ISSN 2757-5543 GÜFFD 1. Cilt (1-2): 101-108 (2020) DOI: 10.5281/zenodo.4398874

Gazi Üniversitesi Fen Fakültesi Dergisi

http://sci-fac-j.gazi.edu.tr/

Genelleştirilmiş Çoğul Değerli γ-Büzülmeler için Sabit Nokta Teoremleri

Müzeyyen Sangurlu Sezen*

Gazi Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, 06500, Ankara, Türkiye

Öne Çıkanlar

- Çalışmada, sabit nokta teoremi ile ilgili yeni tanımlar verilmiştir.
- Yeni tanımlarla birlikte daha önce yapılan bazı sonuçlar genelleştirilmiştir.
- Fuzzy metrik uzaylarda yeni sonuçlar elde edilmişttir.

Makale Bilgileri

Geliş: 01/12/2020
Kabul: 14/12/2020

Anahtar Kelimeler
Çoğul değerli γ-büzülme,
Fuzzy metrik,
Sabit nokta

Özet

Bu çalışmada, γ-büzülme ve γ-zayıf büzülmeyi kullanarak genelleştirilmiş çoğul değerli γ-tip-I-büzülme ve γ-tip-II-büzülme olarak adlandırılan iki yeni büzülme tanımlanmıştır. Fuzzy metrik uzaylarda genelleştirilmiş çoğul değerli γ-büzülme dönüşümleri için bazı sabit nokta teoremleri elde edilmiştir. Elde edilen sonuçların geçerliliğini göstermek için bir örnek verilmiştir.

Fixed Point Theorems for Generalized Multivalued γ-Contractions

Highlights

- In this work, definitions related to fixed point theory are given.
- Some previous results have been generalized with new definitions.
- New results have been obtained in fuzzy metric spaces.

Article Info

Received: 01/12/2020
Accepted: 14/12/2020

Keywords
Multivalued γ-contractions,
Fuzzy metric,
Fixed point

Abstract

In this work, we introduce new generalized multivalued contractions using γ-contractions and γ-weak contractions. We prove some fixed point theorems for mappings providing generalized multivalued γ-contractions in fuzzy metric spaces. Also, we establish an example to illustrate the validity of the results obtained in the paper.

GÜFFD
GAZİ ÜNİVERSİTESİ FEN FAKÜLTESİ DERGİSİ

Araştırma Makale

* Sorumlu Yazar/Corresponding Author: Müzeyyen Sangurlu Sezen, muzeyyensangurlu@gazi.edu.tr

1. GİRİŞ

Deng [1], fuzzy metrik uzay konusunu bulduktan sonra, sabit nokta teorisi konusu araştırmacıların ilgi odağı haline gelmiştir [2-6]. Fuzzy metrik uzaylarda özellikle Banach [7] tarafından bulunan sabit nokta teorisinin temel büzülme prensibinden yola çıkılarak birçok yeni büzülmeler elde edilmiş ve bunlar genelleştirilmiştir [8-10]. Diğer taraftan, fuzzy sabit nokta teorisinin önemli konularından biri olan Hausdorff fuzzy metriği konusu Rodríguez-López ve Romaguera tarafından üretilmiştir [11]. George ve Veeramani nin tanımladığı fuzzy metrik uzayın boş olmayan kompakt alt kümeleri kümesi üzerinde inşa etmişlerdir ve Hausdorff fuzzy metriğinin bazı özelliklerini vermişlerdir [12]. Sonra, Hausdorff fuzzy metrik özellikleri kullanılarak fuzzy metrik uzayda çoğul değerli büzülmeler için bazı sonuçlar elde edilmiştir [13-18].

Bu çalışmada, daha önce bulunan γ-büzülme ve γ-zayıf büzülmeyi kullanılarak genelleştirilmiş çoğul değerli γ-tip-I-büzülme ve γ-tip-II-büzülme olarak adlandırılan iki yeni tip büzülme tanımlanmıştır. Daha sonra, genelleştirilmiş çoğul değerli γ-büzülme dönüşümler için bazı sabit nokta teoremleri ispatlanmıştır ve elde edilen sonuçların kullanılabilirliğini desteklemek için bir örnek verilmiştir.

