http://www.trakya.edu.tr/Enstituler/FenBilimleri/Dergi/net/index.htm
Trakya Univ J Sci, 5(2): 149-157, 2004
ISSN 1302 647X
DIC: 138NSGET520412040105

Araştırma Makalesi / Research Article

MANNING ROSEN POTANSİYEL SAÇILMASININ CEBİRSEL YAKLAŞIMI

Nurşen SEÇKİN GÖRGÜN
Trakya Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Fizik Bölümü, Edirne, Tel: 284 2120932–257, Fax: 284 2137053
e-mail: endernur@ttnet.net.tr, endernur@yahoo.com

Alınış : 10.03.2004
Kabul ediliş : 24.05.2004

Özet: Bu çalışmada, $SO(2,1) \supset SO(1,1)$ indirgemesine karşılık gelen potansiyel sınıfının bir üyesi ele alındı ve Manning-Rosen potansiyeli bulundu. Bu potansiyele sahip sistemin dalga fonksiyonu ve saçılma matrisi (Kerimov ve Seckin-Gorgun, 2002)'deki genel ifade kullanılarak belirlendi.

Anahtar kelimeler: Bir-boyutta saçılma, Cebirsel yaklaşım, Ginocchio potansiyel sınıfı, Manning Rosen Potansiyeli, Natanzon potansiyelleri, Saçılma teorisi

Algebraic Approach of The Scattering of Manning Rosen Potential

Abstract: In this work, a member of a class of potentials corresponding to the reduction of $SO(2,1) \supset SO(1,1)$ is studied, and thus the Manning-Rosen potential is recovered. The wave function and the scattering matrix of the system with this potential were determined using the general expression given in (Kerimov and Seckin-Gorgun, 2002).

Key words: Algebraic approach, Ginocchio potential class, Manning Rosen potential, Natanzon potentials, One-dimensional scattering, Scattering theory.

Giriş

Relativistik olmayan kuantum mekaniğinde analitik olarak çözülebilen problemlerin incelenmesi uzun bir geçmişe sahiptir. Natanzon (1971, 1979) çözülebilen Schrödinger denklemi için genel bir potansiyel yapısı bulmuştur. Natanzon potansiyelleri adını alan bu genel yapı analitik ve tam çözülebilen potansiyellerin bir çoğunu içerir. Örnek olarak Pöschl-Teller, Morse, Rosen-Morse, Manning-Rosen, Coulomb, Harmonik osilatör, Hulthen, Scarf, Wood-Saxon, Kratzer, Toda, Ginocchio potansiyelleri verilebilir. Bu potansiyellerden Manning Rosen potansiyeli iki atomlu moleküllerin titreşimlerinin incelenmesinde ortaya çıkar (Infeld ve Hull, 1951).

Natanzon potansiyellerinin kuantum fiziğindeki sayısal ve analitik uygulamalarından biri de cebirsel yöntemlerle saçılma problemlerinin incelenmesidir (Zwanziger, 1967; Frank ve Wolf 1984, 1985; Alhassid ve Ark. 1983, 1984, 1986). Bu çalışmalarda kullanılan yöntemler ya diğer saçılma problemlerine uygulanamamış, ya da kullanılan teori yeterince geliştirilemediğinden çok-parçacıklı saçılma problemlerine uygulanması oldukça zor olmuştur.

Bu cebirsel yöntemlerin dışında çözülebilir bağlı durum problemlerinin cebirsel olarak incelenmesi için farklı bir yöntem Ghirardi (1972) tarafından sunulmuştur. Bu yönteme göre sistemin H Hamiltonyeni $so(2,1)$ cebrinin C Casimir operatörüne $Q(x)(H-E) = \left[C - j(j+1)\right]\big|_{\mathcal{H}}$ ile bağlıdır. Burada j $so(2,1)$ cebrinin kesikli (discrete) seri temsillerini tanımlar ve $\mathcal{H}$ kompakt jeneratörün öz alt uzayıdır. Bu yöntemde invaryans cebir bilgisi bağlı durum problemlerini çözmeye yeterli olmuştur.

