Lineer Regülatör Parametrelerinin Kalman Filtresi Kullanılarak En Çok Olabilirlik Yöntemiyle Tahmini

Esin KÖKSAL BABACAN* Levent ÖZBEK

Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, İstatistik Bölümü

Özet: Bu çalışmada lineer regülatör probleminde bulunan kayıp fonksiyonunda bilinmeyen parametre olması durumunda bu parametrelerin en çok olabilirlik yöntemiyle tahmini ele alınmıştır. Bu amaçla, ilk önce durum-uzay modellerinde model parametrelerinin tahmini için en çok olabilirlik yöntemi, daha sonra lineer regülatör problemi ve çözümü ile ilgili bilgi, son olarak kayıp fonksiyonunda bulunan bilinmeyen parametrelerin en çok olabilirlik yöntemiyle tahmini verilmiştir. Simülasyon çalışması ile yöntemin işleyişi gözlemlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Durum-uzay modeli, Kalman Filtresi, Lineer Regülatör.

Maximum Likelihood Estimation of Linear Regulator Parameters Using the Kalman Filter

Abstract: In this study, maximum likelihood estimation of loss function parameters in linear regulator problem is investigated. For this reason, in state- space models, maximum likelihood estimation of model parameters, linear regulator problem and this solution and maximum likelihood estimation of unknown parameters in loss function are explained. With simulation study working this giving method is observed.

Key Words: State-Space models, Kalman Filter, linear regüulator.

Kalman Filtresi ve En Çok Olabilirlik Yöntemi

Ele alınan durum-uzay modeli, $n=0,1,2,...,N$ olmak üzere

$$x_{n+1} = Ax_n + Bu_n + Gw_n$$
$$y_n = Hx_n + v_n$$

$$x_{n+1} = Ax_n + Bu_n + Gw_n$$
$$y_n = Hx_n + v_n$$

biçiminde olsun. Burada, $x_n \in R^q$ gözlenemeyen sistem durum vektörü, $y_n \in R^m$, sistem gözlem vektörü, $w_n \in R^q$ ve $v_n \in R^m$ birbirinden bağımsız sıfır ortalamalı ve

$$Cov(w_n w_k) = \begin{cases} Q & , \quad n = k \\ 0 & , \quad n \neq k \end{cases}, \qquad Cov(v_n v_k) = \begin{cases} R & , \quad n = k \\ 0 & , \quad n \neq k \end{cases}$$

$$Cov(w_n w_k) = \begin{cases} Q & , \quad n = k \\ 0 & , \quad n \neq k \end{cases}, \qquad Cov(v_n v_k) = \begin{cases} R & , \quad n = k \\ 0 & , \quad n \neq k \end{cases}$$

* ekoksal@science.ankara.edu.tr

kovaryans matrisli normal dağılıma sahip hata terimleri ve $u_n \in R^p$, sistem kontrol vektörüdür. Gözlenemeyen durum vektörünü tahmin etmek için Kalman Filtresi;

$$\hat{x}_0 = x_0$$
$$P(0) = P_0$$
$$\hat{x}_{n+1} = A\hat{x}_n + Bu_n + AK_n[y_n - H\hat{x}_n]$$
$$K_n = P_n H'(HP_n H' + R)^{-1}$$
$$P_{n+1} = AP_n A' + GQG' - AK_n(HP_n H' + R)^{-1} K_n' A'$$

$$\hat{x}_0 = x_0$$
$$P(0) = P_0$$
$$\hat{x}_{n+1} = A\hat{x}_n + Bu_n + AK_n[y_n - H\hat{x}_n]$$
$$K_n = P_n H'(HP_n H' + R)^{-1}$$
$$P_{n+1} = AP_n A' + GQG' - AK_n(HP_n H' + R)^{-1} K_n' A'$$

biçiminde verilir [1]. Burada, P_{n+1} denklemi Riccati denklemi olarak bilinir.
Burada verilen A, B, G, H, Q ve R matrislerinde bilinmeyen parametreler olabilir. Bu parametrelerin bütünü Θ vektörü ile gösterilsin. y_n nin $\{y_{n-1}, y_{n-2}, ..., y_1, y_0\}$ üzerine koşullu dağılımı, ortalaması $H\hat{x}_n$ ve varyansı $HP_n H' + R$ olan normal dağılıma sahip olduğundan negatif olabilirlik fonksiyonu [1, 2, 3];

