{x}_B = (x_\rho)\ \rho\varepsilon I$ temel değişkenlerin amaç fonksiyonundaki katsayıları için ise şunları söyleyebiliriz. Son temeldeki bir değişken için Δc_j temelde olmayan bütün j' ler için Z_j leri etkiler. Temelde olmayan değişkenler için

Maksimizasyonda $\quad Z_j - c_j = \vec{C}_B\,\vec{y}_j - c_j \geq 0 \quad , j\varepsilon J$

Minimizasyonda $\quad Z_j - c_j = \vec{C}_B\,\vec{y}_j - c_j \leq 0 \quad , j\varepsilon J$

olmakta olup x_k temel değişkeni için amaç fonksiyonundaki değişimi Δc_k alalım. x_k temel değişkeninin bulunduğu satırdaki y_{kj} , $j = 1,2,......,n$ elemanları için maksimizasyonda

$$\vec{C}_B \vec{y}_j + y_{kj}\Delta c_k - c_j \geq 0 \quad \text{veya} \quad y_{kj}\Delta c_k \geq -(Z_j - c_j)$$

olup

$$y_{kj} > 0 \text{ için } \Delta c_k \geq \frac{-(Z_j - c_j)}{y_{kj}} \quad \text{ve} \quad y_{kj} < 0 \text{ için } \Delta c_k \leq \frac{-(Z_j - c_j)}{y_{kj}}$$

$$\underset{y_{kj}>0}{Max}\frac{-(Z_j - c_j)}{y_{kj}} \leq \Delta c_j \leq \underset{y_{kj}<0}{Min}\frac{-(Z_j - c_j)}{y_{kj}}$$

olarak bulunur. Minimizasyonda probleminde ise

$$\underset{y_{kj}<0}{Max}\frac{-(Z_j - c_j)}{y_{kj}} \leq \Delta c_j \leq \underset{y_{kj}>0}{Min}\frac{-(Z_j - c_j)}{y_{kj}}$$

olarak bulunacaktır.

Bu değişimler problemin optimalliği (veya dualinin mümkünlüğü) ile ilgilidir. Ancak değişimler temeldeki değişkenlerin veya temel olmayan değişkenlerin katsayılarında olabilir.

2.2. Sağ taraf katsayıları b_i 'lerdeki değişim

b_i deki bir değişim temelin uygunluğunu sağlayacak büyüklükte olmalıdır. Optimum için $\vec{x}_B = B^{-1}\vec{P}_0 \geq 0$ olarak alalım. Δb_l ile $\vec{P}_0$ ın l 'inci satırındaki b_l elemanındaki değişim miktarını gösterelim. Böylece yeni sağ taraf

$$B^{-1}\vec{P}_0^{*} = (x_\rho + a_{\rho il}\Delta b_l) \quad (1)$$

şeklinde olup

$$a_{\rho il} > 0 \text{ için } \Delta b_l \geq \frac{-x_\rho}{a_{\rho il}} \quad \text{veya} \quad a_{\rho il} < 0 \text{ için } \Delta b_l \leq \frac{-x_\rho}{a_{\rho il}}$$

Buradan hem maksimizasyon hem de minimizasyon problemi için geçerli olan

$$\underset{a_{\rho il}>0}{Max}\frac{-x_{\rho i}}{a_{\rho il}} \leq \Delta b_l \leq \underset{a_{\rho il}<0}{Min}\frac{-x_{\rho i}}{a_{\rho il}}$$

formülü bulunur.

Böylece kaynak kullanım miktarlarındaki değişimlerin etkisini inceleyebiliriz.

2.3. Teknolojik katsayılar a_{lj} 'deki değişimler

a_{lk}, P_k kolonunun l'inci satırında değiştirilecek eleman olsun. Varsayalım ki P_k optimum temeldeki bir vektördür. Optimum çözüm ise $X_0 = B^{-1}\vec{P}_0 = B^{-1}b$ dir. Verilen yeni matris $\overline{B} = B + \Delta a_{lk} 0_{lk}$ olup burada 0_{lk}, (l,k)'ıncı elemanının 1'e eşit olması hariç diğer elemanları sıfır olan matristir. Uygunluğu muhafaza etmek için ($\overline{B}$ nin tekil olmayan bir matris olduğu varsayılmaktadır) şu şekilde almalıyız.