2. TEMEL BİLGİLER

Tanım 2.1. $*: [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ ikili işlemi

1. $*$ sürekli,
2. Her $a \in [0,1]$ için $*(a,1) = a$
3. Her $a, b, c, d \in [0,1]$ için $a \le c$, $b \le d$ iken $*(a,b) \le *(c,d)$

özelliklerini sağlıyorsa t-norm olarak tanımlanır.

Tanım 2.2. [13] Ω boştan farklı bir küme, $*$ sürekli bir t-norm ve $M: \Omega^2 \times (0,\infty)$ bir fuzzy küme olsun. Her $\upsilon, \xi, \mu \in X$, $s, t > 0$ için

1. $M(\upsilon, \xi, t) > 0$,

2. $M(\upsilon, \xi, t) = 1 \Leftrightarrow \upsilon = \xi$,

3. $M(\upsilon, \xi, t) = M(\xi, \upsilon, t)$,

4. $M(\upsilon, \mu, t + s) \ge M(\upsilon, \xi, t) * M(\xi, \mu, s)$,

5. $M(\upsilon, \mu, \cdot): (0, \infty) \to (0,1]$ sürekli

özellikleri sağlanıyorsa, $(\Omega, M, *)$ üçlüsüne fuzzy metrik uzay denir.

Tanım 2.3. $(\Omega, M, *)$ bir fuzzy metrik uzay ve $\{\upsilon_n\}$, Ω da bir dizi olsun.

1. $\{\upsilon_n\}$ dizisinin bir $\upsilon \in \Omega$ noktasına yakınsak olması için gerek ve yeter şart her $s > 0$ için $\lim_{n\to\infty} M(\upsilon_n, \upsilon, s) = 1$ olmasıdır [4, 6].

2. Her $p > 0$ ve $s > 0$ için $\lim_{n\to\infty} M(\upsilon_n, \upsilon_{n+p}, s) = 1$ limiti var ise $\{\upsilon_n\}$ dizisine G-Cauchy dizisi denir. [2, 19, 20].

3. Ω daki her G-Cauchy dizisi yakınsak ise Ω tamdır [19, 20].

$\Theta \subset \Omega$ olmak üzere, $\upsilon \in \Omega$ noktasına yakınsayan her $\{\upsilon_n\} \in \Theta$ dizisi için $\upsilon \in \Theta$ ise Θ kapalıdır. Θ daki her dizinin yakınsak bir alt dizisi varsa Θ kompakttır. Bu çalışmada, Ω nun boştan farklı bütün kompakt alt kümelerinin kümesi $K(\Omega)$ olarak tanımlansın. $T:\Omega \to K(\Omega)$ çoğul değerli bir dönüşüm olsun. Bu durumda, bir $\upsilon \in \Omega$ noktasının T nin sabit noktası olması için gerek ve yeter şart $\upsilon \in T\upsilon$ olmasıdır.

Tanım 2.4. [11] $M: \Omega^2 \times (0,\infty)$ bir fuzzy metrik ve $\{(\upsilon_n, \xi_n, s_n)\}$ dizisi bir $(\upsilon, \xi, s) \in \Omega^2 \times (0,\infty)$ noktasına yakınsak olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} M(\upsilon_n, \xi_n, s_n) = M(\upsilon, \xi, s)$$

limiti var ise M süreklidir denir.

Önerme 2.1. [11] $(\Omega, M,*)$ bir fuzzy metrik uzay ise M süreklidir.

$M(\upsilon, \Theta, s) = \sup_{a\in\Theta} M(\upsilon, a, s)$ olarak verilsin. M fuzzy metriği tarafından üretilen bir Hausdorff fuzzy metrik $H_M: K(\Omega) \times K(\Omega) \times (0,\infty)$ olmak üzere $s > 0$ ve $\Theta, \Xi \in K(\Omega)$ için

$$H_M(\Theta, \Xi, s) = \min\{\inf_{a\in\Theta} M(a, \Xi, s), \inf_{b\in\Xi} M(\Theta, b, s)\}$$

eşitliği ile tanımlanır ve $(K(\Omega), H_M,*)$ üçlüsüne ise Hausdorff fuzzy metrik uzay denir.