$$J(\theta) = \sum_{n=0}^{N} \ln[\det(HP_n H' + R)] + iz(HP_n H' + R)^{-1}(y_n - H\hat{x}_n)(y_n - H\hat{x}_n)'$$

$$J(\theta) = \sum_{n=0}^{N} \ln[\det(HP_n H' + R)] + iz(HP_n H' + R)^{-1}(y_n - H\hat{x}_n)(y_n - H\hat{x}_n)'$$

biçiminde yazılır ve bilinmeyen parametrelerin en çok olabilirlik tahminleri bu fonksiyonun minimizasyonu ile elde edilir. Bunu elde edebilmek için negatif olabilirlik fonksiyonunun türevlerinin alınması gerekir.

$$\delta_n = (y_n - H\hat{x}_n)$$
$$\Gamma_{\delta\delta}(n) = \delta_n \delta_n'$$
$$\Gamma_{\delta\delta} = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} \Gamma_{\delta\delta}(n)$$
$$P_y(n) = HP_n H' + R$$
$$M_n = P_y^{-1}(n) - P_y^{-1}(n)\Gamma_{\delta\delta} P_y^{-1}(n)$$

olmak üzere, Θ vektöründeki herhangi bir θ parametresine göre J fonksiyonunun türevi hesaplansın [3,4];

$$\frac{\partial J}{\partial \theta} = \sum_{n=0}^{N} iz(\frac{\partial P_y(n)}{\partial \theta} M_n) + \sum_{n=0}^{N} iz((\frac{\partial \delta_n}{\partial \theta} \delta_n' + \delta_n \frac{\partial \delta_n'}{\partial \theta}) P_y^{-1}(n)) \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial J}{\partial \theta} = \sum_{n=0}^{N} iz(\frac{\partial P_y(n)}{\partial \theta} M_n) + \sum_{n=0}^{N} iz((\frac{\partial \delta_n}{\partial \theta} \delta_n' + \delta_n \frac{\partial \delta_n'}{\partial \theta}) P_y^{-1}(n)) \quad (1.3)$$

$$\mathrm{G}_1 = \sum_{n=0}^{N} iz\left(\frac{\partial P_y(n)}{\partial\theta} M_n\right) \text{ ve } \mathrm{G}_2 = \sum_{n=0}^{N} iz\left(\left(\frac{\partial \delta_n}{\partial\theta}\delta_n^{'} + \delta_n \frac{\partial \delta_n^{'}}{\partial\theta}\right) P_y^{-1}(n)\right)$$

olarak alınırsa, $\frac{\partial J}{\partial\theta} = G_1 + G_2$

olur. G_1 ifadesinden başlanırsa, $P_y(n)$ matrisinin türevinin alınması gerekir;

$$\frac{\partial P_y(n)}{\partial\theta} = \left(\frac{\partial H}{\partial\theta} P_n H' + H \frac{\partial P_n}{\partial\theta} H' + H P_n \frac{\partial H'}{\partial\theta} + \frac{\partial R}{\partial\theta}\right)$$

$$\frac{\partial P_y(n)}{\partial\theta} = \left(\frac{\partial H}{\partial\theta} P_n H' + H \frac{\partial P_n}{\partial\theta} H' + H P_n \frac{\partial H'}{\partial\theta} + \frac{\partial R}{\partial\theta}\right)$$