$$\overline{B}^{-1}b = (B + \Delta a_{lk} 0_{lk})^{-1} b \geq 0 \quad (2)$$

ve optimalliği muhafaza etmek için

$$Z_j - c_j = \vec{C}_B \overline{B}^{-1} P_j - c_j \leq 0 \quad , (\forall \ j \text{ ler için}) \qquad (3)$$

alırız. Burada $\vec{C}_B$ temel değişkenlerin maliyet katsayıları cümlesini göstermektedir. $\overline{B} = B + \Delta a_{lk} 0_{lk}$ olduğuna göre biz $\overline{B}^{-1}$ yi şu şekilde yazabiliriz.

$$\overline{B}^{-1} = (I + B^{-1} \Delta a_{lk} 0_{lk})^{-1} B^{-1}$$

Böylece (2) 'yi yeniden şu şekilde yazabiliriz

$$\overline{B}^{-1} b = (I + B^{-1} \Delta a_{lk} 0_{lk})^{-1} B^{-1} b = (I + B^{-1} \Delta a_{lk} 0_{lk})^{-1} X_0 \qquad (4)$$

Şimdi Δa_{lk} nın hangi şartları için $(I + B^{-1} \Delta a_{lk} 0_{lk})^{-1}$ inversinin mevcut olduğunu ve (4) denklemini negatif yapmadığını belirleyelim.

$B^{-1} \Delta a_{lk} 0_{lk}$ terimi şu şekilde yazılabilir.

$$B^{-1} \Delta a_{lk} 0_{lk} = B^{-1} \begin{bmatrix} 0... & 0... & 0 \\ 0... & \Delta a_{lk} & 0 \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} \\ 0... & 0... & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0... & b_{1l} \Delta a_{lk} & 0 \\ 0... & b_{kl} \Delta a_{lk} & 0 \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ 0... & b_{ml} \Delta a_{lk} & 0 \end{bmatrix}$$

burada b_{il} , B^{-1} 'in l 'inci sütununa karşı gelen elemanlardır. Buradan

$$(I + B^{-1} \Delta a_{lk} 0_{lk}) = \begin{bmatrix} 1... & b_{1l} \Delta a_{lk} ...... & 0 \\ 0... & 1 + b_{kl} \Delta a_{lk} ..... & 0 \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ 0... & b_{ml} \Delta a_{lk} ... & 1 \end{bmatrix} \qquad (5)$$

olup inversi ise

$$(I + B^{-1} \Delta a_{lk} 0_{lk})^{-1} = \begin{bmatrix} 1... & \dfrac{-b_{1l} \Delta a_{lk}}{1 + b_{kl} \Delta a_{lk}} ...... & 0 \\ 0... & \dfrac{1}{1 + b_{kl} \Delta a_{lk}} ..... & 0 \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ 0... & \dfrac{-b_{ml} \Delta a_{lk}}{1 + b_{kl} \Delta a_{lk}} ... & 1 \end{bmatrix} \qquad (6)$$

(6) 'yı (4) de yerine koyarsak

$$\overline{B}^{-1} b = (I + B^{-1} \Delta a_{lk} 0_{lk})^{-1} X_0$$

$$B^{-1}b = \begin{bmatrix} x_1 - \dfrac{b_{1l}\Delta\, a_{lk}}{1+b_{kl}\Delta\, a_{lk}} x_k \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{1}{1+b_{kl}\Delta\, a_{lk}} x_k \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m - \dfrac{b_{ml}\Delta\, a_{lk}}{1+b_{kl}\Delta\, a_{lk}} x_k \end{bmatrix} \qquad (7)$$

(7) ‘nin var olabilmesi ve negatif olmaması için

$$1+b_{kl}\Delta a_{lk} > 0 \quad (8)$$

$$x_i - \frac{b_{il}\Delta\, a_{lk}}{1+b_{kl}\Delta\, a_{lk}} x_k \geq 0 \qquad (9)$$

olmalıdır. (9) ‘u çözerek Δa_{lk} ’yı , $i \neq k$ için şöyle buluruz.