Lemma 2.1. [11] $(\Omega, M,*)$ bir fuzzy metrik uzay olsun. $(M_d,\cdot)$ standart fuzzy metrik tarafından üretilen $(H_{M_d},\cdot)$ Hausdorff fuzzy metriği ile $K(\Omega)$ üzerinde tanımlanan H_d Hausdorff metriğinden elde edilen $(M_{H_d},\cdot)$ standart fuzzy metriği çakışır.

Tanım 2.5. [10] $\gamma: [0,1) \to \mathbb{R}$ dönüşümü

(g-1) kesin artan,
(g-2) her $\{\upsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi için $\lim_{n\to\infty} \upsilon_n = 1 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \gamma(\upsilon_n) = +\infty$,
(g-3) sürekli

özelliklerini sağlasın ve Γ, bütün γ-dönüşümlerinin kümesi olarak tanımlansın. $\gamma \in \Gamma$ olmak üzere bir $T:\Omega \to \Omega$ dönüşümü ve her $\upsilon, \xi \in \Omega$ için

$$H_M(T\upsilon, T\xi, s) < 1 \Rightarrow \gamma(H_M(T\upsilon, T\xi, s)) \geq \gamma(M(\upsilon, \xi, s)) + \delta$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bir $\delta \in (0,1)$ var ise T dönüşümüne bir γ-büzülme denir.

Örnek 2.1. Aşağıda γ dönüşümüne bazı örnekler verilmiştir:
Her $\varpi \in [0,1)$ için,
(i) $\frac{1}{1-\varpi}$, (ii) $\frac{1}{1-\varpi} + \varpi$, (iii) $\frac{1}{1-\varpi^2}$, (iv) $\frac{1}{\sqrt{1-\varpi}}$.

Not: γ kesin artan olduğu için γ-büzülme şartını sağlayan olan her T dönüşümü büzülebilirdir, yani $Tx \neq Ty$ olmak üzere her $x, y \in X$ için, $M(Tx, Ty, t) > M(x, y, t)$ eşitsizliği sağlanır. Böylece, her γ-büzülme bir sürekli dönüşümdür.

Tanım 2.6. [10] $\gamma \in \Gamma$ olmak üzere $T:\Omega \to \Omega$ dönüşümü verilsin. Her $\upsilon, \xi \in \Omega$ için

$$H_M(T\upsilon, T\xi, s) < 1 \Rightarrow \gamma(H_M(T\upsilon, T\xi, s)) \geq \gamma(\min\{M(\upsilon, \xi, s), M(\upsilon, T\upsilon, s), M(\xi, T\xi, s)\}) + \delta$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bir $\delta \in (0,1)$ var ise T dönüşümüne bir γ-zayıf büzülme denir.

3. SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Tanım 3.1. $T: \Omega \to K(\Omega)$ olsun ve γ dönüşümü (g-1) ve (g-2) şartları ile birlikte verilsin. Eğer her $\upsilon, \xi \in \Omega$ için

$$H_M(T\upsilon, T\xi, s) < 1 \Rightarrow \gamma(H_M(T\upsilon, T\xi, s)) \geq \gamma(\min\{M(\upsilon, \xi, s), M(\upsilon, T\upsilon, s), M(\xi, T\xi, s)\}) + \delta \qquad (2.1)$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bir $\delta \in (0,1)$ var ise T ye genelleştirilmiş çoğul değerli γ-tip-I-büzülme dönüşümü denir.

Teorem 3.1. $(\Omega, M, *)$ bir G-tam fuzzy metrik uzay ve T genelleştirilmiş çoğul değerli γ-tip-I-büzülme dönüşümü olsun. T dönüşümü (g-3) şartını sağlar ya da T sürekli olursa, bu durumda T nin bir sabit noktası vardır.