Saçılma problemlerinin cebirsel olarak hesaplanması yönünde güncel bir metot Kerimov (1998, 2002) tarafından sunulmuştur. Bu metot invaryans cebri doğrudan kullanarak saçılma matrislerinin tam olarak hesaplanabileceğini gösterir. $SO(2,1)$ grubuna $H = f(C)\big|_{\mathcal{H}}$ ilişkisiyle bağlı saçılma problemleri ele alınmıştır (Kerimov ve Sezgin, 1998), burada H Hamiltonyeni C Casimir operatörüyle lineer ilişkilidir ve $\mathcal{H}$ temsil uzayının bir-boyutlu alt uzaylarıdır. Saçılma problemlerinin etkileşme potansiyel yapıları açıkça bilinmeksizin, grup teorisi vasıtasıyla tamamen çözülebildiği gösterilmiştir. Ayrıca $SO(2,1) \supset SO(2)$, $SO(2,1) \supset SO(1,1)$ ve $SO(2,1) \supset E(1)$ alt grup indirgemelerine karşılık olarak $SO(2,1)$ grubuna bağlı bir-boyutlu saçılma problemlerinin üç sınıfının olduğu gösterilmiştir. Hamiltonyenleri ile $SO(2,1)$ grubunun C Casimir operatörü arasında

$$\left[C - j(j+1)\right]_{\mathcal{H}_\mu} = Q(x)(H - E)\ , \quad j = -\frac{1}{2} - i\rho\,, \quad 0 \le \rho < \infty\,, \quad \mu = m, \nu, \lambda \qquad (1)$$

ilişkisini koruyan sistemler için etkileşme potansiyel yapısının ne olduğu belirlenmiştir (Kerimov ve Seckin-Gorgun, 2002). Burada $\mathcal{H}_\mu$, $SO(2,1)$ grubunun temsil uzayının $SO(2,1) \supset SO(2)$, $SO(2,1) \supset SO(1,1)$ veya $SO(2,1) \supset E(1)$ indirgemelerindeki bir-boyutlu alt uzayı; ρ, m, ν ve λ parametreleri ise sırasıyla $SO(2,1)$, $SO(2)$, $SO(1,1)$ ve $E(1)$ grubunun indirgenemez temsillerini belirtir. Kullanılan ρ^2, m^2, ν^2 ve λ^2 parametreleri E enerjisinin lineer fonksiyonlarıdır. Buna göre, $SO(2,1) \supset SO(2)$, $SO(2,1) \supset SO(1,1)$ ve $SO(2,1) \supset E(1)$ indirgemelerine karşılık gelen potansiyel yapıları sınıflandırılmıştır (ayrıntılar için bak Seçkin Görgün (2002)).

Bu çalışmada analitik bir uygulama olarak $SO(2,1) \supset SO(1,1)$ indirgemesine karşılık gelen potansiyel sınıfında $a_1 = a_2 = a$ 'ya karşılık gelen potansiyel bulundu. Makalede (Kerimov ve Seckın-Gorgun, 2002) genel yapıları verilen dalga fonksiyonu ve saçılma matrisi ifadelerini kullanarak bu potansiyele sahip sistemin dalga fonksiyonu ve saçılma matrisi belirlendi. Elde edilen sonuçların sağlaması olarak, sistemin dalga fonksiyonunun asimptotik davranışı incelendi. Yansıma ve geçme katsayıları bulundu. Bulunan sonuçların makalede verilen genel yapıyla uyumlu olduğu görüldü.

SO(2,1) ⊃ SO(1,1) İndirgemesine Karşılık Gelen Potansiyel Sınıfı

Ghirardi (1972)'nin fikirleri izlenerek, H Hamiltonyenleri ile $SO(2,1)$ grubunun C Casimir operatörü arasında (1) ilişkisini koruyan sistemler için etkileşme potansiyel yapısı bulunurken, Schrödinger enerji öz değer denklemi

$$Cf = j(j+1)f\ , \quad j = -\frac{1}{2} - i\rho\ , \quad 0 \le \rho < \infty$$

bağıntısının sağlanmasını gerektirir. Bu nedenle, Hamiltonyenler bulunurken $SO(2,1)$ grubunun üniter indirgenemez temsillerinden temel serisini içeren indirgenebilir quaziregüler temsiller göz önüne alınır.

$SO(2,1)$ grubunun T quaziregüler temsili $\Xi = SO(2,1)/SO(2)$ hiperboloidinin üst kolunda $\xi_o^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 = 1$, $\xi_o > 0$ tanımlanan ve $d\mu$ quazi-invaryant hacim elemanına göre karesi integrallenebilen $f(\xi)$ fonksiyonlarının $L^2(\Xi, d\mu)$ Hilbert uzayında gerçeklenebilir. Bu temsil, Ξ deki her bir $d\mu(\xi)$ quazi-invaryant ölçümlü $L^2(\Xi, d\mu)$ uzayını taşıyan quaziregüler temsilin kurulması için kullanılacaktır. Bu temsil kurulurken $d\mu(\xi)$ quazi-invaryant hacim elemanı keyfi olarak seçilebilir. $T(g)$ temsil işlemcileri ve ölçümün invaryanslığı, sırasıyla

