

## Bir Boyutlu Parabolik Kısmi Diferansiyel Denklemler için Kontrol Parametresinin Nümerik Yöntemlerle Belirlenmesi

Berna BÜLBÜL, Mustafa GÜLSU<sup>1</sup>

Muğla Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

**Özet:** Bu çalışmada bir boyutlu parabolik kısmi diferansiyel denklemlerde ortaya çıkan ters problemlerde, bilinmeyen kontrol parametresi  $p(t)$ , nümerik yöntemlerle bulunmuştur. Bu amaçla birçok sonlu fark yaklaşımları geliştirilmiştir. Bu sonlu fark yaklaşım teknikleri kullanılarak elde edilen nümerik sonuçlar problemin analitik çözümü karşılaştırılmıştır. Problemin çözüm algoritmasında son yıllarda sıkça kullanılan Maple9 programı kullanılmıştır.

**Anahtar Kelimeler:** Sonlu Farklar, Ters problemler, Parabolik denklemler

## A Numerical Approach for Finding a Control Parameter in One Dimensional Parabolic Partial Differential Equation

**Abstract:** In this study, numerical procedure for the solution of inverse problem of determining unknown control parameter  $p(t)$  in parabolic partial differential equations are studied. Several finite difference schemes are presented for finding the control parameter. The numerical results obtained by present method and compared with the exact solution of the problem. Illustrative examples are included, performed on the computer using a program written in maple9.

**Keywords:** Finite difference, Inverse problems, Parabolic Equations

---

<sup>1</sup> E-mail: mgulsu@mu.edu.tr

### 1.Giriş

Son yıllarda parabolik kısmi diferansiyel denklemlerde ters problemler için kontrol fonksiyonunun belirlenmesi problemi üzerinde yoğun çalışmalar yapılmaktadır. Ters problemler birçok mühendislik ve fiziksel olaylarda karşımıza çıkmaktadır. Bu tip problemler deney sonuçları ile doğrudan ilgilidir. Bu tip kontrol fonksiyonu içeren problemler, kontrol teorisi[1], bir boyutlu ısı iletim problemi[2], ve parabolik kısmi diferansiyel denklemlerde nümerik çözümleri yani bilinmeyen p(t) fonksiyonunu bulma gibi problemlerde karşımıza çıkar[3]. Öte yandan basit yöntemlerle analiz edilemeyen ve geniş bir alan oluşturan problemler için ters problemlerin çözüm yöntemleri önemli yer tutmaktadır.

### 2. Kontrol parametresi için türetilen yaklaşımlar

Bu çalışmada,

$$u_t = u_{xx} + p(t)u(x,t) + f(x,t) \quad (2.1)$$

$$u(x,0) = \Phi(x), \quad x \in (0,1) \quad (2.2)$$

$$u_x(0,t) = g_1(t), \quad t \in (0,T) \quad (2.3)$$

$$u_x(1,t) = g_2(t), \quad t \in (0,T) \quad (2.4)$$

problemi ve

$$\int_0^{s(t)} u(x,t) = E(t), \quad 0 < t \leq T ; 0 < s(t) \leq T \quad (2.5)$$

koşulunu sağlayan bilinmeyen  $u=u(x,t)$  fonksiyonu ve  $p=p(t)$  kontrol parametresinin bulunma problemi ile ilgilenilmektedir. Bu amaçla sonlu farklar kullanılmaktadır. Burada  $f(x,t)$ ,  $g_1(t)$ ,  $g_2(t)$  ve  $E(t)$  bilinen fonksiyonlardır [4–11].

U ısı dağılımını göstermek üzere (2.1-2.4) denklemleri kaynak kontrolüne bağlı kontrol problemini oluştururlar. Belirlenmeye çalışılan kontrol parametresi olan  $p(t)$ , uzayın bir bölümüne bırakılan enerjiyi göstermektedir.

### 3. Kanonik Gösterim

(2.1) denkleminde bulunan  $p(t)u(x,t)$  terimi uygun dönüşümlerle kaldırılarak, (2.1-2.4) denklem sistemi sonlu fark çözümü için uygun hale getirilir. Bu şekilde elde edilen sisteme PDE sistemi, bu sistem için uygulanacak çözüm yöntemine PDE çözüm denilecektir.

$$r(t) = \exp\left(-\int_0^t p(\tau) d\tau\right) \quad (3.1)$$

$$v(x,t) = u(x,t)r(t) \quad (3.2)$$

olmak üzere,

$$(u,p) \rightarrow (v,r)$$

dönüşümleri kullanılarak,

$$u(x,t) = \frac{v(x,t)}{r(t)} \text{ ve } p(t) = -\frac{r'(t)}{r(t)} \quad (3.3)$$

ifadeleri elde edilir. Böylece elde edilen yeni denklem sistemi  $(v,r)$  ikilisi olarak aşağıdaki şekilde verilmiştir[1].