İspat. Ω nun bir υ_0 noktası verilsin. $T\upsilon_0 \in K(\Omega)$ olduğundan bir $\upsilon_1 \in T\upsilon_0$ vardır. Eğer $\upsilon_1 \in T\upsilon_1$ ise υ_1, T nin bir sabit noktasıdır. Bu durumda ispat tamamlanır. $\upsilon_1 \notin T\upsilon_1$ olsun. υ_1 kapalı olduğundan $M(\upsilon_1, T\upsilon_1, s) < 1$ eşitsizliği sağlanır. Ayrıca $M(\upsilon_1, T\upsilon_1, s) \geq H_M(T\upsilon_0, T\upsilon_1, s)$ olduğundan ve (g-1) şartından,

$$\gamma\big(M(\upsilon_1, T\upsilon_1, s)\big) \geq \gamma\big(H_M(T\upsilon_0, T\upsilon_1, s)\big)$$

elde edilir. (2.1) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \gamma(M(\upsilon_1, T\upsilon_1, s)) &\geq \gamma(H_M(T\upsilon_0, T\upsilon_1, s)) \\ &\geq \gamma(\min\{M(\upsilon_0, \upsilon_1, s), M(\upsilon_0, T\upsilon_0, s)), M(\upsilon_1, T\upsilon_1, s)\}) + \delta \\ &\geq \gamma(\min\{M(\upsilon_0, \upsilon_1, s), M(\upsilon_1, T\upsilon_1, s)\}) + \delta \qquad (2.2) \end{aligned}$$

elde edilir. Kabul edelim ki,

$$\min\{M(\upsilon_0, \upsilon_1, s), M(\upsilon_1, T\upsilon_1, s)\} = M(\upsilon_1, T\upsilon_1, s)$$

olsun. Bu durumda, (2.2) den,

$$\gamma(M(\upsilon_1, T\upsilon_1, s)) \geq \gamma(M(\upsilon_1, T\upsilon_1, s)) + \delta$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir. Bu nedenle,

$$\min\{M(\upsilon_0, \upsilon_1, s), M(\upsilon_1, T\upsilon_1, s)\} = M(\upsilon_0, \upsilon_1, s)$$

dır. (2.2) eşitsizliği kullanılırsa

$$\gamma(M(\upsilon_1, T\upsilon_1, s)) \geq \gamma(H_M(T\upsilon_0, T\upsilon_1, s)) \geq \gamma(M(\upsilon_0, \upsilon_1, s)) + \delta \qquad (2.3)$$

elde edilir. $T\upsilon_1$ kompakt olduğundan, bir $\upsilon_2 \in T\upsilon_1$ vardır öyle ki $M(\upsilon_1, \upsilon_2, s) = M(\upsilon_1, T\upsilon_1, s)$ dır. (2.3) den,

$$\gamma(M(\upsilon_1, \upsilon_2, s)) \geq \gamma(M(\upsilon_0, \upsilon_1, s)) + \delta$$

elde edilir. Böyle devam edilirse bir Ω de bir $\{\upsilon_n\}$ dizisi elde edilir öyle ki $\upsilon_{n+1} \in T\upsilon_n$ dir ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\gamma(M(\upsilon_n, \upsilon_{n+1}, s)) \geq \gamma(M(\upsilon_{n-1}, \upsilon_n, s)) + \delta$$

sağlanır. Bu şekilde devam edilirse, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\gamma(M(\upsilon_n, \upsilon_{n+1}, s)) \geq \gamma(M(\upsilon_{n-1}, \upsilon_n, s)) + \delta \geq \ldots \geq \gamma(M(\upsilon_0, \upsilon_1, s)) + n\delta \tag{2.4}$$

elde edilir. (2.4) eşitsizliğinde $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} \gamma(M(\upsilon_n, \upsilon_{n+1}, s)) = +\infty$$

elde edilir ve (g-2) şartından

$$\lim_{n\to\infty} M(\upsilon_n, \upsilon_{n+1}, s) = 1$$

bulunur. Şimdi, $\{\upsilon_n\}$ dizisinin G-Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. (2.4) den,