Buna göre, M_n matrisi ile sondan çarpılıp izi alınırsa,

$$G_1 = \sum_{n=0}^{N} \left(2iz\left(\frac{\partial H}{\partial\theta} P_n H' M_n\right) + iz\left(\frac{\partial P_n}{\partial\theta} H' M_n H\right) + iz\left(\frac{\partial R}{\partial\theta} M_n\right)\right)$$

$$G_1 = \sum_{n=0}^{N} \left(2iz\left(\frac{\partial H}{\partial\theta} P_n H' M_n\right) + iz\left(\frac{\partial P_n}{\partial\theta} H' M_n H\right) + iz\left(\frac{\partial R}{\partial\theta} M_n\right)\right)$$

elde edilir. Burada kovaryans matrisi,

$$P_{n+1} = A P_n A' + G Q G' - A K_n (H P_n H' + R)^{-1} K_n^{'} A'$$

$$P_{n+1} = A P_n A' + G Q G' - A K_n (H P_n H' + R)^{-1} K_n^{'} A'$$

nin türevi

$$\begin{aligned}\frac{\partial P_{n+1}}{\partial\theta} &= \frac{\partial A}{\partial\theta} P_n A' + A \frac{\partial P_n}{\partial\theta} A^{'} + A P_n \frac{\partial A^{'}}{\partial\theta} + \frac{\partial G}{\partial\theta} Q G' + G \frac{\partial Q}{\partial\theta} G^{'} + G Q \frac{\partial G^{'}}{\partial\theta} \\ &- \frac{\partial A}{\partial\theta} K_n \frac{\partial P_y(n)}{\partial\theta} K_n^{'} A' - A \frac{\partial K_n}{\partial\theta} (H P_n H' + R)^{-1} K_n^{'} A' - A K_n \frac{\partial P_y(n)}{\partial\theta} K_n^{'} A' \\ &- A K_n P_y(n) \frac{\partial K_n^{'}}{\partial\theta} A' - A K_n P_y(n) K_n^{'} \frac{\partial A'}{\partial\theta}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial P_{n+1}}{\partial\theta} &= \frac{\partial A}{\partial\theta} P_n A' + A \frac{\partial P_n}{\partial\theta} A^{'} + A P_n \frac{\partial A^{'}}{\partial\theta} + \frac{\partial G}{\partial\theta} Q G' + G \frac{\partial Q}{\partial\theta} G^{'} + G Q \frac{\partial G^{'}}{\partial\theta} \\ &- \frac{\partial A}{\partial\theta} K_n \frac{\partial P_y(n)}{\partial\theta} K_n^{'} A' - A \frac{\partial K_n}{\partial\theta} (H P_n H' + R)^{-1} K_n^{'} A' - A K_n \frac{\partial P_y(n)}{\partial\theta} K_n^{'} A' \\ &- A K_n P_y(n) \frac{\partial K_n^{'}}{\partial\theta} A' - A K_n P_y(n) K_n^{'} \frac{\partial A'}{\partial\theta}\end{aligned}$$

olur. G_2 ifadesi için,

$$\Gamma_{\delta\delta}(n) = (y_n - H\hat{x}_n)(y_n - H\hat{x}_n)'$$

$$\delta_n = (y_n - H\hat{x}_n)$$

$$\Gamma_{\delta\delta}(n) = (y_n - H\hat{x}_n)(y_n - H\hat{x}_n)'$$

$$\delta_n = (y_n - H\hat{x}_n)$$

olmak üzere

$$\frac{\partial \Gamma_{\delta\delta}(n)}{\partial\theta} = \left(\frac{\partial y_n}{\partial\theta} - \frac{\partial H}{\partial\theta}\hat{x}_n - H\frac{\partial \hat{x}_n}{\partial\theta}\right)\delta_n'$$
$$= \delta_n\left(\frac{\partial y_n}{\partial\theta} - \frac{\partial H}{\partial\theta}\hat{x}_n - H\frac{\partial \hat{x}_n}{\partial\theta}\right)'$$

$$\frac{\partial \Gamma_{\delta\delta}(n)}{\partial\theta} = \left(\frac{\partial y_n}{\partial\theta} - \frac{\partial H}{\partial\theta}\hat{x}_n - H\frac{\partial \hat{x}_n}{\partial\theta}\right)\delta_n'$$
$$= \delta_n\left(\frac{\partial y_n}{\partial\theta} - \frac{\partial H}{\partial\theta}\hat{x}_n - H\frac{\partial \hat{x}_n}{\partial\theta}\right)'$$

