Araştırma Makalesi **GÜFFD 1. Cilt (1-2): 22-35 (2020)** **ISSN 2757-5543**

Gazi Üniversitesi Fen Fakültesi Dergisi
http://sci-fac-j.gazi.edu.tr/

GÜFFD
GAZİ ÜNİVERSİTESİ FEN FAKÜLTESİ DERGİSİ

Parametre Tahmininde Farklı Doğrusal Programlama Modellerinin Karşılaştırılması

Emre Koçak*, H. Hasan Örkcü
Gazi Üniversitesi, Fen Fakültesi, İstatistik Bölümü, 06500, Ankara, Türkiye

Öne Çıkanlar

- Regresyon analizinde parametre tahmini için doğrusal programlama yönteminin kullanılması
- Farklı tahmin edicilerin yöntemlerinin karşılaştırmalı olarak incelenmesi
- Doğrusal programlama modellerinin hesaplama sürelerine etkileri

Makale Bilgileri

Geliş:11/11/2020
Kabul: 03/12/2020

Anahtar Kelimeler
Parametre tahmini,
Regresyon analizi,
Doğrusal programlama

Özet

L_p norm ve L_∞ norm parametre tahmin yöntemleri kullanılarak doğrusal ve doğrusal olmayan regresyon modellerin parametrelerini tahmin etmek için çeşitli yapılarda modeller geliştirilmiştir. L_p normunun özel bir hali olan L_1 norm ve L_∞ norm yöntemlerinden geliştirilmiş modellerin karşılaştırıldığı bu çalışmada, simülasyon çalışması ile üretilen farklı örneklem büyüklüklerindeki veri kümeleri yardımıyla katsayıların tahmini dışında açıklayıcılık katsayısı ve hesaplama süreleri incelenmiştir. Karşılaştırılan modeller parametre tahmini ve açıklayıcılık katsayıları açısından önemli derecede farklılık oluşturmaz iken hesaplama süreleri açısından farklılıklara neden olmuştur.

A Comparison of Different Linear Programming Models in Parameter Estimation

Highlights

- Using linear programming method for parameter estimation in regression analysis
- Comparative study of methods of different estimators
- Effects of linear programming models on computation time

Article Info

Received: 11/11/2020
Accepted: 03/12/2020

Keywords
Parameter estimation,
Regression analysis,
Linear programming

Abstract

Models with various constructs have been developed to estimate the parameters of linear and nonlinear regression models using L_p-norm and L_∞-norm parameter estimation methods. In this study, which is L_1-norm, a special case of the L_p-norm and L_∞-norm methods were compared, with the help of datasets in different sample sizes produced by the simulation study apart from the estimation of the coefficients, the explanatory coefficient and calculation times were examined. While the compared models did not make a significant difference in terms of parameter estimation and explanatory coefficients, they caused differences in terms of calculation times.

Araştırma Makalesi

* Sorumlu Yazar/Corresponding Author: Emre Koçak, emrekocak@gazi.edu.tr

1. GİRİŞ

En küçük kareler yöntemine alternatif olarak önerilen L_p norm ve L_∞ norm parametre tahmin yöntemleri, doğrusal ve doğrusal olmayan regresyon modellerinin parametre tahmininde kullanılmaktadır. Genel olarak L_p norm, modellerin parametreleri tahmin edilen değerlerin bağımlı değişkenin gözlemlenen değerlerinden mutlak sapmalarının p. güçlerinin toplamının en aza indirilmesi ile tahmin edilir. L_∞ norm ise, Gauss-Newton veya Levenberg-Marquardt tipindedir ve yalnızca birinci türev bilgilerini kullanır. Orijinal doğrusal olmayan problem, her biri doğrusal bir programlama problemi olarak verimli bir şekilde çözülebilen bir dizi doğrusal L_∞ norm problemine indirgenmiştir [1].

Charnes vd. ve Wagner yaptıkları çalışmalar ile doğrusal programlama problemini L_p norm yönteminin özel hali olan L_1 norm ve L_∞ norm yöntemlerine uyarladılar ve bu tahmin yöntemleri kısıtlı bir optimizasyon problemi olarak modellenmiştir [2, 3]. Zamanın bilgisayarları çok büyük boyuttaki doğrusal programlama problemlerini çözebilecek kadar gelişmiş olmamasından dolayı çalışmalarını daha ileri seviyelere getirememişlerdir. Fakat ilerleyen teknoloji ile bu tahmin yöntemleri geliştirildi ve çeşitli model yapıları meydana geldi.

Osborne ve Watson ile Anderson ve Osborne çalışmalarında Gauss-Newton tipinde kısıtsız bir L_∞ regresyon problemi çözmüşlerdir [4, 5]. Barrodale ve Phillips, L_∞ norm tahmin probleminin ilk formülasyonunu çözmek için ikili bir yöntem önerdiler [6]. Armstrong vd., çoklu regresyon modellerinde çok hızlı bir algoritma geliştirmek için, temel matrisin LU ayrışımı ile revize edilmiş simpleks yöntemini kullandı [7]. Murray ve Overton, doğrusal olmayan minimax problemini çözmek için bir prosedür geliştirdiler [8]. Daha sonra Overton, bu yaklaşımı doğrusal olmayan L_∞ norm tahmin problemini çözmek için uyarlamıştır [9]. Dielman, en küçük mutlak değer ve en küçük kare regresyon denklemlerinden gelen tahminleri 30 gözlemle karşılaştırmak için Monte Carlo simülasyonunu kullandı [10]. Gentle vd., geliştirilen bazı modelleri ele alarak basit ve çoklu regresyon için en küçük mutlak değer algoritmalarının performansını inceledi [11]. Narula vd., basit regresyon için büyüklükleri farklı olan geliştirilmiş modellerin hesaplama sürelerini incelemişlerdir [12]. Soliman vd., en küçük mutlak değer artık değerleri sıfıra eşit olan gözlemleri tanımlamak için bir algoritma önermiştir. Bu şekilde, en küçük mutlak değer regresyonunun belirlenebileceğini ve ortaya çıkan hesaplama süresinin simpleks çözümleri kullanan algoritmalardan daha hızlı olacağını iddia ettiler [13]. Seneta ve Steiger, parametrelerin sayısı gözlemlerin sayısına göre büyük olduğunda diğer algoritmalardan daha hızlı olan bir en küçük mutlak değer algoritması önermiştir [14]. Narula ve Wellington, her biri için ayrı algoritmalar kullanmak yerine hem en küçük mutlak değer hem de Chebychev regresyon problemlerini çözmek için tek bir verimli algoritma sağlamıştır [15]. Dielman ve Rose, bozulmalara birinci dereceden otokorelasyona neden olduğunda Monte Carlo simülasyonunu kullanarak en küçük mutlak değer ve en küçük kare regresyonlarının tahmin performansını araştırdı [16]. Hong ve Choi, tahmini bir regresyon çizgisinde olduğu varsayılan noktaya kadar her veri noktasından eğimlerin yakınsak ağırlıklı medyanları cinsinden tahminleri tanımlayarak en küçük mutlak değer regresyon katsayısı tahminlerini bulmanın bir yöntemini önermiştir [17]. Portnoy ve Koenker, en küçük mutlak değer tahminlerini doğrusal programlama ile çözmek için iç nokta algoritmalarını inceledi [18].