$$\begin{aligned} \gamma(M(\upsilon_n, \upsilon_{n+p}, s)) &\geq \gamma(M(\upsilon_{n-1}, \upsilon_{n+p-1}, s)) + \delta \\ &\geq \gamma(M(\upsilon_{n-2}, \upsilon_{n+p-2}, s)) + 2\delta \\ &\quad \ldots \\ &\geq \gamma(M(\upsilon_0, \upsilon_p, s)) + n\delta \end{aligned} \tag{2.5}$$

elde edilir. Sabit bir p için $\gamma(M(\upsilon_0, \upsilon_p, s))$ de sabittir, dolayısyla (2.5) de $n \to \infty$ için limit alınırsa,

$$\lim_{n\to\infty} \gamma(M(\upsilon_n, \upsilon_{n+p}, s)) = +\infty$$

elde edilir. (g-2) şartından,

$$\lim_{n\to\infty} M(\upsilon_n, \upsilon_{n+k}, s) = 1$$

bulunur. Böylece $\{\upsilon_n\}$, G-Cauchy dizisidir. Ω tam olduğu için, bir $\upsilon \in \Omega$ vardır öyle ki $\lim_{n\to\infty} \upsilon_n = \upsilon$ dir. Kabul edelim ki γ, (g-3) şartını sağlasın ve bu durumda $\upsilon \in T\upsilon$ olduğunu gösterelim. Bir an için $\upsilon \notin T\upsilon$ olsun. O halde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ ve$\{\upsilon_n\}$ in bir $\{\upsilon_{n_k}\}$ altdizisi vardır öyle ki her $n_k \geq n_0$ için $M(\upsilon_{n_k}, \upsilon, s) < 1$ dir. (2.1) den,

$$\begin{aligned} \gamma(M(x_{n_k+1}, Tz, s)) &= \gamma(H_M(Tx_{n_k}, Tz, s)) \\ &\geq \gamma(\min\{M(x_{n_k}, z, s), M(x_{n_k}, Tx_{n_k}, s), M(z, Tz, s)\}) + \delta \\ &= \gamma(\min\{M(x_{n_k}, z, s), M(x_{n_k}, x_{n_k+1}, s), M(z, Tz, s)\}) + \delta \end{aligned} \tag{2.6}$$

elde edilir. (2.6) da $n \to \infty$ için limit alınırsa,

$$\gamma(M(z, Tz, s)) \geq \gamma(M(z, Tz, s)) + \delta$$

elde edilir ki bu ise bir çelişkidir. Yani, $\upsilon \in T\upsilon$ dir. Kabul edelim ki T sürekli olsun, bu durumda

$$\lim_{n\to\infty} T\upsilon_n = T\upsilon$$

dir ve

$$M(\upsilon_n, T\upsilon, s) \geq H_M(T\upsilon_n, T\upsilon, s)$$

sağlanır. Yukarıdaki eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alınırsa, $M(\upsilon_n, T\upsilon, s) = 1$ elde edilir. Aynı zamanda, $T\upsilon$ kompakt olduğundan $\upsilon \in T\upsilon$ dir.

Tanım 3.2. $T:\Omega \to K(\Omega)$ olsun ve γ dönüşümü (g-1) ve (g-2) şartları ile birlikte verilsin. Eğer her $\upsilon, \xi \in \Omega$ için

$$H_M(T\upsilon, T\xi, s) < 1 \Rightarrow \gamma(H_M(T\upsilon, T\xi, s)) \geq \gamma(M(\upsilon, \xi, s)) + \delta \qquad (2.7)$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bir $\delta \in (0,1)$ var ise T ye genelleştirilmiş çoğul değerli γ-tip-II-büzülme dönşümü denir.

Sonuç 3.1. $(\Omega, M, *)$ bir G-tam fuzzy metrik uzay ve T genelleştirilmiş çoğul değerli γ-tip-II-büzülme dönüşümü olsun. Bu durumda T nin bir sabit noktası vardır.