bu türevin $P_y^{-1}(n)$ ile çarpılması ve izinin alınması ile,

$$G_2 = \sum_{n=0}^{N} iz\left\{\left(\frac{\partial y_n}{\partial\theta} - \frac{\partial H}{\partial\theta}\tilde{x}_n - H\frac{\partial \tilde{x}_n}{\partial\theta}\right)\delta_n' + \delta_n\left(\frac{\partial y_n}{\partial\theta} - \frac{\partial H}{\partial\theta}\tilde{x}_{n|n-1} - H\frac{\partial \tilde{x}_{n|n-1}}{\partial\theta}\right)'\right\}P_y^{-1}(n)$$
$$= \sum_{n=0}^{N} -2iz\left(\frac{\partial H}{\partial\theta}\tilde{x}_n\delta_n' P_y^{-1}(n)\right) + 2iz\left(\frac{\partial y_n}{\partial\theta}\delta_n' P_y^{-1}(n)\right) - 2iz\left(\frac{\partial \tilde{x}_n}{\partial\theta}H\delta_n' P_y^{-1}(n)\right)$$

$$G_2 = \sum_{n=0}^{N} iz\left\{\left(\frac{\partial y_n}{\partial\theta} - \frac{\partial H}{\partial\theta}\tilde{x}_n - H\frac{\partial \tilde{x}_n}{\partial\theta}\right)\delta_n' + \delta_n\left(\frac{\partial y_n}{\partial\theta} - \frac{\partial H}{\partial\theta}\tilde{x}_{n|n-1} - H\frac{\partial \tilde{x}_{n|n-1}}{\partial\theta}\right)'\right\}P_y^{-1}(n)$$
$$= \sum_{n=0}^{N} -2iz\left(\frac{\partial H}{\partial\theta}\tilde{x}_n\delta_n' P_y^{-1}(n)\right) + 2iz\left(\frac{\partial y_n}{\partial\theta}\delta_n' P_y^{-1}(n)\right) - 2iz\left(\frac{\partial \tilde{x}_n}{\partial\theta}H\delta_n' P_y^{-1}(n)\right)$$

olur. Burada $\hat{x}_{n+1}$ türevi

$$\frac{\partial \hat{x}_{n+1}}{\partial\theta} = \frac{\partial A}{\partial\theta}\hat{x}_n + A\frac{\partial \hat{x}_n}{\partial\theta} + \frac{\partial K_n}{\partial\theta}\delta(n) + K_n\left(\frac{\partial y_n}{\partial\theta} - \frac{\partial H}{\partial\theta}\hat{x}_n - H\frac{\partial \hat{x}_n}{\partial\theta}\right)$$

$$\frac{\partial \hat{x}_{n+1}}{\partial\theta} = \frac{\partial A}{\partial\theta}\hat{x}_n + A\frac{\partial \hat{x}_n}{\partial\theta} + \frac{\partial K_n}{\partial\theta}\delta(n) + K_n\left(\frac{\partial y_n}{\partial\theta} - \frac{\partial H}{\partial\theta}\hat{x}_n - H\frac{\partial \hat{x}_n}{\partial\theta}\right)$$

dir. G_1 ve G_2 ifadelerinin toplanması ile log-olabilirlik fonksiyonu elde edilir [3, 4]. Parametre tahminleri hesaplandıktan sonra standart hataları aşağıdaki şekilde hesaplanır [4].

$$J_n(\theta) = \ln[\det(HP_nH' + R)] + iz(y_n - H\hat{x}_n)'(HP_nH' + R)^{-1}(y_n - H\hat{x}_n) \quad (1.4)$$

olmak üzere;

$$S(\Theta) = diag\left(\sqrt{\left(\sum_n \frac{\partial J_n(\theta)}{\partial\theta}\frac{\partial J_n'(\theta)}{\partial\theta}\right)^{-1}}\right)$$

(1.5)

biçimindedir.