$$T(g)f(\xi) = [d\mu(\xi g)/d\mu(\xi)]^{1/2} f(\xi g)$$
$$(f, f') = \int \overline{f(\xi)} f'(\xi) d\mu(\xi) \tag{2}$$

ile verilir. $SO(2,1)$ grubunun her bir elemanı için $d\mu(\xi) = d\xi$ sağlanırsa Ξ hiperboloidi invaryant ölçüme sahip olur. Bu durumda $d\xi \equiv d\xi_1 d\xi_2 / \xi_o$ ve $d\mu(\xi g)/d\mu(\xi) = 1$ dır.

$SO(2,1) \supset SO(1,1)$ indirgemesinde $d\mu$ quazi-invaryant hacim elemanı $SO(1,1)$ dönüşümleri altında invaryant olacak şekilde seçilir. Hacim elemanı $d\mu = \upsilon(\xi_2) d\xi$, $\upsilon(\xi_2) = \left(1 + \xi_2^{\,2}\right)^{-1/2}$, $\upsilon(\xi_2) \geq 0$ yapısındadır. Burada

$$\xi_o = \frac{\cosh\beta}{\sqrt{1 - z^2(x)}}, \quad \xi_1 = \frac{\sinh\beta}{\sqrt{1 - z^2(x)}}, \quad \xi_2 = \frac{z(x)}{\sqrt{1 - z^2(x)}} \tag{3}$$

dır. β ve x, $-\infty < \beta < \infty$ ve $-\infty < x < \infty$ aralığında değişir; $z(x)$ $[-1,1]$ aralığında değer alan, R de türevlenebilir bir fonksiyondur. J_i, $i = 0,1,2$ quaziregüler temsil jeneratörleri

$$J_o = i\left[-\frac{1 - z^2}{\dot{z}} \sinh\beta \frac{\partial}{\partial x} + z\cosh\beta \frac{\partial}{\partial \beta} - \left(\frac{\ddot{z}(1 - z^2)}{2\dot{z}^2} + \frac{z}{2}\right)\sinh\beta\right],$$

$$J_1 = i\frac{\partial}{\partial\beta},$$

$$J_2 = i\left[\frac{1 - z^2}{\dot{z}} \cosh\beta \frac{\partial}{\partial x} - z\sinh\beta \frac{\partial}{\partial \beta} + \left(\frac{\ddot{z}(1 - z^2)}{2\dot{z}^2} + \frac{z}{2}\right)\cosh\beta\right]$$

yapısındadır. Burada J_o, 1-2 düzlemindeki dönmelerin yerini tutan operatördür. J_1 ve J_2 ise sırasıyla, 1 ve 2 eksenleri boyunca has Lorentz dönüşümlerinin yerini tutan operatörlerdir. $C = J_0^2 - J_1^2 - J_2^2$ Casimir operatörü ise aşağıdaki gibi tanımlıdır

$$C = \frac{\left(1 - z^2\right)^2}{\dot{z}^2}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\frac{\dddot{z}}{\dot{z}} - \frac{3}{4}\left(\frac{\ddot{z}}{\dot{z}}\right)^2 + \frac{\dot{z}^2(2 + z^2)}{4\left(1 - z^2\right)^2} + \frac{\dot{z}^2}{1 - z^2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right]. \tag{4}$$

$SO(2,1)$ grubunun temel serisinin $SO(2,1) \supset SO(1,1)$ indirgemesine karşı gelen baz fonksiyonları C ve J_1 işlemciler kümesinin öz fonksiyonlarıdır

$$Cf_{\nu\tau} = \left(-\frac{1}{4} - \rho^2\right) f_{\nu\tau} \tag{5}$$

$$J_1 f_{\nu\tau} = \nu\, f_{\nu\tau}, \tag{6}$$

burada ν $SO(1,1)$ grubunun indirgenemez temsillerini belirtir ve $\tau = \pm 1$ dir. $f_{\nu\tau}$ fonksiyonunun gerdiği bir-boyutlu alt uzayı $\mathcal{H}_\nu$ ile, C işlemcisinin bu alt uzaya kısıtlanmasını da C_ν ile gösterelim. Böylece C Casimir işlemcisi

$$C_\nu = \frac{\left(1-z^2\right)^2}{\dot{z}^2}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\frac{\dddot{z}}{\dot{z}} - \frac{3}{4}\left(\frac{\ddot{z}}{\dot{z}}\right)^2 + \frac{\dot{z}^2(2+z^2)}{z^2\left(1-z^2\right)^2} - \frac{\dot{z}^2\nu^2}{1-z^2}\right] \tag{7}$$

yapısını alır. Hamiltonyenlerin bu sınıfı için (1) bağıntısı aşağıdaki gibi yazılır

$$C_\nu - j(j+1) = Q(x)\left[H - E\right], \quad j = -\frac{1}{2} - i\rho, \quad 0 \le \rho < \infty \ . \tag{8}$$