Geliştirilen model yapılarındaki farklılıklardan dolayı doğrusal ve doğrusal olmayan regresyon analizi alanında yapılan çalışmalarda parametre tahmini, hesaplama süresi ve açıklayıcılık katsayısı gibi farklılıkları ortaya çıkmaktadır. Bu nedenle hangi modelin hangi yapıdaki veri kümeleri için daha uygun bir yapıda olduğu sorusu önemli bir hale gelmiştir. Bu çalışmada L_1 norm ve L_∞ norm yöntemlerinden geliştirilmiş çeşitli modeller farklı yapılardaki veri kümeleri için karşılaştırılmış ve ele alınan veri kümesi için uygun model belirlenmiştir. Çalışmada ele alınacak olan modeller 2. Bölümde, çalışma sonucunda bulunan bulgular ve modellerin karşılaştırılması 3. Bölümde yer almaktadır. Son bölümde ise elde edilen sonuçlar yer almaktadır.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

n gözlemli doğrusal regresyon modeli aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$y_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^{m} x_{ij}\beta_j + \varepsilon_i \, , i = 1,2, \dots n$$

Burada y_i, bağımlı değişkenin i. gözlem değeri; x_{ij}, j. açıklayıcı değişkenin i. gözlem değeri; β_0, sabit terim; β_j, j. açıklayıcı değişkenin katsayısı ve ε_i, i. gözlem değişkeninin hatası şeklinde tanımlanmaktadır. Bu kapsamda, L_p norm, L_1 norm ve L_∞ norm tahmin yöntemi sırasıyla aşağıdaki gibi ifade edilebilmektedir

$$L_p \to min\left(\sum_{i=1}^{n} |y_i - \hat{y}_i|^p\right)$$

$$L_1 \to min\left(\sum_{i=1}^{n} |y_i - \hat{y}_i|\right)$$

$$L_\infty \to min\, max\, |y_i - \hat{y}_i|.$$

L_p norm yöntemi altında regresyon modeli parametrelerini tahmin etmek ve hesaplama süresini en aza indirmek için zamanla çeşitli modeller geliştirilmiş ve bu modeller doğrusal programlama modellerine dönüştürülmüştür. Bu çalışmada ele alınacak doğrusal programlama modelleri ise sırasıyla aşağıda verilmiştir.

<u>*Model 1*</u>

L_p norm yönteminin özel hali olan L_1 normumun en çok bilinen doğrusal programlama modeli;

$$min \sum_{i=1}^{n} (d_i^+ + d_i^-)$$

$$s.t.$$

$$y_i - \left(b_0 + \sum_{j=1}^{m} x_{ij}b_j + d_i^+ + d_i^-\right) = 0 \;, \qquad i = 1,2, \dots n$$

$$d_i^+, d_i^- \geq 0$$

şeklindedir. Burada d_i^+ ve d_i^-, sırasıyla i. gözlem değeri için pozitif ve negatif sapmalarıdır.

<u>*Model 2*</u>

Gonin ve Money çalışmalarında Model 1'de verilen doğrusal programlama modelindeki sapma değişkenlerini yarıya indirmiş ve modeli tekrar formüle etmişlerdir [1]. Geliştirilen model;

$$min \sum_{i=1}^{n} d_i$$

$$s.t.$$

$$y_i - \left(b_0 + \sum_{j=1}^{m} x_{ij} b_j - d_i \right) \geq 0 \ , \qquad i = 1,2, \dots n$$

$$y_i - \left(b_0 + \sum_{j=1}^{m} x_{ij} b_j - d_i \right) \leq 0 \ , \qquad i = 1,2, \dots n$$

$$d_i \geq 0$$

şeklindedir. Burada d_i, i. gözlem değerinin sapmasıdır.

Model 3

Göreceli amaç fonksiyonlarının diğer geliştirilen amaç fonksiyonlara göre daha uygun olarak düşünülmesi nedeniyle geliştirilen model;

$w_i = 1/y_i \quad i = 1,2, \dots, n$ olmak üzere;

$$Min\ z = \sum_{j=1}^{n} (d_i^+ + d_i^-)\, w_i$$

$$s.t.$$

$$b_0 + \sum_{j=1}^{k} x_{ij} b_j + d_i^+ - d_i^- = y_i \quad i = 1,2, \dots, n$$

$$d_i^+, d_i^- \geq 0 \quad i = 1,2, \dots, n$$

şeklindedir. Burada d_i^+ ve d_i^-, sırasıyla i. gözlem değeri için pozitif ve negatif sapmalarıdır.

Model 4

Chebyshev yaklaşımı teorisinden türetilen L_∞ normunun doğrusal programlama modeli;

$$min\ d_\infty$$

$$s.t.$$

$$y_i - d_\infty \leq \sum_{j=1}^{m} x_{ij} b_j \leq y_i + d_\infty$$

$$d_\infty \geq 0$$

şeklindedir [1].

Ele alınan model yapılarındaki kısıt ve sapma değişkeni sayısındaki farklılıklardan dolayı modellerin parametre tahmini, hesaplama süresi ve açıklayıcılık katsayısı farklılık gösterebilmektedir. Bu nedenle farklı veri kümeleri için hangi modelin kullanılmasının uygun olacağını belirlemek için modelleri sadece

hesaplama süresi ya da açıklayıcılık katsayını açısından incelemek yerine birlikte incelenmesi daha uygun olacağı düşünülmektedir.
Bağımlı değişkenlerin değişkenler tarafından ne derece açıklandığını belirlemek önemlidir. En küçük kareler yönteminde kullanılan açıklayıcılık katsayısının farklı olarak L_1 norm ve L_∞ norm tahmin yöntemi için kullanılacak eşitlik yapısı;

$$R^2 = r(y,\hat{y})^2$$

şeklindedir [19].

3. BULGULAR

L_1 norm ve L_∞ norm yöntemlerinden geliştirilmiş çeşitli modellerin karşılaştırıldığı bu bölümde katsayıların tahmininin dışında açıklayıcılık katsayısı ve hesaplama süreleri açısından incelenmiştir. Karşılaştırılan regresyon modellerine ait parametre değerleri ve bu modellere ait örneklem büyüklükleri *Çizelge 1*'de verilmiştir.

Çizelge 1. *Parametre değerleri ve örneklem büyüklükleri*

Parametre Değerleri	Örneklem Büyüklükleri
$(B_0 = 2;\ B_1 = 1)$	n=10, 100, 1000
$(B_0 = 3;\ B_1 = 2;\ B_2 = 1)$	
$(B_0 = 4, B_1 = 3;\ B_2 = 2; B_3 = 1\ )$	
$(B_0 = 6;\ B_1 = 5;\ B_2 = 4; B_3 = 3; B_4 = 2; B_5 = 1\ )$	
$(B_0 = 11;\ B_1 = 10,; B_2 = 9; B_3 = 8; B_4 = 7; B_5 = 6; B_6 = 5;\ B_7 = 4;\ B_8 = 3; B_9 = 2; B_{10} = 1)$	

Bu karşılaştırmaların performansları değerlendirilmesi için, simülasyon çalışmasında çeşitli sayıda değişkene sahip modellerden farklı örneklem büyüklüğünde veri kümeleri üretilip, her bir yapı için 1000 bağımsız deney yapılmıştır. Ayrıca hata terimi dağılım standart normal dağılım olarak ele alınmıştır. Simülasyon sonuçları 16.0 GB RAM ve 2.60 GHz Intel(R) Core(TM) i7-9750H CPU tipi bir bilgisayar kullanılarak elde edilmiştir.