İspat. Ω nun bir υ_0 noktası verilsin. $T\upsilon_0 \in K(\Omega)$ olduğundan bir $\upsilon_1 \in T\upsilon_0$ vardır. Eğer $\upsilon_1 \in T\upsilon_1$ ise υ_1, T nin bir sabit noktasıdır. Bu durumda ispat tamamlanır. $\upsilon_1 \notin T\upsilon_1$ olsun. $T\upsilon_1$ kapalı olduğundan $M(\upsilon_1, T\upsilon_1, s) < 1$ dir. Ayrıca $M(\upsilon_1, T\upsilon_1, s) \geq H_M(T\upsilon_0, T\upsilon_1, s)$ olduğundan ve (g-1) şartından,

$$\gamma\big(M(\upsilon_1, T\upsilon_1, s)\big) \geq \gamma\big(H_M(T\upsilon_0, T\upsilon_1, s)\big)$$

elde edilir. (2.7) den,

$$\gamma(M(\upsilon_1, T\upsilon_1, s)) \geq \gamma(H_M(T\upsilon_0, T\upsilon_1, s)) \geq \gamma(M(\upsilon_0, \upsilon_1, s)) + \delta$$

elde edilir. $T\upsilon_1$ kompakt olduğundan, bir $\upsilon_2 \in T\upsilon_1$ vardır öyle ki $M(\upsilon_1, \upsilon_2, s) = M(\upsilon_1, T\upsilon_1, s)$ dir. (2.7) den,

$$\gamma(M(\upsilon_1, \upsilon_2, s)) \geq \gamma(H_M(T\upsilon_0, T\upsilon_1, s)) \geq \gamma(M(\upsilon_0, \upsilon_1, s)) + \delta$$

elde edilir. Benzer şekilde devam edilirse, Ω de bir $\{\upsilon_n\}$ dizisi vardır öyle ki $\upsilon_{n+1} \in T\upsilon_n$ dir ve her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\gamma(M(\upsilon_n, \upsilon_{n+1}, s)) \geq \gamma(M(\upsilon_{n-1}, \upsilon_n, s)) + \delta$$

dır. Böyle devam edilirse her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\gamma\big(M(\upsilon_n, \upsilon_{n+1}, s)\big) \geq \gamma\big(M(\upsilon_{n-1}, \upsilon_n, s)\big) + \delta \geq \ldots \geq \gamma\big(M(\upsilon_0, \upsilon_1, s)\big) + n\delta \qquad (2.8)$$

bulunur. (2.8) de $n \to \infty$ için limit alınırsa,

$$\lim_{n\to\infty} \gamma(M(\upsilon_n, \upsilon_{n+1}, s)) = +\infty$$

elde edilir. (g-2) şartından,

$$\lim_{n\to\infty} M(\upsilon_n, \upsilon_{n+1}, s) = 1$$

elde edilir ve $\{\upsilon_n\}$ nin G-Cauchy dizisi olduğu Teorem 3.1'in ispatındaki gibi gösterilebilir. Ω tam olduğundan, $\{\upsilon_n\}$ bir $\upsilon \in \Omega$ noktasına yakınsar, yani $\lim_{n\to\infty} \upsilon_n = \upsilon$ dir. (2.6) dan, $H_M(T\upsilon, T\xi, s) < 1$ olmak üzere her $\upsilon, \xi \in \Omega$ için,

$$H_M(T\upsilon, T\xi, s) > M(\upsilon, \xi, s)$$

elde edilir ve her $\upsilon, \xi \in \Omega$ için,

$$H_M(T\upsilon, T\xi, s) \geq M(\upsilon, \xi, s) \qquad (2.9)$$

sağlanır. $M(\upsilon_{n+1}, T\upsilon, s) \geq H_M(T\upsilon_n, T\upsilon, s)$ olduğundan ve (2.9) eşitsizliğinden,

$$M(\upsilon_{n+1}, T\upsilon, s) \geq H_M(T\upsilon_n, T\upsilon, s) \geq M(\upsilon_n, \upsilon, s) \tag{2.10}$$

elde edilir. (2.10) eşitsizliğinde $n \to \infty$ için limit alınırsa, $M(\upsilon, T\upsilon, s) = 1$ elde edilir. Sonuç olarak $T\upsilon$ kompakt olduğundan $\upsilon \in T\upsilon$ dir.