$$\Delta\, a_{lk} \leq \frac{x_i}{b_{il}\, x_k - b_{kl} x_i} \;,\quad b_{il}\, x_k - b_{kl} x_i > 0 \text{ için}$$ veya

$$\frac{x_i}{b_{il}\, x_k - b_{kl} x_i} \leq \Delta\, a_{lk} \;,\quad b_{il} x_k - b_{kl} x_i < 0 \text{ için}$$

$$\underset{i\neq k}{Max} \frac{x_i}{(b_{il}\, x_k - b_{kl} x_i) < 0} \leq \Delta\, a_{lk} \leq \underset{i\neq k}{Min} \frac{x_i}{(b_{il}\, x_k - b_{kl} x_i) > 0} \qquad (10)$$

Tabanda olmayan P_j vektörleri için optimalite şartları (3) aynı anda sağlanmalıdır.

$\overline{B}^{-1} = (I + B^{-1}\Delta\, a_{lk}\, 0_{lk})^{-1} B^{-1}$ olduğu için yukardaki analiz şu şekilde sonuçlanır.

$$\vec{C}_B (I + B^{-1}\Delta\, a_{lk}\, 0_{lk})^{-1} B^{-1} P_j - c_j \leq 0 \qquad (11)$$

veya $\vec{C}_B (I + B^{-1}\Delta\, a_{lk}\, 0_{lk})^{-1} X_j - c_j \leq 0$ (12) olmaktadır.

Burada $X_j = B^{-1} P_j$ dir. (12) eşitsizliğini (6) ‘dan yararlanarak şöyle yazabiliriz.

$$\vec{C}_B \begin{bmatrix} x_{1j} - \dfrac{b_{1l}\Delta\, a_{lk}}{1+b_{kl}\Delta\, a_{lk}} x_{kj} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{1}{1+b_{kl}\Delta\, a_{lk}} x_{kj} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{mj} - \dfrac{b_{ml}\Delta\, a_{lk}}{1+b_{kl}\Delta\, a_{lk}} x \end{bmatrix} - c_j \leq 0$$

olarak bulunup sol tarafa $c_k x_{kj}$ terimini ekleyip çıkararak

$$c_1(x_{1j} - \frac{b_{1l}\Delta a_{lk}}{1+b_{kl}\Delta a_{lk}} x_{kj}) + \ldots + c_k \frac{1}{1+b_{kl}\Delta a_{lk}} x_{kj} + c_m(x_{mj} - \frac{b_{ml}\Delta a_{lk}}{1+b_{kl}\Delta a_{lk}} x_{kj}) + c_k x_{kj} - c_k x_{kj} - c_j \le 0$$

olur. Terimleri düzenleyerek

$$\sum_{i\in B} c_i x_{ij} - \frac{b_{1l}\Delta a_{lk}}{1+b_{kl}\Delta a_{lk}} c_1 x_{kj} - \ldots + \frac{1}{1+b_{kl}\Delta a_{lk}} c_k x_{kj} - \frac{b_{ml}\Delta a_{lk}}{1+b_{kl}\Delta a_{lk}} c_m x_{kj} - c_k x_{kj} - c_j \le 0 \quad (13)$$

elde ederiz. $c_k x_{kj}$ 'yi $(1+b_{kl}\Delta a_{lk})/(1+b_{kl}\Delta a_{lk})$ ile çarpıp (13)'ün terimlerini toplar ve $\sum_{i\in B} c_i x_{ij}$ yerine z_j koyarak

$$(z_j - c_j) - \sum_{i\in B} \frac{b_{il}\Delta a_{lk}}{1+b_{kl}\Delta a_{lk}} x_{kj} \le 0$$

ve (8) nolu denklemden

$$(z_j - c_j)(1+b_{kl}\Delta a_{lk}) - \Delta a_{lk} \sum_i b_{il} c_i x_{kj} \le 0$$

$$(z_j - c_j) + (z_j - c_j) b_{kl}\Delta a_{lk} - \Delta a_{lk} \sum_i b_{il} c_i x_{kj} \le 0$$

$$(z_j - c_j) \le \Delta a_{lk}[\sum_i b_{il} c_i x_{kj} - (z_j - c_j) b_{kl}]$$

Eğer köşeli parantez içindeki terim pozitif ise $\dfrac{(z_j - c_j)}{\sum_i b_{il} c_i x_{kj} - (z_j - c_j) b_{kl}} \le \Delta a_{lk}$