Çizelge 2'de verilen tek değişkenli model yapıları incelendiğinde, belirleyicilik katsayısı ve parametre tahmin değerleri tüm model yapılarında birbirlerine yakın çıkmıştır. Hesaplama süreleri açısından örneklem büyüklüğü n=10, 100, 1000 olduğu zaman en iyi performansı Model 4 göstermiştir. Örneklem büyüklüğü n=10 olduğu durumda modellere ait hesaplama süreleri birbirlerine yakın iken örneklem büyüklüğü arttıkça bu yakınlık farkı artmaya başlamıştır. Özellikle n=1000 örneklem büyüklüğünde Model 4'ün hesaplama süresi kendinden sonraki en iyi hesaplama süresime sahip diğer modelden yaklaşık olarak 3,16 kat daha hızlı olup büyük bir farklılık göstermiştir. Tek değişkenli modele ait hesaplama sürelerine ait grafik *Şekil 1*'de verilmiştir.

Çizelge 2. *Tek değişkenli veri kümesi için parametre tahmini, açıklayıcılık katsayıları ve hesaplama süresi*

$(B_0 = 2;\ B_1 = 1)$			
Model	$\boldsymbol{n = 10}$	$\boldsymbol{n = 100}$	$\boldsymbol{n = 1000}$
Model 1	$b_0 = 2{,}0904$	$b_0 = 2{,}0279$	$b_0 = 2{,}0015$
	$b_1 = 0{,}9994$	$b_1 = 0{,}9997$	$b_1 = 1{,}0000$
	$R^2 = 0{,}9791$	$R^2 = 0{,}9894$	$R^2 = 0{,}9901$
	Hesaplama Süresi=5,7519	*Hesaplama Süresi*=6,8189	*Hesaplama Süresi*=67,5326
Model 2	$b_0 = 2{,}0600$	$b_0 = 1{,}9513$	$b_0 = 2{,}0065$

	$b_1 = 0{,}9994$	$b_1 = 1{,}0004$	$b_1 = 0{,}9999$
	$R^2 = 0{,}9898$	$R^2 = 0{,}9905$	$R^2 = 0{,}9908$
	Hesaplama Süresi=5,5632	*Hesaplama Süresi=7,3233*	*Hesaplama Süresi=107,2357*
Model 3	$b_0 = 2{,}0666$	$b_0 = 2{,}0038$	$b_0 = 1{,}9944$
	$b_1 = 0{,}9994$	$b_1 = 0{,}9999$	$b_1 = 1{,}0000$
	$R^2 = 0{,}9952$	$R^2 = 0{,}9905$	$R^2 = 0{,}9911$
	Hesaplama Süresi=5,5059	*Hesaplama Süresi=6,8160*	*Hesaplama Süresi=63,3877*
Model 4	$b_0 = 1{,}9973$	$b_0 = 1{,}9259$	$b_0 = 1{,}9436$
	$b_1 = 0{,}9997$	$b_1 = 1{,}0009$	$b_1 = 1{,}0006$
	$R^2 = 0{,}9917$	$R^2 = 0{,}9919$	$R^2 = 0{,}9913$
	Hesaplama Süresi=5,4670	*Hesaplama Süresi=5,9009*	*Hesaplama Süresi=20,0407*

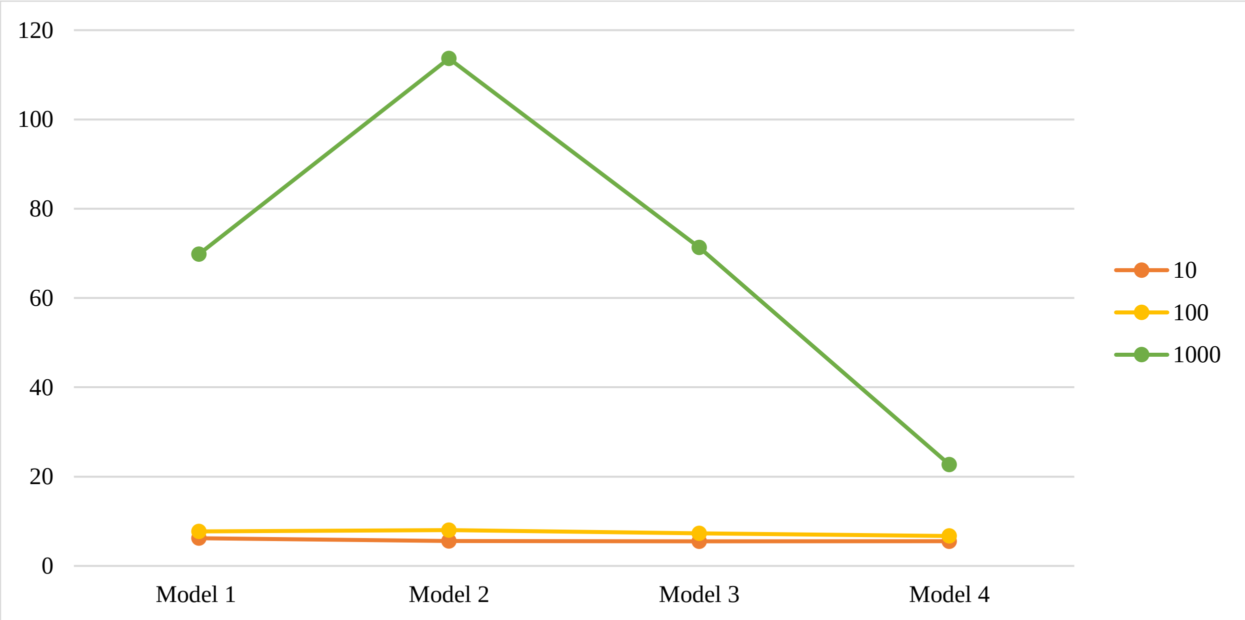
Şekil 1. *Tek değişkenli model yapıları için hesaplama süresi*

Çizelge 3'te verilen iki değişkenli model yapıları incelendiğinde, belirleyicilik katsayısı ve parametre tahmin değerleri tüm model yapılarında birbirlerine yakın çıkmıştır. Hesaplama süreleri açısından örneklem büyüklüğü n=10, 100, 1000 olduğu zaman en iyi performansı Model 4 göstermiştir. Örneklem büyüklüğü n=10 olduğu durumda modellere ait hesaplama süreleri birbirlerine yakın iken örneklem büyüklüğü arttıkça bu yakınlık farkı artmaya başlamıştır. Özellikle n=1000 örneklem büyüklüğünde Model 4'ün hesaplama süresi kendinden sonraki en iyi hesaplama süresine sahip diğer modelden yaklaşık olarak 3,07 kat daha hızlı olup büyük bir farklılık göstermiştir. İki değişkenli modele ait hesaplama sürelerine ait grafik *Şekil 2*'de verilmiştir.