Bu bağıntı E nin bir fonksiyonu olan ν^2 ve ρ^2 'nin

$$1+\nu^2 = a_1 E + b_1 \ , \qquad 1+\rho^2 = a_2 E + b_2 \tag{9}$$

seçimiyle sağlanabilecektir. Bu durumda Hamiltonyen, $2m = \hbar = 1$ olmak üzere aşağıdaki yapıyı alır

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$$

$$V(x) = \frac{b_1 z^2(1-z^2) - \dfrac{3(1-z^2)}{4} - b_2 z^2 + 1}{R} + \frac{z^4(1-z^2)^2}{R^2}\left(a_1 + \frac{a_1 + a_2(2z^2-1)}{z^2(z^2-1)} - \frac{5\Delta}{4R}\right), \tag{10}$$

burada $R(z) = a_1 z^4 + \left(a_2 - a_1\right)z^2$ ve $\Delta = (a_1 - a_2)^2$ dir. H Hamiltonyeni

$$\left(C_\nu + \rho^2 + \frac{1}{4}\right) = -\frac{(1-z^2)^2}{\dot{z}^2}\left[H - E\right]$$

ilişkisini değişmez bırakır. Bu ifade (8) denklemiyle karşılaştırıldığında $Q(x) = -\dfrac{(1-z^2)^2}{\dot{z}^2}$ dir. Burada $z(x)$

$$\dot{z}(x) = z\left(1-z^2\right)\Big/\sqrt{R(z)} \tag{11}$$

bağıntısını sağlar. z ile x arasındaki ilişkiyi veren (11) bağıntısında farklı parametre seçimlerine karşılık değişik $z(x)$ çözümleri bulmak mümkündür. Böylece farklı parametre seçimlerine karşılık farklı potansiyel yapıları elde edilebilir.

Denklem (10)'daki potansiyellerin dalga fonksiyonları $f_{\nu\tau}(\xi)$ baz fonksiyonlarına bağlıdır. Burada ν $SO(1,1)$ grubunun indirgenemez temsillerini belirtir ve $\tau = \pm 1$ dir. $f_{\nu\tau}(\xi)$ baz fonksiyonları seri temsillerinin baz fonksiyonları için integral temsili yardımıyla bulunur. Dalga fonksiyonu

$$\begin{aligned}\Psi_\tau(x) \propto \left(\dot{z}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1-z^2\right)^{\frac{2j+3}{4}} \\ \times\Bigg\{\Gamma\left(\frac{j+i\nu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{j-i\nu+1}{2}\right){}_2F_1\left(\frac{j+i\nu+1}{2},\frac{j-i\nu+1}{2};\frac{1}{2};z^2\right) \\ + 2\tau\, z\,\Gamma\left(\frac{j+i\nu+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{j-i\nu+2}{2}\right).{}_2F_1\left(\frac{j+i\nu+2}{2},\frac{j-i\nu+2}{2};\frac{3}{2};z^2\right)\end{aligned} \tag{12}$$

ilişkisine sahiptir. Burada ${}_2F_1$ hipergeometrik fonksiyonları ile Γ fonksiyonları arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir (Bateman, 1953)

$$ {}_2F_1(a,b,c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} \frac{\Gamma(b+n)}{\Gamma(b)} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c+n)} \frac{z^n}{n!} . $$

Bu sınıfa ait potansiyel fonksiyonları enerjinin her pozitif değeri için dalga fonksiyonunun iki kat dejenereliğine sahiptir. Bu yüzden, potansiyel tarafından kısmi olarak geçirilen ve kısmi olarak yansıtılan dalga paketleri düzenlenebilir. Burada Ψ_{-1} fonksiyonu soldan gelen dalgayı temsil eder. Potansiyel engelinde yansıma olur ama aynı zamanda sağa doğru geçiş de olur. Ψ_{+1} fonksiyonu sağdan gelen dalgayı temsil eder. Potansiyel engelinden yansıma olmasına rağmen sola doğru geçiş de olur. Bu çalışmada $\tau = +1$ durumunu göz önüne alacağız.