ve köşeli parantez içindeki terim negatif ise $\Delta a_{lk} \le \dfrac{(z_j - c_j)}{\sum_i b_{il} c_i\, x_{kj} - (z_j - c_j) b_{kl}}$

olacak veya temelde olmayan j 'ler için

$$\underset{j}{Max} \frac{(z_j - c_j)}{[x_{kj}\sum_i b_{il} c_i - (z_j - c_j) b_{kl}] > 0} \le \Delta a_{lk} \le \underset{j}{Min} \frac{(z_j - c_j)}{[x_{kj}\sum_i b_{il} c_i - (z_j - c_j) b_{kl}] < 0} \quad (14)$$

Eğer tekabül eden paydalar mevcut değilse Δa_{lk} sınırsızdır. Toplam terimi $\vec{C}_B B^{-1}$ satır vektörünün l'inci elemanıdır. Tabandaki bir P_k vektörünün l'inci bileşenine Δa_{lk} kadar değişim uygulamak için Δa_{lk} (8) ,(10) ve (14) 'ü sağlamalıdır. Değişken değerlerindeki tekabül eden değişiklikler (7) tarafından verilmektedir. Amaç fonksiyonu değerlerindeki toplam değişim (7) 'deki çözüm değerinden eski çözümün X_0 değerini çıkararak elde edilir yani

$$(x_1 - \frac{b_{1l}\Delta a_{lk}}{1+b_{kl}\Delta a_{lk}} x_k) c_1 + \ldots + \frac{c_k x_k}{1+b_{kl}\Delta a_{lk}} + (x_m - \frac{b_{ml}\Delta a_{lk}}{1+b_{kl}\Delta a_{lk}} x_k) c_m + c_1 x_1 - \ldots - c_k x_{kj} - c_m x_m = z$$

aşağıdaki terimleri ekleyerek

$$\frac{b_{kl}\Delta\, a_{lk}}{1+b_{kl}\Delta\, a_{lk}}c_k x_k - \frac{b_{kl}\Delta\, a_{lk}}{1+b_{kl}\Delta\, a_{lk}}c_k x_k$$

ve terimleri düzenleyerek şu sonucu elde ederiz

$$z = -\sum_i b_{il}c_i \frac{\Delta\, a_{lk}x_k}{1+b_{kl}\Delta\, a_{lk}}$$

Tabanda olmayan bir P_j vektörünün a_{lj} gibi bir elemanına bir değişim için a_{lj} $\vec{C}_B\, B^{-1}P_j - c_j \le 0$ ‘ ye uygun olmalıdır. Verilen bir Δa_{lj} için

$$\vec{C}_B(X_j + \Delta\, a_{lj}B^l) - c_j \le 0 \quad (15)$$

yazabiliriz. Burada B^l , B^{-1} ’in l ’inci sütunudur.

Böylece (15) $(z_j - c_j) + \Delta\, a_{lj}\sum_i b_{il}c_i \le 0$ olur.

Buradan P_j temelde olmadığı takdirde Δa_{lj} ’nin alt ve üst sınırlarını şöyle yazabiliriz.

$$\frac{-(z_j - c_j)}{\sum_i b_{il}c_i < 0} \le \Delta\, a_{lj} \le \frac{-(z_j - c_j)}{\sum_i b_{il}c_i > 0}$$

$$\Delta\, a_{lj} \le \begin{cases} \dfrac{-(z_j - c_j)}{\sum_i b_{il}c_i} & \text{eğer} \quad \sum_i b_{il}c_i > 0 \quad \text{ise} \\ +\infty & \text{eğer} \quad \sum_i b_{il}c_i \le 0 \quad \text{ise} \end{cases}$$

$$\Delta\, a_{lj} \ge \begin{cases} \dfrac{-(z_j - c_j)}{\sum_i b_{il}c_i} & \text{eğer} \quad \sum_i b_{il}c_i < 0 \quad \text{ise} \\ -\infty & \text{eğer} \quad \sum_i b_{il}c_i \ge 0 \quad \text{ise} \end{cases}$$

Şimdi aşağıdaki örneği göz önüne alalım.