Çizelge 3. *İki değişkenli veri kümesi için parametre tahmini, açıklayıcılık katsayıları ve hesaplama süresi*

$(B_0 = 3;\ B_1 = 2;\ B_2 = 1)$			
Model	$\boldsymbol{n = 10}$	$\boldsymbol{n = 100}$	$\boldsymbol{n = 1000}$
Model 1	$b_0 = 3{,}1268$	$b_0 = 3{,}0118$	$b_0 = 3{,}0238$
	$b_1 = 1{,}9995$	$b_1 = 2{,}0005$	$b_1 = 1{,}9997$
	$b_2 = 0{,}9996$	$b_2 = 0{,}9997$	$b_2 = 1{,}0001$
	$R^2 = 0{,}9979$	$R^2 = 0{,}9986$	$R^2 = 0{,}9988$
	Hesaplama Süresi=6,1967	*Hesaplama Süresi=7,7171*	*Hesaplama Süresi=69,8322*
Model 2	$b_0 = 2{,}9847$	$b_0 = 3{,}0014$	$b_0 = 3{,}0063$
	$b_1 = 1{,}9987$	$b_1 = 1{,}9996$	$b_1 = 2{,}0001$
	$b_2 = 1{,}0012$	$b_2 = 1{,}0003$	$b_2 = 0{,}9999$

	$R^2 = 0{,}9986$	$R^2 = 0{,}9989$	$R^2 = 0{,}9988$
	Hesaplama Süresi=5,5659	*Hesaplama Süresi=8,0185*	*Hesaplama Süresi=113,6476*
Model 3	$b_0 = 3{,}0675$	$b_0 = 2{,}9916$	$b_0 = 3{,}0019$
	$b_1 = 2{,}0005$	$b_1 = 1{,}9997$	$b_1 = 2{,}0001$
	$b_2 = 0{,}9992$	$b_2 = 1{,}0002$	$b_2 = 0{,}9999$
	$R^2 = 0{,}9984$	$R^2 = 0{,}9987$	$R^2 = 0{,}9988$
	Hesaplama Süresi=5,5381	*Hesaplama Süresi=7,2969*	*Hesaplama Süresi=71,3415*
Model 4	$b_0 = 2{,}7137$	$b_0 = 2{,}9785$	$b_0 = 3{,}1478$
	$b_1 = 2{,}0000$	$b_1 = 1{,}9994$	$b_1 = 1{,}9985$
	$b_2 = 1{,}0018$	$b_2 = 1{,}0005$	$b_2 = 0{,}9999$
	$R^2 = 0{,}9960$	$R^2 = 0{,}9988$	$R^2 = 0{,}9987$
	Hesaplama Süresi=5,5380	*Hesaplama Süresi=6,6941*	*Hesaplama Süresi=22,7218*



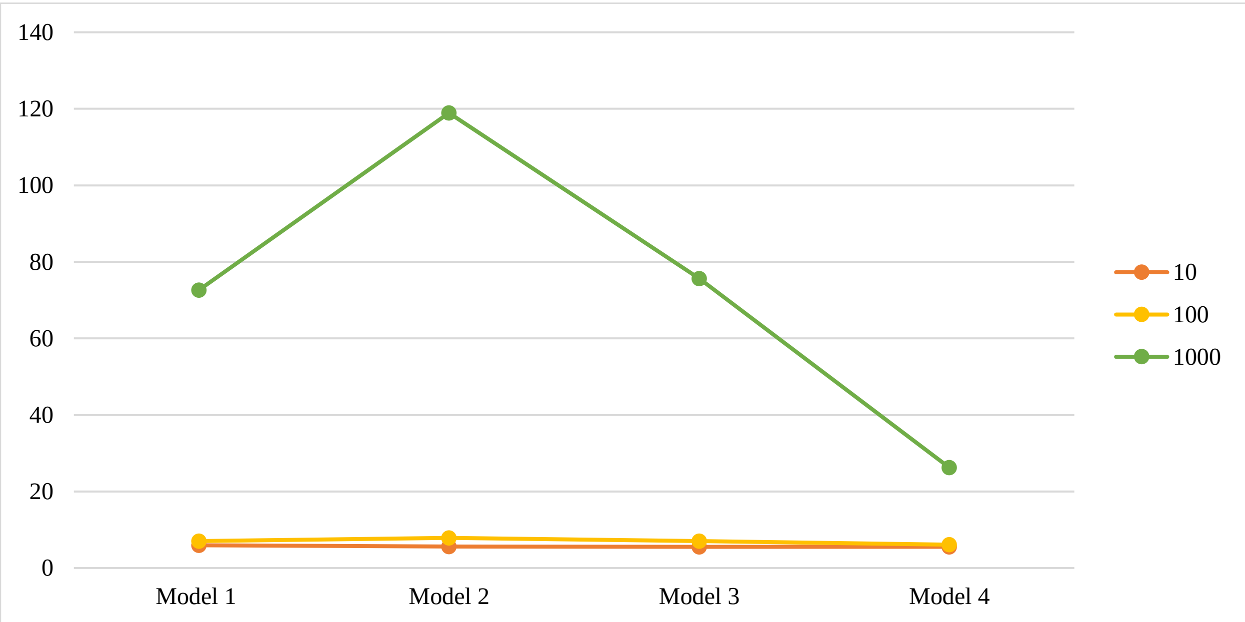
Şekil 2. *İki değişkenli model yapıları için hesaplama süresi*

Çizelge 4'te verilen üç değişkenli model yapıları incelendiğinde, belirleyicilik katsayısı ve parametre tahmin değerleri tüm model yapılarında birbirlerine yakın çıkmıştır. Hesaplama süreleri açısından örneklem büyüklüğü n=10, 100, 1000 olduğu zaman en iyi performansı Model 4 göstermiştir. Örneklem büyüklüğü n=10 olduğu durumda modellere ait hesaplama süreleri birbirlerine yakın iken örneklem büyüklüğü arttıkça bu yakınlık farkı artmaya başlamıştır. Özellikle n=1000 örneklem büyüklüğünde Model 4'ün hesaplama süresi kendinden sonraki en iyi hesaplama süresine sahip diğer modelden yaklaşık olarak 2,77 kat daha hızlı olup büyük bir farklılık göstermiştir. Üç değişkenli modele ait hesaplama sürelerine ait grafik *Şekil 3*'te verilmiştir.

Çizelge 4. *Üç değişkenli veri kümesi için parametre tahmini, açıklayıcılık katsayıları ve hesaplama süresi*

$(B_0 = 4, B_1 = 3;\ B_2 = 2; B_3 = 1)$			
Model	$\boldsymbol{n = 10}$	$\boldsymbol{n = 100}$	$\boldsymbol{n = 1000}$
Model 1	$b_0 = 4{,}0590$	$b_0 = 4{,}0916$	$b_0 = 4{,}0042$
	$b_1 = 3{,}0024$	$b_1 = 3{,}0005$	$b_1 = 3{,}0001$
	$b_2 = 1{,}9993$	$b_2 = 1{,}9992$	$b_2 = 1{,}9999$
	$b_3 = 0{,}9991$	$b_3 = 0{,}9999$	$b_3 = 1{,}0000$
	$R^2 = 0{,}9994$	$R^2 = 0{,}9996$	$R^2 = 0{,}9996$
	Hesaplama Süresi=5,9429	*Hesaplama Süresi=7,0558*	*Hesaplama Süresi=72,6555*

Model 2	$b_0 = 4{,}2379$	$b_0 = 3{,}9639$	$b_0 = 4{,}0053$
	$b_1 = 3{,}0010$	$b_1 = 3{,}0000$	$b_1 = 2{,}9998$
	$b_2 = 1{,}9994$	$b_2 = 1{,}9998$	$b_2 = 2{,}0001$
	$b_3 = 0{,}9988$	$b_3 = 1{,}0003$	$b_3 = 1{,}0000$
	$R^2 = 0{,}9996$	$R^2 = 0{,}9997$	$R^2 = 0{,}9996$
	Hesaplama Süresi=5,5848	*Hesaplama Süresi=7,8741*	*Hesaplama Süresi=118,9213*
Model 3	$b_0 = 4{,}1388$	$b_0 = 4{,}0157$	$b_0 = 3{,}9734$
	$b_1 = 2{,}9981$	$b_1 = 3{,}0002$	$b_1 = 3{,}0000$
	$b_2 = 1{,}9999$	$b_2 = 2{,}0002$	$b_2 = 2{,}0000$
	$b_3 = 1{,}0004$	$b_3 = 0{,}9997$	$b_3 = 1{,}0001$
	$R^2 = 0{,}9995$	$R^2 = 0{,}9996$	$R^2 = 0{,}9996$
	Hesaplama Süresi=5,5558	*Hesaplama Süresi=7,0443*	*Hesaplama Süresi=75,6436*
Model 4	$b_0 = 4{,}3402$	$b_0 = 3{,}8405$	$b_0 = 4{,}0035$
	$b_1 = 2{,}9972$	$b_1 = 2{,}9998$	$b_1 = 3{,}0002$
	$b_2 = 1{,}9990$	$b_2 = 1{,}9996$	$b_2 = 2{,}0001$
	$b_3 = 1{,}0005$	$b_3 = 1{,}0012$	$b_3 = 0{,}9998$
	$R^2 = 0{,}9997$	$R^2 = 0{,}9998$	$R^2 = 0{,}9996$
	Hesaplama Süresi=5,5465	*Hesaplama Süresi=6,0968*	*Hesaplama Süresi=26,2545*