S matrisi 2×2 'lik üniter matristir ve

$$ S_\nu = \begin{pmatrix} R_\nu & T_\nu \\ T_\nu & R_\nu \end{pmatrix} \tag{13} $$

$$ R_\nu = c(\rho)\frac{1}{\pi}\cosh(\pi\nu)\Gamma\left(\frac{1}{2} - i\rho + i\nu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - i\rho - i\nu\right) $$

$$ T_\nu = -c(\rho)\frac{1}{\pi}\sinh(\pi\rho)\Gamma\left(\frac{1}{2} - i\rho + i\nu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - i\rho - i\nu\right) $$

yapısındadır. Burada $c(\rho)$ keyfi bir faz çarpanıdır; ρ ve ν parametreleri sırasıyla $SO(2,1)$ ve $SO(1,1)$ in indirgenemez temsillerini belirtir.

Manning Rosen Potansiyeli

Bu bölümde analitik bir uygulama olarak $SO(2,1) \supset SO(1,1)$ indirgemesine karşılık gelen potansiyel sınıfında $a_1 = a_2 = a$ 'ya karşılık gelen potansiyeli ele alacağız. Denklem (1)'den dolayı bu potansiyele sahip sistemin dalga fonksiyonunu ve saçılma matrisini (12) ve (13) denklemlerinden belirleyeceğiz. Ayrıca belirlediğimiz sonuçların bir sağlaması olarak, sistemin dalga fonksiyonunun asimptotik davranışını inceleyerek yansıma ve geçme katsayılarını bulacağız.

Denklem (11)'de $a_1 = a_2 = a$ aldığımızda $R(z) = a_1 z^4$ olur. Böylece z ile x arasındaki ilişkiyi $\upsilon(\xi_2) > 0$ ifadesinden belirlenen $\dot{z} > 0$ ve $1 - z^2 > 0$ koşullarını kullanarak

$$ z(x) = \begin{cases} -\sqrt{1 - e^{+2x/\sqrt{a}}} & -\infty < x < 0, \quad -1 \le z < 0 \\ +\sqrt{1 - e^{-2x/\sqrt{a}}} & 0 < x < \infty, \quad 0 < z \le 1 \end{cases} \tag{14} $$

olarak buluruz. Denklem (10)'da $a_1 = a_2 = a$, $R(z) = a_1 z^4$, $\Delta = 0$ ve denklem (14)'deki $z(x)$ çözümünü yazıp düzenleme yaptığımızda H Hamiltonyeni

$$ \begin{aligned} H &= -\frac{d^2}{dx^2} - \frac{b_1 + b_2 - 2}{2a} + \frac{b_2 - b_1}{2a}\coth\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right) - \frac{3/4}{4a\sinh^2\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)} \qquad -\infty < x < 0 \\ H &= -\frac{d^2}{dx^2} - \frac{b_1 + b_2 - 2}{2a} - \frac{b_2 - b_1}{2a}\coth\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right) - \frac{3/4}{4a\sinh^2\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)} \qquad 0 < x < \infty \end{aligned} \tag{15} $$

Manning-Rosen potansiyel Hamiltonyenine karşılık gelir.
Manning-Rosen potansiyeline sahip saçılma sisteminin dalga fonksiyonları (12) denkleminden
$-\infty < x < 0$ için

$$\Psi_{+1}(x) \propto e^{-i\rho x/\sqrt{a}}\left(1-e^{2x/\sqrt{a}}\right)^{1/4}\left\{\Gamma\left[\frac{1+2i(\nu-\rho)}{4}\right]\Gamma\left[\frac{1-2i(\nu+\rho)}{4}\right]\right.$$
$$\times {}_2F_1\left[\frac{1+2i(\nu-\rho)}{4},\frac{1-2i(\nu+\rho)}{4};\frac{1}{2};1-e^{2x/\sqrt{a}}\right]-2\sqrt{1-e^{2x/\sqrt{a}}}\,\Gamma\left[\frac{3+2i(\nu-\rho)}{4}\right]$$
$$\left.\times\Gamma\left[\frac{3-2i(\nu+\rho)}{4}\right]{}_2F_1\left[\frac{3+2i(\nu-\rho)}{4},\frac{3-2i(\nu+\rho)}{4};\frac{3}{2};1-e^{2x/\sqrt{a}}\right]\right\} \tag{16}$$