$$Z = Max\ f(x) = 150x_1 + 120x_2 + 160x_3 + 160x_4 + 100x_5$$

$$10x_1 + 10x_2 + 20x_3 + 30x_4 + 20x_5 \le 50000$$
$$10x_1 + 20x_2 + 10x_3 + 10x_4 + 20x_5 \le 80000$$
$$30x_1 + 20x_2 + 20x_3 + 10x_4 + 10x_5 \le 140000$$
$$x_i \ge 0 \qquad i = 1,..,5$$

Problemin simpleks yöntem ile çözülmesi sonucu optimal simpleks tablo

		c_j	150	120	160	160	100	0	0	0
$\vec{C}_B$	$\vec{X}_B$	$\vec{\beta}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
150	x_1	4000	1	0	-2	-5	-3	-0.2	0	0.1
120	x_2	1000	0	1	4	8	5	0.3	0	-0.1
0	x_7	20000	0	0	-50	-100	-50	-4	1	1
	Z_j	720000	150	120	180	210	150	6	0	3
	$Z_j - c_j$	-	0	0	20	50	50	6	0	3

Amaç fonksiyonu katsayılarının duyarlılık analizi

$$\underset{y_{kj}>0}{Max}\frac{-(Z_j-c_j)}{y_{kj}} \le \Delta c_j \le \underset{y_{kj}<0}{Min}\frac{-(Z_j-c_j)}{y_{kj}}$$

formulü ile

$$Max(\frac{-3}{0.1}) \le \Delta c_1 \le Min(\frac{-20}{-2},\frac{-50}{-5},\frac{-50}{-3},\frac{-6}{-0.2})$$

$$120 \le c_1 \le 160$$

$$Max(\frac{-20}{4},\frac{-50}{8},\frac{-50}{5},\frac{-6}{0.3}) \le \Delta c_2 \le Min(\frac{-3}{-0.1})$$

$$115 \le c_2 \le 150$$

$$Max(\frac{-3}{1}) \le \Delta c_7 \le Min(\frac{-20}{-50},\frac{-50}{-100},\frac{-50}{-50},\frac{-6}{-4})$$

$$-3 \le c_7 \le 0.4$$

Burada

$$B=\begin{bmatrix}10 & 10 & 0\\ 10 & 20 & 1\\ 30 & 20 & 0\end{bmatrix} \quad B^{-1}=\begin{bmatrix}-0.2 & 0 & 0.1\\ 0.3 & 0 & -0.1\\ -4 & 1 & 1\end{bmatrix} \quad \vec{P}_0=\begin{bmatrix}50000\\ 80000\\ 140000\end{bmatrix} \quad \vec{X}_B=B^{-1}\vec{P}_0=\begin{bmatrix}4000\\ 1000\\ 20000\end{bmatrix}$$

olduğuna göre sağ taraf veya kaynak vektörünün duyarlılık analizi

$$\underset{a_{\rho il}>0}{Max}\frac{-x_{\rho i}}{a_{\rho il}} \le \Delta b_l \le \underset{a_{\rho il}<0}{Min}\frac{-x_{\rho i}}{a_{\rho il}}$$

formulü ile

$$Max(\frac{-1000}{0.3}) \le \Delta b_1 \le Min(\frac{-4000}{-0.2},\frac{-20000}{-4})$$

$$46666.667 \le b_1 \le 55000$$

$$20000 \le \Delta b_2 \le \infty$$

$$60000 \le b_2 \le \infty$$

$$Max(\frac{-4000}{0.1},\frac{-20000}{1}) \leq \Delta b_3 \leq Min(\frac{-1000}{-0.1})$$

$$120000 \leq b_3 \leq 150000$$

olarak bulunur.

Burada a_{lj} 'ler için (10) formulü ile yani

$$\underset{i\neq k}{Max}\frac{x_i}{(b_{il}\ x_k - b_{kl}x_i) < 0} \leq \Delta\, a_{lk} \leq \underset{i\neq k}{Min}\frac{x_i}{(b_{il}\ x_k - b_{kl}x_i) > 0}$$

formulü ile

$$\frac{x_3}{(b_{31}\ x_1 - b_{11}x_3) < 0} \leq \Delta\, a_{11} \leq \frac{x_2}{(b_{21}\ x_1 - b_{11}x_2) > 0}$$

$$\frac{20000}{(-4)(4000)-(-0.2)(20000)} \leq \Delta\, a_{11} \leq \frac{1000}{(-0.3)(4000)-(-0.2)(1000)}$$