Şekil 3. *Üç değişkenli model yapıları için hesaplama süresi*

Çizelge 5'te verilen beş değişkenli model yapıları incelendiğinde, belirleyicilik katsayısı ve parametre tahmin değerleri tüm model yapılarında birbirlerine yakın çıkmıştır. Hesaplama süreleri açısından örneklem büyüklüğü n=10 olduğu zaman en iyi performansı Model 3, n=100, 1000 olduğu zaman Model 4 göstermiştir. Örneklem büyüklüğü n=10 olduğu durumda modellere ait hesaplama süreleri birbirlerine yakın iken örneklem büyüklüğü arttıkça bu yakınlık farkı artmaya başlamıştır. Özellikle n=1000 örneklem büyüklüğünde Model 4'ün hesaplama süresi kendinden sonraki en iyi hesaplama süresine sahip diğer modelden yaklaşık olarak 2,41 kat daha hızlı olup büyük bir farklılık göstermiştir. Beş değişkenli modele ait hesaplama sürelerine ait grafik *Şekil 4*'te verilmiştir.

Çizelge 5. *Beş değişkenli veri kümesi için parametre tahmini, açıklayıcılık katsayıları ve hesaplama süresi*

$(B_0 = 6;\ B_1 = 5;\ B_2 = 4; B_3 = 3; B_4 = 2; B_5 = 1\ )$			
Model	$\boldsymbol{n = 10}$	$\boldsymbol{n = 100}$	$\boldsymbol{n = 1000}$
Model 1	$b_0 = 6{,}1367$	$b_0 = 6{,}0156$	$b_0 = 6{,}0090$
	$b_1 = 4{,}9994$	$b_1 = 5{,}0000$	$b_1 = 4{,}9999$
	$b_2 = 4{,}0010$	$b_2 = 4{,}0002$	$b_2 = 4{,}0001$
	$b_3 = 2{,}9986$	$b_3 = 2{,}9997$	$b_3 = 2{,}9999$
	$b_4 = 2{,}0001$	$b_4 = 2{,}0002$	$b_4 = 2{,}0000$
	$b_5 = 1{,}0001$	$b_5 = 0{,}9999$	$b_5 = 1{,}0000$
	$R^2 = 0{,}9999$	$R^2 = 0{,}9999$	$R^2 = 0{,}9999$
	Hesaplama Süresi=5,5958	*Hesaplama Süresi=7,5807*	*Hesaplama Süresi=77,1659*
Model 2	$b_0 = 5{,}8639$	$b_0 = 5{,}9751$	$b_0 = 5{,}9703$
	$b_1 = 4{,}9987$	$b_1 = 5{,}0000$	$b_1 = 5{,}0000$
	$b_2 = 3{,}9992$	$b_2 = 4{,}0001$	$b_2 = 4{,}0000$
	$b_3 = 2{,}9975$	$b_3 = 3{,}0002$	$b_3 = 3{,}0001$
	$b_4 = 1{,}9994$	$b_4 = 1{,}9999$	$b_4 = 2{,}0001$
	$b_5 = 1{,}0035$	$b_5 = 1{,}0000$	$b_5 = 1{,}0000$
	$R^2 = 0{,}9999$	$R^2 = 0{,}9999$	$R^2 = 0{,}9999$
	Hesaplama Süresi=5,5538	*Hesaplama Süresi=8,0252*	*Hesaplama Süresi=127,7422*
Model 3	$b_0 = 6{,}0426$	$b_0 = 5{,}9756$	$b_0 = 6{,}0269$
	$b_1 = 5{,}0025$	$b_1 = 5{,}0000$	$b_1 = 4{,}9997$
	$b_2 = 4{,}0000$	$b_2 = 4{,}0002$	$b_2 = 3{,}9999$
	$b_3 = 2{,}9981$	$b_3 = 3{,}0000$	$b_3 = 3{,}0000$
	$b_4 = 2{,}0016$	$b_4 = 2{,}0000$	$b_4 = 2{,}0000$
	$b_5 = 0{,}9990$	$b_5 = 1{,}0000$	$b_5 = 1{,}0000$
	$R^2 = 0{,}9999$	$R^2 = 0{,}9999$	$R^2 = 0{,}9999$
	Hesaplama Süresi=5,5497	*Hesaplama Süresi=7,4646*	*Hesaplama Süresi=77,6776*
Model 4	$b_0 = 5{,}9598$	$b_0 = 6{,}0407$	$b_0 = 6{,}0375$
	$b_1 = 4{,}9997$	$b_1 = 4{,}9995$	$b_1 = 4{,}9999$
	$b_2 = 3{,}9994$	$b_2 = 3{,}9998$	$b_2 = 3{,}9999$
	$b_3 = 3{,}0001$	$b_3 = 2{,}9994$	$b_3 = 2{,}9997$
	$b_4 = 2{,}0002$	$b_4 = 2{,}0001$	$b_4 = 1{,}9999$
	$b_5 = 1{,}0003$	$b_5 = 1{,}0005$	$b_5 = 1{,}0002$
	$R^2 = 0{,}9999$	$R^2 = 0{,}9999$	$R^2 = 0{,}9999$
	Hesaplama Süresi=6,3072	*Hesaplama Süresi=6,3648*	*Hesaplama Süresi=32,0031*

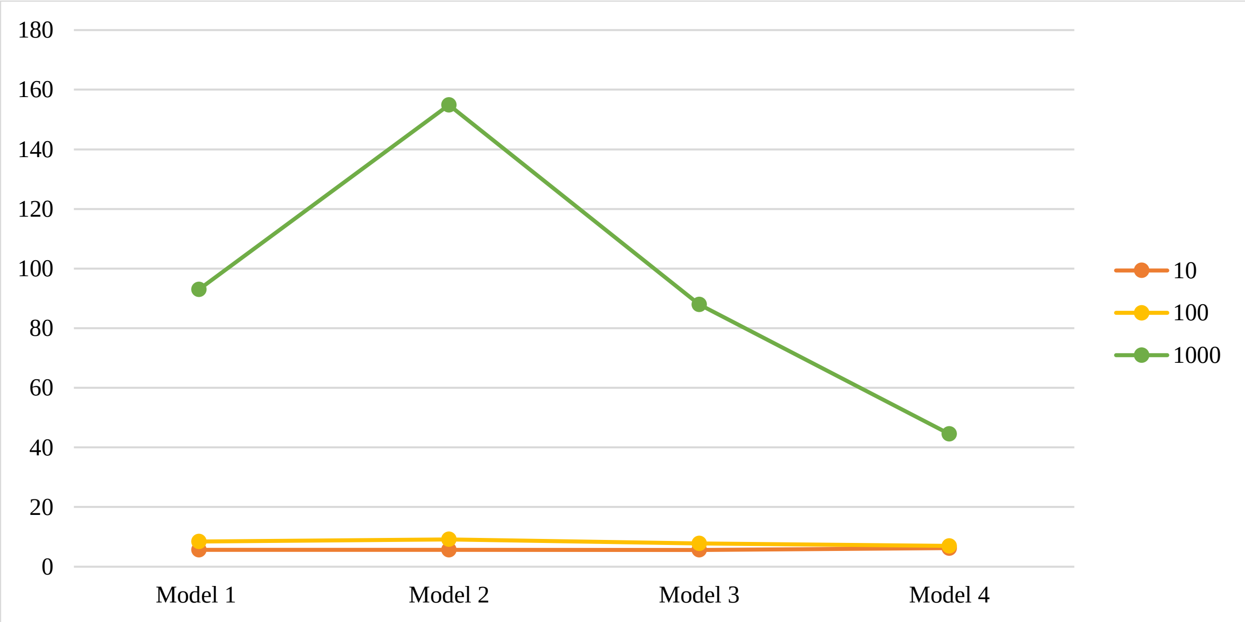
Şekil 4. *Beş değişkenli model yapıları için hesaplama süresi*