ve
$0 < x < \infty$ için

$$\Psi_{+1}(x) \propto e^{i\rho x/\sqrt{a}}\left(1-e^{-2x/\sqrt{a}}\right)^{1/4}\left\{\Gamma\left[\frac{1+2i(\nu-\rho)}{4}\right]\Gamma\left[\frac{1-2i(\nu+\rho)}{4}\right]\right.$$
$$\times {}_2F_1\left[\frac{1+2i(\nu-\rho)}{4},\frac{1-2i(\nu+\rho)}{4};\frac{1}{2};1-e^{-2x/\sqrt{a}}\right]+2\sqrt{1-e^{-2x/\sqrt{a}}}\,\Gamma\left[\frac{3+2i(\nu-\rho)}{4}\right]$$
$$\left.\times\Gamma\left[\frac{3-2i(\nu+\rho)}{4}\right]{}_2F_1\left[\frac{3+2i(\nu-\rho)}{4},\frac{3-2i(\nu+\rho)}{4};\frac{3}{2};1-e^{-2x/\sqrt{a}}\right]\right\} \tag{17}$$

ilişkisine sahip olur. Burada ν ve ρ, $2m=\hbar=1$, $k^2=2mE/\hbar^2$, $0\le\rho<\infty$ olmak üzere (9) bağıntısından $\nu=\pm\sqrt{ak^2+b_1-1}$, $\rho=\sqrt{ak^2+b_2-1}$ olarak belirlenir.

Manning-Rosen potansiyeline sahip sistemin saçılma matrisini (13) denkleminden belirleriz. Bu durum için

$$\begin{aligned} R_\nu &= c(\rho)\frac{1}{\pi}\cosh(\pi\nu)\Gamma\left[\frac{1}{2}+i(\nu-\rho)\right]\Gamma\left[\frac{1}{2}-i(\nu+\rho)\right] \\ T_\nu &= -c(\rho)\frac{1}{\pi}\sinh(\pi\rho)\Gamma\left[\frac{1}{2}+i(\nu-\rho)\right]\Gamma\left[\frac{1}{2}-i(\nu+\rho)\right] \end{aligned} \tag{18}$$

olur. Yansıma ve geçme katsayılarını aşağıdaki gibi buluruz

$$|R|^2=\frac{\cosh^2\pi\nu}{\cosh^2\pi\nu+\sinh^2\pi\rho}\,,\qquad |T|^2=\frac{\sinh^2\pi\rho}{\cosh^2\pi\nu+\sinh^2\pi\rho}\,. \tag{19}$$

Denklem (13) yardımıyla belirlediğimiz (18) ve (19) ifadelerinin sağlamasını denklem (16) ve (17) ile verilen dalga fonksiyonlarının asimptotik davranışlarını inceleyerek yapalım.

Öncelikle $-\infty < x < 0$ aralığında tanımlı (16) ifadesini göz önüne alalım. Burada $\lim_{x\to-\infty}\left(1-e^{2x/\sqrt{a}}\right)=1$, $\lim_{x\to-\infty} e^{-i\rho x/\sqrt{a}}\left(1-e^{2x/\sqrt{a}}\right)^{1/4}=e^{-i\rho x/\sqrt{a}}$ dir. Hipergeometrik fonksiyonlar

$$\lim_{x\to-\infty} {}_2F_1\left[\frac{1+2i(\nu-\rho)}{4},\frac{1-2i(\nu+\rho)}{4};\frac{1}{2};1-e^{2x/\sqrt{a}}\right]=$$

$$\sqrt{\pi}\left\{\frac{\Gamma(i\rho)}{\Gamma\left[\frac{1-2i(\nu-\rho)}{4}\right]\Gamma\left[\frac{1+2i(\nu+\rho)}{4}\right]}+\frac{\Gamma(-i\rho)e^{i2\rho x/\sqrt{a}}}{\Gamma\left[\frac{1+2i(\nu-\rho)}{4}\right]\Gamma\left[\frac{1-2i(\nu+\rho)}{4}\right]}\right\}$$

ve

$$\lim_{x\to-\infty} {}_2F_1\left[\frac{3+2i(\nu-\rho)}{4},\frac{3-2i(\nu+\rho)}{4};\frac{3}{2};1-e^{2x/\sqrt{a}}\right]=$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left\{\frac{\Gamma(i\rho)}{\Gamma\left[\frac{3-2i(\nu-\rho)}{4}\right]\Gamma\left[\frac{3+2i(\nu+\rho)}{4}\right]}+\frac{\Gamma(-i\rho)e^{i2\rho x/\sqrt{a}}}{\Gamma\left[\frac{3+2i(\nu-\rho)}{4}\right]\Gamma\left[\frac{3-2i(\nu+\rho)}{4}\right]}\right\},$$