Örnek 3.1. $\Omega = \{\theta_n = \frac{n(n+1)}{2}: n \in \mathbb{N}\}$ olsun. $t_1 * t_2 = \min\{t_1, t_2\}$ olmak üzere $d(\upsilon, \xi) = |\upsilon - \xi|$ standart metriği ve her $s > 0$ için standart metrikten üretilen fuzzy metrik ise $M_d(\upsilon, \xi, s) = \frac{s}{s+d(\upsilon,\xi)}$ olarak tanımlansın. $\gamma: [0,1) \to \mathbb{R}$ dönüşümü her $\varpi \in [0,1)$ için $\gamma = \frac{1}{1-\varpi^2}$ ve $T: \Omega \to \Omega$ dönüşümü ise

$$T(\upsilon) = \begin{cases} \{\theta_1\} & , \quad \upsilon = \theta_1 \\ \{\theta_1, \theta_{n-1}\} & , \quad \upsilon = \theta_n \end{cases}$$

olsun. Öncelikle T nin çoğul değerli γ-tip-II-büzülme dönüşümü olduğunu gösterelim:
(2.7) de, $\upsilon = T\upsilon_p$ ve $\xi = T\upsilon_k$ olsun. Bu durumda $H_M(T\upsilon_p, T\upsilon_k, s) < 1$ dir ve her $p, k \in \mathbb{N}$

$$H_{M_d}(T\upsilon_p, T\upsilon_k, s) < 1 \Leftrightarrow H_d(T\upsilon_p, T\upsilon_k, s) > 0 \Leftrightarrow (p > k > 1) \text{ veya } (p > 2 \text{ ve } k = 1)$$

sağlanır. Lemma 2.1'den, $H_{M_d}(T\upsilon_p, T\upsilon_k, s) = M_{H_d}(T\upsilon_p, T\upsilon_k, s)$ dır ve iki durum söz konusudur.

Durum 1: Her $p, k \in \mathbb{N}$ için $p > k > 1$ olsun, bu durumda

$$H_{M_d}(T\upsilon_p, T\upsilon_k, s) = M_{H_d}(T\upsilon_p, T\upsilon_k, s) = \frac{s}{s + H_d(T\upsilon_p, T\upsilon_k)}$$
$$= \frac{s}{s + |\upsilon_{p-1} - \upsilon_{k-1}|} = \frac{2s}{2s + (p-k)(p+k-1)}$$

ve

$$M_d(\upsilon_p, \upsilon_k, s) = \frac{s}{s + d(\upsilon_p, \upsilon_k)} = \frac{s}{s + |\upsilon_p - \upsilon_k|} = \frac{2s}{2s + (p-k)(p+k+1)}$$

elde edilir. Buradan da

$$H_{M_d}(Tv_p, Tv_k, s) > M_d(v_p, v_k, s)$$

elde edilir.

Durum 2: Her $p, k \in \mathbb{N}$ için $p > 2$ and $k = 1$ olsun, bu durumda

$$H_{M_d}(T\upsilon_p, T\upsilon_k, s) = M_{H_d}(T\upsilon_p, T\upsilon_k, s) = \frac{s}{s + H_d(T\upsilon_p, T\upsilon_k)}$$
$$= \frac{s}{s + |\upsilon_{p-1} - \upsilon_1|} = \frac{2s}{2s + (p^2 - p - 2)}$$

ve

$$M_d(\upsilon_p, \upsilon_k, s) = \frac{s}{s + d(\upsilon_p, \upsilon_k)} = \frac{s}{s + |\upsilon_p - \upsilon_1|} = \frac{2s}{2s + (p^2 + p - 2)}$$

elde edilir. Buradan da

$$H_{M_d}(T\upsilon_p, T\upsilon_k, s) > M_d(\upsilon_p, \upsilon_k, s)$$

elde edilir. (g-1) şartından her $\upsilon, \xi \in \Omega$ için bir $\delta \in (0,1)$ vardır öyle ki yukarıdaki iki durum için de

$$H_{M_d}(T\upsilon, T\xi, s) < 1 \Rightarrow \gamma(H_{M_d}(T\upsilon, T\xi, s)) \geq \gamma(M_d(\upsilon, \xi, s)) + \delta$$

sağlanır. Böylece, T bir çoğul değerli γ-tip-II-büzülme dönüşümüdür ve Sonuç 3.1'in bütün şartları sağlanır, dolayısıyla T nin bir sabit noktası vardır.