Çizelge 6’da verilen on değişkenli model yapıları incelendiğinde, belirleyicilik katsayısı ve parametre tahmin değerleri tüm model yapılarında birbirlerine yakın çıkmıştır. Sadece sabit terime ait katsayı değerleri n=10 örneklem büyüklüğüne sahip modellerde çok farklı çıkmıştır. Hesaplama süreleri açısından örneklem büyüklüğü n=10 olduğu zaman en iyi performansı Model 3, n=100, 1000 olduğu zaman Model 4 göstermiştir. Özellikle n=1000 örneklem büyüklüğünde Model 4’ün hesaplama süresi kendinden sonraki en iyi hesaplama süresi sahip diğer modelden yaklaşık olarak 1,97 kat daha hızlı olup büyük bir farklılık göstermiştir. On değişkenli modele ait hesaplama sürelerine ait grafik *Şekil 5*’te verilmiştir.

Çizelge 6. *On değişkenli veri kümesi için parametre tahmini, açıklayıcılık katsayıları ve hesaplama süresi*

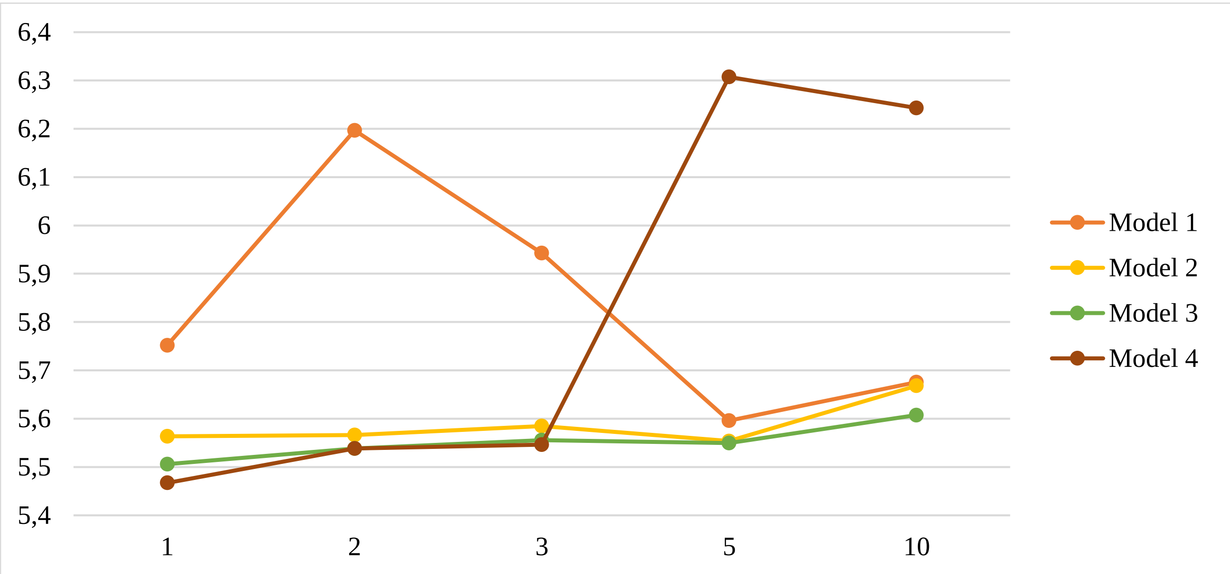
$(B_0 = 11;\ B_1 = 10,;B_2 = 9;B_3 = 8;B_4 = 7;B_5 = 6;B_6 = 5;\ B_7 = 4;\ B_8 = 3;B_9 = 2;B_{10} = 1)$			
Model	$\boldsymbol{n = 10}$	$\boldsymbol{n = 100}$	$\boldsymbol{n = 1000}$
Model 1	$b_0 = 172,9723$	$b_0 = 10,9550$	$b_0 = 11,0051$
	$b_1 = 10,2733$	$b_1 = 9,9998$	$b_1 = 9,9999$
	$b_2 = 9,1598$	$b_2 = 9,0000$	$b_2 = 8,9999$
	$b_3 = 7,8593$	$b_3 = 8,0003$	$b_3 = 7,9999$
	$b_4 = 7,0250$	$b_4 = 6,9998$	$b_4 = 7,0001$
	$b_5 = 6,0935$	$b_5 = 6,0001$	$b_5 = 6,0000$
	$b_6 = 5,0711$	$b_6 = 5,0002$	$b_6 = 5,0001$
	$b_7 = 3,9273$	$b_7 = 4,0001$	$b_7 = 4,0000$
	$b_8 = 2,6773$	$b_8 = 2,9999$	$b_8 = 3,0001$
	$b_9 = 1,8393$	$b_9 = 1,9997$	$b_9 = 2,0000$
	$b_{10} = 1,0218$	$b_{10} = 1,0002$	$b_{10} = 0,9999$
	$R^2 = 0,9999$	$R^2 = 0,9999$	$R^2 = 0,9999$
	Hesaplama Süresi=5,6753	*Hesaplama Süresi=8,4415*	*Hesaplama Süresi=93,0474*
Model 2	$b_0 = 154,3132$	$b_0 = 10,9081$	$b_0 = 11,0232$
	$b_1 = 10,1359$	$b_1 = 9,9997$	$b_1 = 9,9998$
	$b_2 = 9,1690$	$b_2 = 8,9999$	$b_2 = 9,0000$
	$b_3 = 8,0496$	$b_3 = 8,0000$	$b_3 = 8,0001$
	$b_4 = 7,0271$	$b_4 = 6,9998$	$b_4 = 7,0001$
	$b_5 = 5,9985$	$b_5 = 6,0000$	$b_5 = 6,0000$
	$b_6 = 5,0257$	$b_6 = 4,9996$	$b_6 = 5,0000$
	$b_7 = 3,9901$	$b_7 = 4,0004$	$b_7 = 4,0000$
	$b_8 = 2,6650$	$b_8 = 3,0001$	$b_8 = 2,9999$
	$b_9 = 1,8349$	$b_9 = 2,0002$	$b_9 = 1,9999$
	$b_{10} = 1,0537$	$b_{10} = 1,0001$	$b_{10} = 1,0001$
	$R^2 = 0,9999$	$R^2 = 0,9999$	$R^2 = 0,9999$
	Hesaplama Süresi=5,6679	*Hesaplama Süresi=9,1513*	*Hesaplama Süresi=154,8841*
Model 3	$b_0 = 142,0238$	$b_0 = 11,0256$	$b_0 = 11,0217$
	$b_1 = 10,4050$	$b_1 = 10,0003$	$b_1 = 9,9999$
	$b_2 = 9,0898$	$b_2 = 9,0002$	$b_2 = 8,9999$
	$b_3 = 7,9351$	$b_3 = 7,9996$	$b_3 = 7,9999$
	$b_4 = 7,1129$	$b_4 = 7,0003$	$b_4 = 7,0001$
	$b_5 = 6,0637$	$b_5 = 6,0002$	$b_5 = 6,0000$
	$b_6 = 5,0449$	$b_6 = 4,9998$	$b_6 = 4,9999$
	$b_7 = 4,0265$	$b_7 = 4,0000$	$b_7 = 3,9999$
	$b_8 = 2,6865$	$b_8 = 3,0001$	$b_8 = 3,0000$
	$b_9 = 1,7631$	$b_9 = 1,9998$	$b_9 = 2,0001$
	$b_{10} = 1,0281$	$b_{10} = 1,0000$	$b_{10} = 1,0001$
	$R^2 = 0,9999$	$R^2 = 0,9999$	$R^2 = 0,9999$
	Hesaplama Süresi=5,6074	*Hesaplama Süresi=7,7538*	*Hesaplama Süresi=87,9371*
Model 4	$b_0 = 166,1652$	$b_0 = 11,0749$	$b_0 = 11,0034$
	$b_1 = 10,0849$	$b_1 = 10,0008$	$b_1 = 10,0004$
	$b_2 = 9,1210$	$b_2 = 9,0004$	$b_2 = 8,9997$
	$b_3 = 7,9861$	$b_3 = 7,9991$	$b_3 = 8,0001$