yapısını alır. Böylece

$$\lim_{x\to-\infty}\Psi_{+1}(x)\propto\sqrt{\pi}\,\Gamma(i\rho)T\,e^{-i\rho x/\sqrt{a}} \tag{20}$$

ilişkisini buluruz. Burada x, $-\infty<x<0$ aralığındadır ve

$$T=\frac{\Gamma\left[\frac{1+2i(\nu-\rho)}{4}\right]\Gamma\left[\frac{1-2i(\nu+\rho)}{4}\right]}{\Gamma\left[\frac{1-2i(\nu-\rho)}{4}\right]\Gamma\left[\frac{1+2i(\nu+\rho)}{4}\right]}-\frac{\Gamma\left[\frac{3+2i(\nu-\rho)}{4}\right]\Gamma\left[\frac{3-2i(\nu+\rho)}{4}\right]}{\Gamma\left[\frac{3-2i(\nu-\rho)}{4}\right]\Gamma\left[\frac{3+2i(\nu+\rho)}{4}\right]}$$

yapısındadır. T yi daha düzenli olarak aşağıdaki gibi yazabiliriz

$$T=-\frac{2^{1+2i\rho}}{\pi}\sinh(\pi\rho)\Gamma\left[\frac{1}{2}+i(\nu-\rho)\right]\Gamma\left[\frac{1}{2}-i(\nu+\rho)\right]. \tag{21}$$

$0<x<\infty$ aralığında tanımlı (17) ifadesini göz önüne aldığımızda $\lim_{x\to+\infty}\left(1-e^{-2x/\sqrt{a}}\right)=1$, $\lim_{x\to+\infty}e^{i\rho x/\sqrt{a}}\left(1-e^{-2x/\sqrt{a}}\right)^{1/4}=e^{i\rho x/\sqrt{a}}$ dir. Hipergeometrik fonksiyonlar

$$\lim_{x\to+\infty} {}_2F_1\left[\frac{1+2i(\nu-\rho)}{4},\frac{1-2i(\nu+\rho)}{4};\frac{1}{2};1-e^{-2x/\sqrt{a}}\right]=$$

$$\sqrt{\pi}\left\{\frac{\Gamma(i\rho)}{\Gamma\left[\frac{1-2i(\nu-\rho)}{4}\right]\Gamma\left[\frac{1+2i(\nu+\rho)}{4}\right]}+\frac{\Gamma(-i\rho)e^{-2i\rho x/\sqrt{a}}}{\Gamma\left[\frac{1+2i(\nu-\rho)}{4}\right]\Gamma\left[\frac{1-2i(\nu+\rho)}{4}\right]}\right\},$$

ve

$$\lim_{x\to+\infty} {}_2F_1\left[\frac{3+2i(\nu-\rho)}{4},\frac{3-2i(\nu+\rho)}{4};\frac{3}{2};1-e^{-2x/\sqrt{a}}\right]=$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left\{\frac{\Gamma(i\rho)}{\Gamma\left[\frac{3-2i(\nu-\rho)}{4}\right]\Gamma\left[\frac{3+2i(\nu+\rho)}{4}\right]}+\frac{\Gamma(-i\rho)e^{-2i\rho x/\sqrt{a}}}{\Gamma\left[\frac{3+2i(\nu-\rho)}{4}\right]\Gamma\left[\frac{3-2i(\nu+\rho)}{4}\right]}\right\}$$

yapısını alır. Böylece

$$\lim_{x\to+\infty}\Psi_{+1}(x)\propto\sqrt{\pi}\left[2\Gamma(-i\rho)e^{-i\rho x/\sqrt{a}}+\Gamma(i\rho)R\,e^{i\rho x/\sqrt{a}}\right] \tag{22}$$

ilişkisini buluruz. Burada x, $0<x<\infty$ aralığındadır ve

$$R=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left\{\frac{\Gamma\left[\frac{1+2i(\nu-\rho)}{4}\right]\Gamma\left[\frac{1-2i(\nu+\rho)}{4}\right]}{\Gamma\left[\frac{1-2i(\nu-\rho)}{4}\right]\Gamma\left[\frac{1+2i(\nu+\rho)}{4}\right]}+\frac{\Gamma\left[\frac{3+2i(\nu-\rho)}{4}\right]\Gamma\left[\frac{3-2i(\nu+\rho)}{4}\right]}{\Gamma\left[\frac{3-2i(\nu-\rho)}{4}\right]\Gamma\left[\frac{3+2i(\nu+\rho)}{4}\right]}\right\}$$

dir. R yi düzenlediğimizde aşağıdaki yapıyı buluruz

$$R=2^{1+2i\rho}\frac{1}{\pi}\cosh(\pi\nu)\Gamma\left[\frac{1}{2}+i(\nu-\rho)\right]\Gamma\left[\frac{1}{2}-i(\nu+\rho)\right]. \tag{23}$$

Denklem (21) ve (23) ifadelerini (18) ile karşılaştırdığımızda $c(\rho)=2^{1+2i\rho}$ olduğunu görürüz.