$$-1.6667 \leq \Delta\, a_{11} \leq 0.71428$$

$$\frac{x_2}{b_{22}\ x_1 - b_{12}x_2} \leq \Delta\, a_{21} \leq \frac{x_3}{b_{32}\ x_1 - b_{12}x_3}$$

$$\frac{1000}{(0)(4000)-(0)(1000)} \leq \Delta\, a_{21} \leq \frac{20000}{(1)(4000)-(0)(20000)}$$

$$\Delta\, a_{21} \leq 5$$

$$\frac{x_2}{b_{23}\ x_1 - b_{13}x_2} \leq \Delta\, a_{31} \leq \frac{x_3}{b_{33}\ x_1 - b_{13}x_3}$$

$$\frac{1000}{(-0.1)(4000)-(0.1)(1000)} \leq \Delta\, a_{31} \leq \frac{20000}{(1)(4000)-(0.1)(20000)}$$

$$-2 \leq \Delta\, a_{31} \leq 10$$

$$\underset{i\neq 2}{Max}\{\frac{x_1}{b_{11}\ x_2 - b_{21}x_1},\frac{x_3}{b_{31}\ x_1 - b_{21}x_3}\} \leq \Delta\, a_{12}$$

$$\underset{i\neq 2}{Max}\{\frac{4000}{(-0.2)(1000)-(0.3)(4000)},\frac{20000}{(-4)(1000)-(0.3)(20000)}\} \leq \Delta\, a_{12}$$

$$-2 \leq \Delta\, a_{12}$$

$$\frac{x_1}{b_{22}\ x_2 - b_{22}x_1} \leq \Delta\, a_{22} \leq \frac{x_3}{b_{32}\ x_2 - b_{22}x_3}$$

$$\frac{4000}{(0)(1000)-(0)(4000)} \leq \Delta\, a_{22} \leq \frac{20000}{(1)(1000)-(0)(20000)}$$

$$\Delta\, a_{22} \leq 20$$

$$\Delta\, a_{32} \le Min\{\frac{x_1}{b_{13}\ x_2 - b_{23}x_1}, \frac{x_3}{b_{33}\ x_2 - b_{23}x_3}\}$$

$$\Delta\, a_{32} \le Min\{\frac{4000}{(0.1)(1000)-(-0.1)(4000)}, \frac{20000}{(1)(1000)-(-0.1)(20000)}\}$$

$$\Delta\, a_{32} \le 6.6667$$

(14) formulü ile a_{lj} 'ler için

$$\underset{j}{Max}\frac{(z_j - c_j)}{[x_{kj}\sum_i b_{il}c_i - (z_j - c_j)b_{kl}] > 0} \le \Delta\, a_{lk} \le \underset{j}{Min}\frac{(z_j - c_j)}{[x_{kj}\sum_i b_{il}c_i - (z_j - c_j)b_{kl}] < 0}$$

$$l = 1\ \textit{için} \sum_i b_{il}c_i = (150)(-0.2) = 6$$

$$Max\{\frac{(z_3-c_3)}{[x_{13}\sum_i b_{il}c_i - (z_3-c_3)b_{11}]}, \frac{(z_4-c_4)}{[x_{14}\sum_i b_{il}c_i - (z_4-c_4)b_{11}]}, \frac{(z_5-c_5)}{[x_{15}\sum_i b_{il}c_i - (z_5-c_5)b_{11}]}\} \le \Delta a_{11} \le Min\{\frac{(z_8-c_8)}{[x_{18}\sum_i b_{il}c_i - (z_8-c_8)b_{11}]}\}$$

$$Max\{\frac{20}{(-2)(6)-(20)(-0.2)}, \frac{50}{(-5)(6)-(50)(-0.2)}, \frac{50}{(-3)(6)-(50)(-0.2)}\} \le \Delta\, a_{11} \le Min\{\frac{3}{(0.1)(6)-(3)(-0.2)}\}$$

$$-2.5 \le \Delta\, a_{11} \le 2.5$$

$b_{kl} = b_{12} = 0$ olduğundan Δa_{21} için alt ve üst sınır hesaplanamaz.