	$b_4 = 7{,}1162$	$b_4 = 7{,}0006$	$b_4 = 7{,}0004$
	$b_5 = 6{,}0022$	$b_5 = 6{,}0001$	$b_5 = 6{,}0002$
	$b_6 = 5{,}0820$	$b_6 = 5{,}0003$	$b_6 = 4{,}9998$
	$b_7 = 3{,}9281$	$b_7 = 4{,}0002$	$b_7 = 3{,}9995$
	$b_8 = 2{,}7599$	$b_8 = 3{,}0001$	$b_8 = 3{,}0000$
	$b_9 = 1{,}8266$	$b_9 = 2{,}0000$	$b_9 = 2{,}0002$
	$b_{10} = 0{,}9749$	$b_{10} = 0{,}9993$	$b_{10} = 0{,}9999$
	$R^2 = 0{,}9999$	$R^2 = 0{,}9999$	$R^2 = 0{,}9999$
	Hesaplama Süresi=6,2431	*Hesaplama Süresi=6,9802*	*Hesaplama Süresi=44,5412*



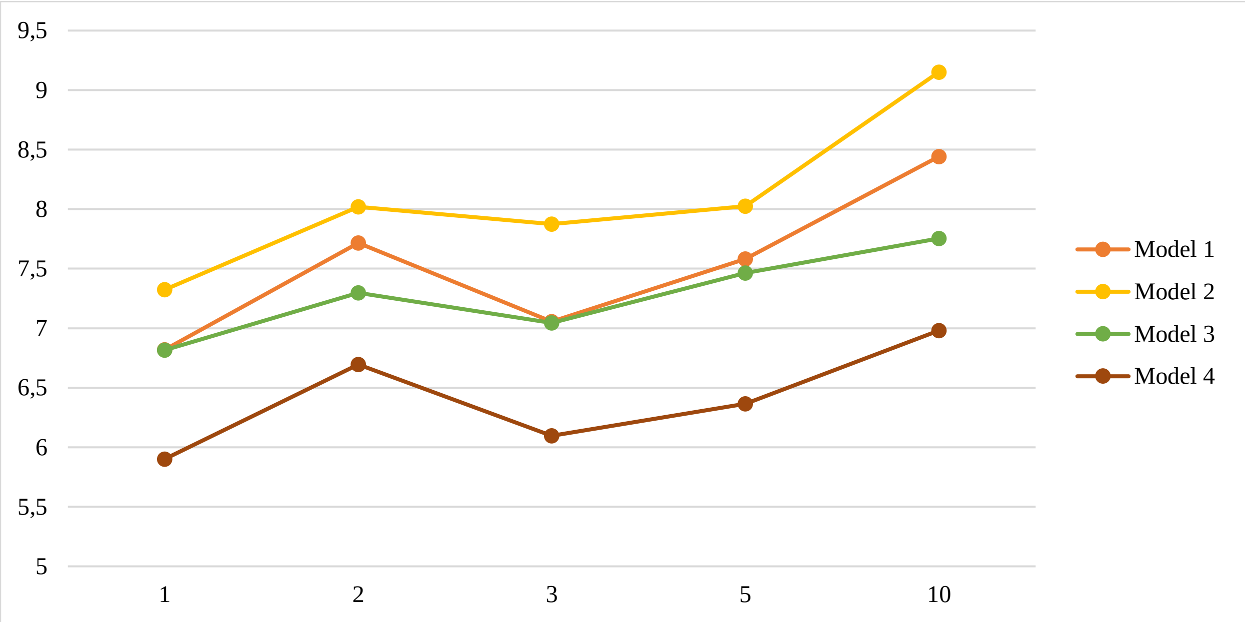
Şekil 5. *On değişkenli model yapıları için hesaplama süresi*

Her bir örneklem büyüklüğü açısından, farklı değişken sayılarındaki veri kümelerine ilişkin hesaplama sürelerine ait değişimi gösteren grafikler ise *Şekil 6, Şekil 7* ve *Şekil 8*'de verilmiştir.



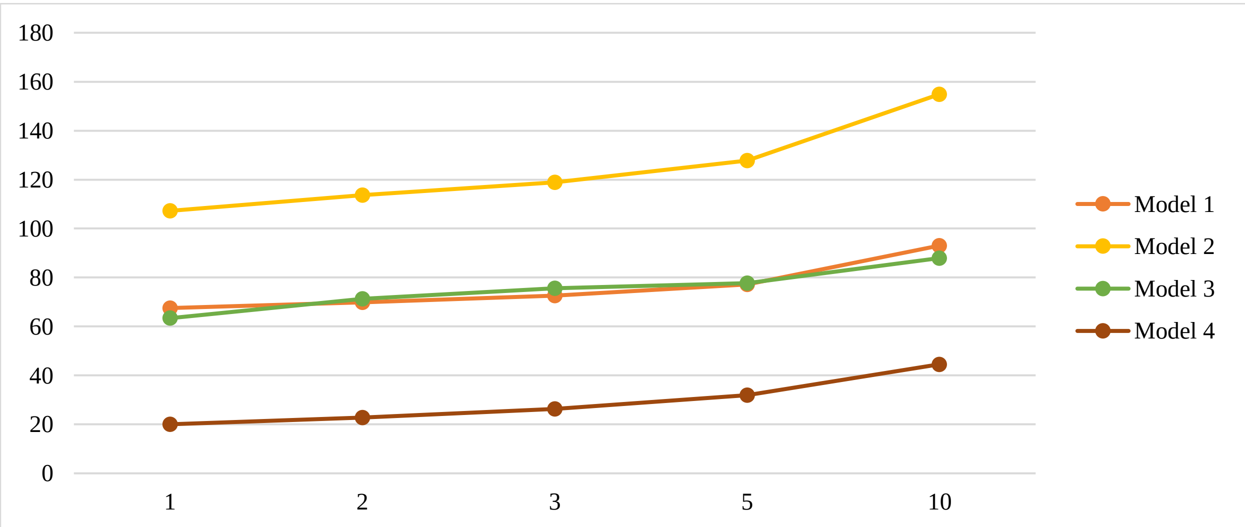
Şekil 6. *n=10 için değişken sayılarına ilişkin hesaplama süresi*

Şekil 6'da verilen n=10 örneklem büyüklüğüne sahip olan veri kümelerinde Model 4, değişken sayısı az iken en iyi hesaplama sürelerinden birine sahip iken değişken sayısı arttıkça bu özelliğini kaybetmeye başlamaktadır. Buna karşın Model 1'de ise değişken sayısı az iken en kötü hesaplama süresi performansına sahip model iken değişken sayısı arttıkça daha iyi bir hesaplama süresi performansı özelliği kazanmaya başlamış fakat hesaplama süresi en iyi model olamamıştır.