Tartışma

Bu çalışmada SO(2,1) grubunun temel serisine bağlı çözülebilir potansiyel yapılarından $SO(2,1)\supset SO(1,1)$ indirgemesine karşılık gelen (10) potansiyel yapısını ele aldık. Analitik bir uygulama olarak (11) denklemindeki $a_1=a_2=a$ parametre seçimine karşılık gelen potansiyeli Manning-Rosen potansiyeli olarak belirledik. Denklem (1)'den dolayı bu potansiyele sahip sistemin dalga fonksiyonu ve saçılma matrisi grup yöntemiyle bulunabilir. Genel yapıları (12) ve (13) denklemleri ile sunulan dalga fonksiyonu ve saçılma matrisi ifadelerini kullanarak bu potansiyele sahip sistemin dalga fonksiyonunu ($-\infty<x<0$ aralığı için (16), $0<x<\infty$ aralığı için (17)) ve saçılma matrisini (18) belirledik. Ayrıca belirlediğimiz sonuçların bir sağlaması olarak, sistemin dalga fonksiyonunun asimptotik davranışını inceleyerek saçılma matrisinin (18) denklemiyle aynı olduğunu gördük.

Teşekkür

Bu çalışma esnasında faydalı müzakereleri için Prof. Dr. Gül Mirza Kerimov'a ve Prof. Dr. S. Askeri Baran'a çok teşekkür ederim.

Kaynaklar

1 ALHASSID Y., ENGEL J., WU J. Algebraic approach to the scattering matrix. Phys. Rev. Lett., 53: 17-20, 1984.

2 ALHASSID Y., GURSEY F., IACHELLO F. Group theory approach to scattering. Ann. Phys. (N.Y.), 148: 346-380, 1983.

3 ALHASSID Y., GURSEY F., IACHELLO F. Group theory approach to scattering. II. The Euclidean connection. Ann. Phys. (N.Y.), 167: 181-200, 1986.

4 BATEMAN H. Higher Transcendental Functions, (ERDELYI A.), I. Cilt, 1. Baskı, 56 S. McGraw-Hill, New York, 1953.

5 FRANK A., WOLF KB. Lie algebras for potential scattering. Phys. Rev. Lett., 52: 1737-1739, 1984.

6 FRANK A., WOLF KB. Lie algebras for systems with mixed spectra. I. The scattering Pöschl-Teller potential. J. Math. Phys., 26: 973-983, 1985.

7 GHIRARDI GC. On the algebraic structure of a class of solvable quantum problems. Nuovo Cimento, 10A: 97-120, 1972.

8 INFELD L., HULL TE. The Factorization method. Rev. Mod. Phys., 23: 21-68, 1951.

9 KERIMOV GA. New algebraic approach to scattering problems. Phys. Rev. Lett., 80: 2976-2979, 1998.

10 KERIMOV GA. Scattering theory for quantum integrable systems related to semi-simple Lie groups. Phys. Lett. A, 294: 278-286, 2002.

11 KERIMOV GA., SECKIN-GORGUN N. On scattrering systems related to the SO(2,1) group: II. J. Phys. A: Math. Gen. 35: 6659-6673 (Print UK), 2002.

12 KERIMOV GA., SEZGIN M. On scattrering systems related to the SO(2,1) group. J. Phys. A: Math. Gen. 31: 7901-7912 (Print UK), 1998.

13 NATANZON GA. Study of the one dimensional Schrödinger equation generated from the hypergeometric equation. Vestn. Leningr. Univ., No:10: 22-28, 1971.

14 NATANZON GA. General properties of potentials for which the Schrödinger equation can be solved by means of hypergeometric functions. Theoret. Mat. Fiz., 38: 146-153 (English transl.), 1979.

15 SECKIN GORGUN N. Çözülebilir Kuantum Saçılma Sistemlerinin Grup Metotları İle İncelenmesi. Doktora Tezi. Trakya Üniversitesi, 2002.

16 ZWANZIGER D. Algebraic calculation of nonrelativistic Coulomb phase shifts. J. Math. Phys., 8: 1858-1860, 1967.