ÇIKAR ÇATIŞMASI/ÇAKIŞMASI BİLDİRİMİ

Yazarlar arasında çıkar çatışması/çakışması bulunmamaktadır.

KAYNAKLAR

[1] Deng, Z. (1922). Fuzzy pseudometric spaces, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 86, 74-95.
[2] Grabiec, M. (1988). Fixed points in fuzzy metric spaces, *Fuzzy Sets and Systems*, 27 (3), 385-389.
[3] Istrăţescu, V. (1974). An introduction to theory of probabilistic metric spaces with applications, Ed, Tehnică, Bucureşti, in Romanian.
[4] Kramosil, I. and Michalek, J. (1975). Fuzzy metric and statistical metric spaces, *Kybernetika*, 11(5), 336-344.
[5] Schweizer, B. And Sklar, A. (1960). Statistical metric spaces, *Pacific Journal of Mathematics*, 10(1), 385-389.
[6] Schweizer, B. and Sklar, A. (1983). Probabilistic Metric Spaces. North-Holland, Amsterdam, USA.
[7] Banach, S. (1922). Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leurs applications aux équations intégrales, *Fundamenta Mathematicae*, 3, 133-181.
[8] Salimi, P., Vetro, C., and Vetro, P. (2013). Some new fixed point results in non-Archimedean fuzzy metric spaces, *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, 18(3), 344-358.
[9] Sangurlu, M. and Turkoglu, D. (2015). Fixed point theorems for $(\psi \circ \varphi)$-contractions in a fuzzy metric spaces, *Journal of Nonlinear Science and Applications*, 8, 687-694.
[10] Sezen, M.S. (2019). Fixed point theorems for new type contractive mappings, *Journal of Function Spaces*, 2019, Article ID 2153563, 6.
[11] Rodríguez-López, J. and Romaguera, S. (2004). The Hausdorff fuzzy metric on compact sets, *Fuzzy Sets and Systems*, 147(2), 273-283.
[12] George, A. and Veeramani, P. (1994). On some results in fuzzy metric spaces, *Fuzzy Sets and Systems*, 64 (3), 395-399.
[13] Altun, I. (2010). Some fixed point theorems for single and multi valued mappings on ordered non-Archimedean fuzzy metric spaces, *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 7(1), 91-96.
[14] Altun, I., Mınak G., and Dağ, H. (2015). Multivalued F-contractions on complete metric spaces, *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, 16(4), 659-666.
[15] Došenović, T., Rakić, D., Carić, B., and Radenović, S. (2016). Multivalued generalizations of fixed point results in fuzzy metric spaces, *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, 21(2), 211–222.
[16] Saleem, N., Ali, B., Abbas M., and Raza, Z. Fixed points of Suzuki type generalized multivalued mappings in fuzzy metric spaces with applications, *Fixed Point Theory and Applications*, 2015(36).
[17] Phiangsungnoen, S., Sintunavarat W., and Kumam, P. (2014). Fuzzy fixed point theorems in Hausdorff fuzzy metric spaces, *Journal of Inequalities and Applications*, 2014(201).
[18] Qiu, Z. and Hong, S. (2013). Coupled fixed points for multivalued mappings in fuzzy metric spaces, *Fixed Point Theory and Applications*, 2013(162).
[19] Gregori, V. and Sapena, A. (2002). On fixed point theorems in fuzzy metric spaces, *Fuzzy Sets and Systems*, 125(2), 245-252.
[20] Vasuki, R. and Veeramani P. (2003). Fixed point theorems and Cauchy sequences in fuzzy metric spaces, *Fuzzy Sets and Systems*, 135(3), 409-413.