$$M_n = P_y^{-1}(n) - P_y^{-1}(n)\delta_n(n)\delta_n' P_y^{-1}(n)$$

olmak üzere,

$$\frac{\partial J_n(\theta)}{\partial\theta} = iz\left(P_y^{-1}(n)\frac{\partial P_y(n)}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial \delta_n'}{\partial\theta}P_y^{-1}(n)\delta_n + \delta_n' P_y^{-1}(n)\frac{\partial \delta_n}{\partial\theta} - \delta_n' P_y^{-1}(n)\frac{\partial P_y(n)}{\partial\theta}P_y^{-1}(n)\delta_n$$
$$= iz\left\{\left(P_y^{-1}(n) - P_y^{-1}(n)\delta_n\delta_n'\frac{\partial P_y(n)}{\partial\theta}\right)\right\} + iz\left\{\frac{\partial \delta_n'}{\partial\theta}P_y^{-1}(n)\delta_n + \delta_n' P_y^{-1}(n)\frac{\partial \delta_n}{\partial\theta}\right\}$$

$$= iz\{\frac{\partial P_y^{-1}(n)}{\partial\theta} M_n\} + iz\{P_y^{-1}(n)\frac{\partial \delta_n \delta_n'}{\partial\theta}\} \text{ dır.}$$

Lineer Regülatör

İndirimli stokastik regülator problemi göz önüne alınsın. Bu optimizasyon problemi,

$$\min_{\{u_n\}} \mathrm{E}\sum_{n=0}^{\infty} \beta^n \left(x_n' R_1 x_n + u_n' Q_1 u_n + 2x_n' W u_n \right) \quad (2.1)$$

$$x_{n+1} = Ax_n + Bu_n + Gw_n \quad (2.2)$$

$$\min_{\{u_n\}} \mathrm{E}\sum_{n=0}^{\infty} \beta^n \left(x_n' R_1 x_n + u_n' Q_1 u_n + 2x_n' W u_n \right) \quad (2.1)$$

$$x_{n+1} = Ax_n + Bu_n + Gw_n \quad (2.2)$$

biçimindedir [4]. R_1, Q_1, W , A ve B matrisleri Θ vektöründe bulunan parametrelere bağlı olsunlar. (2.1) ile verilen fonksiyon kayıp fonksiyonu olarak adlandırılır ve kayıp fonksiyonunda bulunan R_1 ve Q_1 matrisleri simetrik ve negatif olmayan matrislerdir. Bu bölümde $G = 0$ varsayılıp işlemler yapılacaktır. (2.1) ve (2.2) eşitliklerinde verilen matrislerin Θ vektöründe bulunan parametrelere göre türevlerinin bilindiği varsayılacaktır [4].
Bu lineer regülator probleminin çözümü $u_n = -Fx_n$ ile verilir. Burada,

$$F = \left(Q_1 + \beta B' P_1 B\right)^{-1} \left(\beta B' P_1 A + W'\right) \quad (2.3)$$

$$F = \left(Q_1 + \beta B' P_1 B\right)^{-1} \left(\beta B' P_1 A + W'\right) \quad (2.3)$$

ve

$$P_1 = R_1 + \beta A' P_1 A - \left(W + \beta A' P_1 B\right)\left(Q_1 + \beta B' P_1 B\right)^{-1} \left(\beta B' P_1 A + W'\right) \quad (2.4)$$

$$P_1 = R_1 + \beta A' P_1 A - \left(W + \beta A' P_1 B\right)\left(Q_1 + \beta B' P_1 B\right)^{-1} \left(\beta B' P_1 A + W'\right) \quad (2.4)$$

şeklindedir [4]. Durum vektörü bilinmediğinde optimal kontrolü bulmak için, Kalman Filtresi ile durum tahmin edilerek $u_n = -F\hat{x}_n$ olarak kullanılır.