$$v_t = v_{xx} + r(t) \cdot f(x, t) \quad 0 < x < 1; 0 < t \leq T \quad (3.4)$$

$$v(x, 0) = \phi(x) \quad (3.5)$$

$$v_x(0, t) = r(t)g_1(t) \quad (3.6)$$

$$v_x(1, t) = r(t)g_2(t) \quad (3.7)$$

$$r(t) \cdot E(t) = \int_0^{s(t)} v \partial x$$

$$r(t) = \frac{1}{E(t)} \int_0^{s(t)} v dx \quad (3.8)$$

#### 4. Nümerik Yöntemler

$H=[0,1]$  ve  $T=[0,T]$  aralıkları  $M$  ve  $N$  parçaya bölünmek üzere  $h = \frac{1}{M}$  ve  $\tau = \frac{T}{N}$  olarak alınsın. Sınır koşullarının türevli olması nedeniyle sanal noktalar ikinci sınır koşulları olarak belirlensin. (3.4) denkleminde ağırlıklı ortalama yaklaşımı uygulanırsa,

$$\frac{1}{\tau}(v_j^{n+1} - v_j^n) = \theta \left( \frac{v_{j-1}^{n+1} - 2v_j^{n+1} + v_{j+1}^{n+1}}{h^2} + (rf)_j^{n+1} \right) + (1-\theta) \left( \frac{v_{j-1}^n - 2v_j^n + v_{j+1}^n}{h^2} + (rf)_j^n \right) \quad (41)$$

$$v_{-1}^n = v_1^n - 2h(rg_1)^n$$

$$v_{m+1}^n = v_{m-1}^n + 2h(rg_2)^n$$

ifadesi elde edilir[8,12]. Bu ifade grid noktaları için düzenlenirse,

$j=0$  için;

$$\begin{aligned} & \left( \frac{h^2}{\tau} + 2\theta \right) v_0^{n+1} - 2\theta v_1^{n+1} - h^2 \theta (rf)_0^{n+1} + 2\theta h (rg_1)^{n+1} \\ & = \left( \frac{h^2}{\tau} + 2(\theta - 1) \right) v_0^n + 2(\theta - 1)v_1^n + h^2(1-\theta)(rf)_0^n + 2(\theta - 1)h(rg_1)^n \end{aligned}$$

$j=1 \dots M-1$  için;

$$\begin{aligned} & -\theta v_{j-1}^{n+1} + \left( \frac{h^2}{\tau} + 2\theta \right) v_j^{n+1} - \theta v_{j+1}^{n+1} - h^2 \theta (rf)_j^{n+1} \\ & = (1-\theta)v_{j-1}^n + \left( \frac{h^2}{\tau} + 2(\theta - 1) \right) v_j^n + (1-\theta)v_{j+1}^n + h^2(1-\theta)(rf)_j^n \end{aligned}$$

$j=M$  için;

$$\begin{aligned} & -2\theta v_{M-1}^{n+1} + \left( \frac{h^2}{\tau} + 2\theta \right) v_M^{n+1} - h^2 \theta (rf)_M^{n+1} - 2\theta h (rg_2)^{n+1} \\ & = 2(\theta - 1)v_{M-1}^n + \left( \frac{h^2}{\tau} + 2(\theta - 1) \right) v_M^n + h^2(1-\theta)(rf)_M^n + 2(1-\theta)h(rg_2)^n \end{aligned}$$

ifadeleri elde edilir.(3.8) denkleminde bulunan  $\int_0^{s(t)} v dx$  integrali nümerik olarak hesaplanırsa [5,8]

$$\int_0^{s(t)} v dx = \int_0^{kh} v dx + \int_{kh}^{s(t)} v dx$$

$$= h \left( \frac{v_0}{2} + v_1 + \dots + v_{k-1} + \frac{v_k}{2} \right) + \int_{kh}^{s(t)} v dx \quad (4.2)$$

ifadesi elde edilir. (4.2) denkleminde  $\int_{kh}^{s(t)} v dx$  integrali için enterpolasyon teknikleri uygulanırsa,

$$\int_{kh}^{s(t)} v dx = \left( \delta - \frac{\delta^2}{2h} \right) v_k + \frac{\delta^2}{2h} v_{k+1} \quad (4.3)$$

eşitliği elde edilir. Burada  $k = \left\lfloor \frac{s(t)}{h} \right\rfloor$  ve  $\delta = s(t) - kh$  olmak üzere (4.3) ile verilen ifade (4.2)

denkleminde yerine konursa,

$$\int_0^{s(t)} v dx = h \left( \frac{v_0}{2} + v_1 + \dots + v_{k-1} + \left( \frac{1}{2} + \frac{\delta}{h} - \frac{\delta^2}{2h^2} \right) v_k + \frac{\delta^2}{2h^2} v_{k+1} \right) \quad (4.4)$$

ifadesi bulunur.