Şekil 7. *n=100 için değişken sayılarına ilişkin hesaplama süresi*

Şekil 7'de verilen n=100 örneklem büyüklüğüne sahip olan veri kümelerinde, değişken sayısının üç olduğu durum hariç değişken sayısı arttıkça modellerin hesaplama sürelerinde orantılı bir şekilde artmaya başlamıştır. Değişken sayısı üç olduğunda tüm modellerin hesaplama sürelerinde bir azalış meydana gelse de artan değişken sayısı ile bu modellere ait hesaplama süreleri de artmaya başlamıştır. Model 4 ele alınan tüm değişken sayılarında en iyi hesaplama süresine sahip iken Model 2 ise en kötü hesaplama sayısına sahip modeller olmuşlardır.



Şekil 8. *n=1000 için değişken sayılarına ilişkin hesaplama süresi*

Şekil 8'de verilen n=1000 örneklem büyüklüğüne sahip olan veri kümelerinde değişken sayısı arttıkça modellerin hesaplama sürelerinde orantılı bir şekilde artmaya başlamıştır. Model 4 ele alınan tüm değişken sayılarında en iyi hesaplama süresine sahip iken Model 2 ise en kötü hesaplama sayısına sahip modeller olmuşlardır. Ayrıca Model 1 ve Model 3'e ait hesaplama süreleri, farklı değişken sayılarında birbirlerine karşı üstünlük kurmuşlardır.

4. TARTIŞMA

Doğrusal ve doğrusal olmayan regresyon modellerde parametreleri tahmin etmek için kullanılan L_p normunun özel bir hali olan L_1 normu ve L_∞ norm modelleri ile elde edilen sonuçlar açıklayıcılık katsayısı açısından incelendiğinde, örneklem büyüklüğü ve değişken sayısı ne olursa olsun açıklayıcılık katsayısı tüm modellerde neredeyse aynı çıkmıştır. Parametre tahmin değerleri açısından incelendiğinde, küçük örneklem büyüklüklerinde sahip veri kümelerinde değişken sayısı arttıkça sabit terime ait katsayının tahminde farklılıklar oluşmaktadır. Buna rağmen, örneklem büyüklüğü büyüdükçe sabit terime ait parametre, tahmin edilmek istenen değere yakınlaşmaktadır. Belirleyicilik katsayısı ise tüm model yapılarında birbirlerine yakın çıkmıştır. Bu çalışmada öne çıkan modellerin hesaplama süresi açısı incelendiğinde, genel olarak en iyi hesaplama süresi sahip olan Model 4'ün, küçük örneklem büyüklüğüne sahip veri kümelerinde değişken sayısı arttıkça bu özelliğini kaybettiği görülmüştür. Ayrıca çalışmada ele alınan ve Model 4'ün hesaplama süresinde ön plana çıktığı n=1000 örneklem büyüklüğüne sahip veri kümelerinde değişken sayısı arttıkça, Model 4'ten sonra gelen en iyi hesaplama süresine sahip modellere karşı avantajının bir miktar azaldığı görülse de ele alınan tüm değişken sayılarında en iyi hesaplama süresine sahip olan modeldir.

ÇIKAR ÇATIŞMASI/ÇAKIŞMASI BİLDİRİMİ

Yazarlar arasında çıkar çatışması/çakışması bulunmamaktadır.

KAYNAKLAR

[1] Gonin, R. and Money, A. H. (1989). Nonlinear Lp-norm estimation. *Marcel Dekker, Inc.*, 1-154.

[2] Charnes, A., Cooper, W. W., and Ferguson, R. O. (1955). Optimal estimation of executive compensation by linear programming. *Management science*, 1(2), 138-151.

[3] Wagner, H. M. (1959). Linear programming techniques for regression analysis. *Journal of the American Statistical Association*, 54(285), 206-212.

[4] Osborne, M. R. and Watson, G. A. (1969). An algorithm for minimax approximation in the nonlinear case. *The Computer Journal*, 12(1), 63-68.

[5] Anderson, D. H. and Osborne, M. R. (1977). Discrete, nonlinear approximation problems in polyhedral norms. *Numerische Mathematik*, 28(2), 157-170.

[6] Barrodale, I. and Phillips, C. (1975). Solution of an overdetermined system of linear equations in the Chebychev norm. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 1(3), 264-270.

[7] Armstrong, R. D., Frome, E. L. and Kung, D. S. (1979). A revised simplex algorithm for the absolute deviation curve fitting problem. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 8(2), 175-190.

[8] Murray, W. and Overton, M. L. (1980). A projected Lagrangian algorithm for nonlinear minimax optimization. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 1(3), 345-370.

[9] Overton, M. (1982). Algorithms for nonlinear L1 and L∞ fitting. In Nonlinear optimization, *Academic Press*, 91-102.

[10] Dielman, T. E. (1986). A comparison of forecasts from least absolute value and least squares regression. *Journal of Forecasting*, 5(3), 189-195.

[11] Gentle, J.E., Narula, S.C., and Sposito, V.A. (1987). Algorithms for unconstrained L1 linear regression. *In: Dodge, Y. (Ed.), Statistical Data Analysis Based on the L1- Norm and Related Methods*, 83–94.

[12] Narula, S. C., Sposito, V. A., and Gentle, J. E. (1991). Comparison of computer programs for simple linear L1 regression. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 39(1-2), 63-68.

[13] Soliman, S. A., Christensen, G. S., and Rouhi, A. (1988). A new technique for curve fitting based on minimum absolute deviations. *Computational Statistics and Data Analysis*, 6(4), 341-351.

[14] Seneta, E. and Steiger, W. L. (1984). A new LAD curve-fitting algorithm: slightly overdetermined equation systems in L1. *Discrete Applied Mathematics*, 7(1), 79-91.

[15] Narula, S. C. and Wellington, J. F. (1988). An efficient algorithm for the MSAE and the MMAE regression problems. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing,* 9(4), 717-727.
[16] Dielman, T. E. and Rose, E. L. (1994). Forecasting in least absolute value regression with autocorrelated errors: a small-sample study. *International Journal of Forecasting,* 10(4), 539-547.
[17] Hong, C. S. and Choi, H. J. (1997). On L1 regression coeficients. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 26(2), 531-537.
[18] Portnoy, S. and Koenker, R. (1997). The Gaussian hare and the Laplacian tortoise: computability of squared-error versus absolute-error estimators. *Statistical Science,* 12(4), 279-300.
[19] Weisberg, S. (2005). Applied Linear Regression. *Wiley,* 284-286.