Lineer Ragülatör parametrelerinin tahmini

Durum-uzay modelinde model denkleminde bilinmeyen parametrelerle birlikte optimal lineer regülator problemi için verilen kayıp fonksiyonunda da bilinmeyen parametreler olduğunda, durum vektörü,

$$x_{n+1} = Ax_n + Bu_n$$

$$x_{n+1} = Ax_n + Bu_n$$

olmak üzere, optimal kontrol $u_n = -Fx_n$ olarak elde edildiğinden bunun yerine yazılmasıyla,

$$x_{n+1} = Ax_n + B(-Fx_n)$$

$$x_{n+1} = (A - BF)x_n$$

$$x_{n+1} = Ax_n + B(-Fx_n)$$

$$x_{n+1} = (A - BF)x_n$$

biçiminde olacaktır. Q_1 ve R_1 matrisleri de bilinmeyen parametreler içerdiğinde bunların da tahmin edilmesi gerekir. Bu nedenle,

$$x_{n+1} = (A - BF)x_n$$

$$x_{n+1} = (A - BF)x_n$$

olmak üzere, $A_0 = (A - BF)$ alınarak benzer işlemler yapılabilir. Minimize edilecek fonksiyon burada aynıdır. Sistem geçiş matrisinde A yerine A_0'ın alınmasıyla Kalman Filtresi eşitliklerinde değişimler olur ve F ve P_1 matrislerinin hesaplanması gerekir. Buna göre Kalman Filtresi,

$$P_1 = R_1 + \beta A' P_1 A - (W + \beta A' P_1 B)(Q_1 + \beta B' P_1 B)^{-1}(\beta B' P_1 A + W')$$

$$F = (Q_1 + \beta B' P_1 B)^{-1}(\beta B' P_1 A + W')$$

$$\hat{x}_{n+1} = (A - BF)\hat{x}_n + (A - BF)K_n[y_n - H\hat{x}_n]$$

$$K_n = P_n H'(HP_n H' + R)^{-1}$$

$$P_{n+1} = ((A - BF) - K_n H)P_n((A - BF)' - H' K_n')$$

$$P_1 = R_1 + \beta A' P_1 A - (W + \beta A' P_1 B)(Q_1 + \beta B' P_1 B)^{-1}(\beta B' P_1 A + W')$$

$$F = (Q_1 + \beta B' P_1 B)^{-1}(\beta B' P_1 A + W')$$

$$\hat{x}_{n+1} = (A - BF)\hat{x}_n + (A - BF)K_n[y_n - H\hat{x}_n]$$

$$K_n = P_n H'(HP_n H' + R)^{-1}$$

$$P_{n+1} = ((A - BF) - K_n H)P_n((A - BF)' - H' K_n')$$

biçiminde olur.

Bilinmeyen parametrelerin tümü Θ vektörü ile gösterilmek üzere, $A_0 = (A - BF)$ olduğundan A_0 ın Θ da bulunan herhangi bir bilinmeyen θ parametresine göre türevi;

$$\frac{\partial A_0}{\partial \theta} = \frac{\partial A}{\partial \theta} - \frac{\partial B}{\partial \theta}F - B\frac{\partial F}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial A_0}{\partial \theta} = \frac{\partial A}{\partial \theta} - \frac{\partial B}{\partial \theta}F - B\frac{\partial F}{\partial \theta}$$

ve F nin türevi;

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = -\left(Q_1 + \beta B' P_1 B\right)^{-1}\left(\frac{\partial Q}{\partial \theta} + \beta\frac{\partial B'}{\partial \theta}P_1 B + \beta B'\frac{\partial P_1}{\partial \theta}B + \beta B' P_1\frac{\partial B}{\partial \theta}\right)F$$
$$+\left(Q + \beta B' P_1 B\right)^{-1}\left(\beta\frac{\partial B'}{\partial \theta}P_1 A + \beta B'\frac{\partial P_1}{\partial \theta}A + \beta B' P_1\frac{\partial A}{\partial \theta} + \frac{\partial W'}{\partial \theta}\right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = -\left(Q_1 + \beta B' P_1 B\right)^{-1}\left(\frac{\partial Q}{\partial \theta} + \beta\frac{\partial B'}{\partial \theta}P_1 B + \beta B'\frac{\partial P_1}{\partial \theta}B + \beta B' P_1\frac{\partial B}{\partial \theta}\right)F$$
$$+\left(Q + \beta B' P_1 B\right)^{-1}\left(\beta\frac{\partial B'}{\partial \theta}P_1 A + \beta B'\frac{\partial P_1}{\partial \theta}A + \beta B' P_1\frac{\partial A}{\partial \theta} + \frac{\partial W'}{\partial \theta}\right)$$