$$Max\{\frac{(z_8-c_8)}{[x_{28}\sum_i b_{il}c_i - (z_3-c_3)b_{11}]}\} \le \Delta\, a_{12} \le Min\{\frac{(z_3-c_3)}{[x_{13}\sum_i b_{il}c_i - (z_3-c_3)b_{11}]}, \frac{(z_4-c_4)}{[x_{14}\sum_i b_{il}c_i - (z_4-c_4)b_{11}]}, \frac{(z_5-c_5)}{[x_{15}\sum_i b_{il}c_i - (z_5-c_5)b_{11}]}\}$$

$$Max\{\frac{3}{(-0.1)(6)-(3)(0.3)}\} \le \Delta\, a_{12} \le Min\{\frac{20}{(4)(6)-(20)(-0.3)}, \frac{50}{(8)(6)-(50)(-0.3)}, \frac{50}{(5)(6)-(50)(0.3)}\}$$

$$-2 \le \Delta\, a_{12} \le \frac{20}{18}$$

$$l = 3\ \textit{için} \sum_i b_{il}c_i = (150)(0.1) + (120)(-0.1) = 3$$

$$Max\{\frac{(z_3-c_3)}{[x_{13}\sum_i b_{il}c_i - (z_3-c_3)b_{13}]}, \frac{(z_4-c_4)}{[x_{14}\sum_i b_{il}c_i - (z_4-c_4)b_{13}]}, \frac{(z_5-c_5)}{[x_{15}\sum_i b_{il}c_i - (z_5-c_5)b_{13}]}\} \le \Delta a_{31} \le Min\{\frac{(z_8-c_8)}{[x_{18}\sum_i b_{il}c_i - (z_8-c_8)b_{13}]}\}$$

$$Max\{\frac{20}{(-2)(3)-(20)(0.1)}, \frac{50}{(-5)(3)-(50)(0.1)}, \frac{50}{(-3)(3)-(50)(0.1)}\} \le \Delta\, a_{31} \le Min\{\frac{3}{(0.1)(3)-(3)(0.1)}\}$$

$$-2.5 \le \Delta\, a_{31}$$

$$Max\{\frac{(z_3-c_3)}{[x_{23}\sum_i b_{il}c_i - (z_3-c_3)b_{23}]}, \frac{(z_4-c_4)}{[x_{24}\sum_i b_{il}c_i - (z_4-c_4)b_{23}]}, \frac{(z_5-c_5)}{[x_{25}\sum_i b_{il}c_i - (z_5-c_5)b_{23}]}\} \le \Delta a_{32} \le Min\{\frac{(z_8-c_8)}{[x_{18}\sum_i b_{il}c_i - (z_8-c_8)b_{23}]}\}$$

$$Max\{\frac{20}{(4)(3)-(20)(-0.1)}, \frac{50}{(8)(3)-(50)(-0.1)}, \frac{50}{(5)(3)-(50)(-0.1)}\} \le \Delta\, a_{32} \le Min\{\frac{3}{(0.1)(3)-(3)(0.1)}\}$$

$$\frac{20}{14} \le \Delta\, a_{32}$$

Sonuç

Bu çalışmada, karmaşıklığından dolayı uygulayıcılar tarafından çok az kullanılmış olan bir teknik olarak teknolojik katsayıların duyarlılık analizi ele alınmıştır. Bu çerçevede amaç fonksiyonu ve sağ taraf katsayılarının da duyarlılık analizine değinilmiştir.

Kaynaklar

1. Courtillot, M. On Varying All Parameters in a Linear-Programming Problem and Sequential Solution of a Linear-Programming Problem, Operations Research vol 10, no. 4, 1962

2. Julia L. Higle, Stein W. Wallace Sensitivity Analysis and Uncertainty in Linear Programming Interfaces Vol. 33, No. 4, July-August 2003, pp. 53-60

3. Webb, K.W. "The Mathematical Theory of Senstivity" Paper presented at the eigheenth national meeting of the Operations Research Society of America, Detroit, Mich., Oct 12 1960

4. Saul I. Gass Linear Programming : Methods and Applications McGraw-Hill 5th Ed. 1985

5. Yücel Y. Lineer Programlama Problemlerinin Vektörel Analizi ve Ekonomik Yorumları Trakya Üniv Bil Arş Derg Ser B Fen Bil, Cilt 3, No 1, (2002), 29-38