olarak elde edilir [4]. Burada $\frac{\partial P_1}{\partial \theta}$ türevi yer aldığından bunun da hesaplanması gerekir,

$$P_1 = R_1 + \beta A' P_1 A - \underbrace{\left(W + \beta A' P_1 B\right)\left(Q_1 + \beta B' P_1 B\right)^{-1}}_{F'}\left(\beta B' P_1 A + W'\right)$$

$$P_1 = R_1 + \beta A' P_1 A - \underbrace{\left(W + \beta A' P_1 B\right)\left(Q_1 + \beta B' P_1 B\right)^{-1}}_{F'}\left(\beta B' P_1 A + W'\right)$$

olduğundan;

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P_1}{\partial \theta} &= \frac{\partial R}{\partial \theta} + \beta \frac{\partial A'}{\partial \theta} P_1 A + \beta A' \frac{\partial P_1}{\partial \theta} A + \beta A' P_1 \frac{\partial A}{\partial \theta} \\
&-\left(\frac{\partial W}{\partial \theta} + \beta \frac{\partial A'}{\partial \theta} P_1 B + \beta A' \frac{\partial P_1}{\partial \theta} + \beta' A' P_1 \frac{\partial B}{\partial \theta}\right) F \\
&+F'\left(\frac{\partial Q}{\partial \theta} + \beta \frac{\partial B'}{\partial \theta} P_1 B + \beta B' \frac{\partial P_1}{\partial \theta} B + \beta B' P_1 \frac{\partial B}{\partial \theta}\right) F \\
&-F'\left(\beta \frac{\partial B'}{\partial \theta} P_1 A + \beta B' \frac{\partial P_1}{\partial \theta} A + \beta B' P_1 \frac{\partial A}{\partial \theta} + \frac{\partial W'}{\partial \theta}\right) \\
&= \beta A_0' \frac{\partial P_1}{\partial \theta} A_0 + \frac{\partial R_1}{\partial \theta} + \beta \frac{\partial A'}{\partial \theta} A_0 - \beta F' \frac{\partial B'}{\partial \theta} P_1 A_0 \\
&+\beta\left(A' - F' B'\right) P_1 \frac{\partial A}{\partial \theta} - \frac{\partial W}{\partial \theta} F - F' \frac{\partial W'}{\partial \theta} + F' \frac{\partial Q_1}{\partial \theta} F
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P_1}{\partial \theta} &= \frac{\partial R}{\partial \theta} + \beta \frac{\partial A'}{\partial \theta} P_1 A + \beta A' \frac{\partial P_1}{\partial \theta} A + \beta A' P_1 \frac{\partial A}{\partial \theta} \\
&-\left(\frac{\partial W}{\partial \theta} + \beta \frac{\partial A'}{\partial \theta} P_1 B + \beta A' \frac{\partial P_1}{\partial \theta} + \beta' A' P_1 \frac{\partial B}{\partial \theta}\right) F \\
&+F'\left(\frac{\partial Q}{\partial \theta} + \beta \frac{\partial B'}{\partial \theta} P_1 B + \beta B' \frac{\partial P_1}{\partial \theta} B + \beta B' P_1 \frac{\partial B}{\partial \theta}\right) F \\
&-F'\left(\beta \frac{\partial B'}{\partial \theta} P_1 A + \beta B' \frac{\partial P_1}{\partial \theta} A + \beta B' P_1 \frac{\partial A}{\partial \theta} + \frac{\partial W'}{\partial \theta}\right) \\
&= \beta A_0' \frac{\partial P_1}{\partial \theta} A_0 + \frac{\partial R_1}{\partial \theta} + \beta \frac{\partial A'}{\partial \theta} A_0 - \beta F' \frac{\partial B'}{\partial \theta} P_1 A_0 \\
&+\beta\left(A' - F' B'\right) P_1 \frac{\partial A}{\partial \theta} - \frac{\partial W}{\partial \theta} F - F' \frac{\partial W'}{\partial \theta} + F' \frac{\partial Q_1}{\partial \theta} F
\end{aligned}$$

olarak bulunur [4].

Simülasyon Çalışması

Durum-uzay modeli,

$$x_{n+1} = Ax_n + Bu_n + Gw_n$$
$$y_n = Hx_n + v_n$$

$$x_{n+1} = Ax_n + Bu_n + Gw_n$$
$$y_n = Hx_n + v_n$$

biçiminde olmak üzere,

$$A_n = \begin{bmatrix} 1.5 & .5 \\ -.5 & .5 \end{bmatrix},\ B_n = \begin{bmatrix} .5 & ; & -.5 \end{bmatrix},\ G_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ve } H_n = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak alındığında,

$$x_{n+1} = \begin{bmatrix} 1.5 & .5 \\ -.5 & .5 \end{bmatrix} x_n + \begin{bmatrix} .5 & ; & -.5 \end{bmatrix} u_n + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} w_n$$

$$y_n = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} x_n + v_n$$

$$Cov(w_n) = .3I_2,\ Cov(v_n) = .2$$

$$Cov(w_n) = .3I_2, \qquad Cov(v_n) = .2$$

durum uzay modeli göz önüne alınsın.
Burada regülatör problemi,

$$\min_{\{u_n\}} \mathrm{E}\sum_{n=0}^{\infty} \beta^n \left(x_n^{'} R_1 x_n + u_n^{'} Q_1 u_n + 2x_n^{'} W u_n \right)$$

biçiminde olmak üzere amaç,

$$R_1 = \begin{bmatrix} r_{11} & .1 \\ r_{21} & .4 \end{bmatrix},\ Q_1 = q_1, W = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

matrislerinde bulunan bilinmeyen r_{11}, r_{21}, q_1 parametrelerini belirlenmek olsun.

Burada verilen gerçek kontrol terimi u_n,

$$\min_{\{u_n\}} \mathrm{E}_0 \sum_{n=0}^{\infty} 1^n \left(x_n^{'} \begin{bmatrix} .4 & .1 \\ .5 & .4 \end{bmatrix} x_n + u_n^{'} (.1) u_n + 2x_n^{'} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u_n \right)$$

kontrol problemine göre $u_n = -Fx_n$ esasına göre elde edilmiş olsun. Bu kontrol altında yukarıda verilen durum-uzay modeline göre elde edilen y_n gözlemleri kullanılarak bilinmeyen parametreler en çok olabilirlik yöntemine göre tahmin edilsin. Matlab programında negatif olabilirlik fonksiyonu oluşturulup bu fonksiyonun minimumunu alma işlemi sayısal optimizasyon problemlerinin çözümünde kullanılan fminunc komutu ile yaptırılırsa parametre tahminleri; r_{11}=0.3072, r_{21}=0.5761, q_1=0.1767 ve standart hataları sırayla 0.0115, 0.0124, 0.0283 olarak bulunur. Görüldüğü gibi değerler gerçek değerlere (r_{11}=0.4, r_{21}=0.5, q_1=0.1) oldukça yakındır ve standart hataları da oldukça küçüktür.

Sonuç

Kimi zaman kayıp fonksiyonunda bulunan matrisler de bilinmeyen parametreler içerebilirler. Buna göre lineer raegülator problemi işletilirken bu parametrelerin de tahmini problemi ortaya çıkar. Kalman Filtresi kullanılarak bu parametreler en çok olabilirlik yöntemiyle tahmin edilebilir. Simülasyon çalışmasından da görüldüğü gibi tahmin değerleri gerçek değerlere oldukça yakındır ve standart hataları da oldukça küçüktür.

Kaynaklar

[1] Sweppe, F. C. 1973. **Uncertain Dynamic Systems.** Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

[2] Anderson, B. D. O. and Moore, J. B. 1979. **Optimal Filtering**. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

[3] Wilson, D., A and Kumar, A. 1982. **Derivative Computations for the Log Likelihood Function**, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-27, No. 1.

[4] Anderson, E. W., Hansen, P. L., MCGrattan, Sargent, T. J. 1995. **Mechanics of Forming and Estimating Dynamic Linear Economies**, unpublished manuscript, Stanford University, Hoover Institution.