Burada kesme hatası  $O(h^2)$  dir. (4.4) ile verilen ifade (3.18) de yerine konarak elde edilen  $r(t)$ , (2.1)-(2.4) denklem sistemine uygulanırsa  $(M+1) \times (M+1)$  boyutlu lineer denklem sistemi oluşur ve matris formunda

$$\left( A + \frac{h^2}{E^{n+1}} \tilde{A} \right) V^{n+1} = \left( B + \frac{h^2}{E^n} \tilde{B} \right) V^n \quad (4.5)$$

şeklinde yazılır.

Burada;

$$A = \begin{pmatrix} \frac{h^2}{\tau} + 2\theta & -2\theta & & & & \\ -\theta & \frac{h^2}{\tau} + 2\theta & -\theta & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -\theta & \frac{h^2}{\tau} + 2\theta & -\theta \\ & & & & & & -2\theta & \frac{h^2}{\tau} + 2\theta \end{pmatrix}$$



$$u(x,t) = \frac{v(x,t)}{r(t)} \quad (4.6)$$

$$p(t) = -\frac{r'(t)}{r(t)} \quad (4.7)$$

şeklinde elde edilir.

### 5.PDE ye Bağlı Çözüm

Sonlu farklar kullanılarak  $r(t)$  fonksiyonu biliniyor ise (3.4)-(3.8) sistemi aşağıdaki gibi düzenlenerek çözüm nümerik olarak hesaplanabilir.

$$f(x,t).r(t)=F(x,t) \quad (5.1)$$

$$v_x(0,t) = r(t)g_1(t) = \eta_1(t) \quad (5.2)$$

$$v_x(1,t) = r(t)g_2(t) = \eta_2(t) \quad (5.3)$$

$$v_t = v_{xx} + F(x,t) \quad (5.4)$$

$$\frac{1}{\tau}(v_j^{n+1} - v_j^n) = \theta \left( \frac{v_{j-1}^{n+1} - 2v_j^{n+1} + v_{j+1}^{n+1}}{h^2} \right) + (1-\theta) \left( \frac{v_{j-1}^n - 2v_j^n + v_{j+1}^n}{h^2} \right) + F(x,t) \quad (5.5)$$

$h^2 F(x,t) = G(x,t)$  olmak üzere denklem genel formda aşağıdaki biçimi alır.

$$\begin{aligned} -\theta v_{j-1}^{n+1} + \left( \frac{h^2}{\tau} + 2\theta \right) v_j^{n+1} - \theta v_{j+1}^{n+1} \\ = (1-\theta)v_{j-1}^n + \left( \frac{h^2}{\tau} + 2(\theta-1) \right) v_j^n + (1-\theta)v_{j+1}^n + G(x,t) \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\frac{v_1^n - v_{-1}^n}{2h} = \eta_1^n \Rightarrow v_{-1}^n = v_1^n - 2h\eta_1^n$$

$$\frac{v_{M+1}^n - v_{M-1}^n}{2h} = \eta_2^n \Rightarrow v_{M+1}^n = v_{M-1}^n + 2h\eta_2^n$$

Denklemler açık olarak yazılmak istenirse,

$j=0,$

$$\left( \frac{h^2}{\tau} + 2\theta \right) v_0^{n+1} - 2\theta v_1^{n+1} + 2h\theta\eta_1 = \left( \frac{h^2}{\tau} + 2(\theta-1) \right) v_0^n + 2(1-\theta)v_1^n + 2(\theta-1)h\eta_1 + G(x,t)$$

$j=1,2,\dots,M-1;$

$$\begin{aligned} -\theta v_{j-1}^{n+1} + \left( \frac{h^2}{\tau} + 2\theta \right) v_j^{n+1} - \theta v_{j+1}^{n+1} \\ = (1-\theta)v_{j-1}^n + \left( \frac{h^2}{\tau} + 2(\theta-1) \right) v_j^n + (1-\theta)v_{j+1}^n + G(x,t) \end{aligned}$$

$j=M,$

$$\begin{aligned}
& -2\theta v_{M-1}^{n+1} + \left(\frac{h^2}{\tau} + 2\theta\right) v_M^{n+1} - 2h\theta\eta_2 \\
& \quad = 2(1-\theta)v_{M-1}^n + \left(\frac{h^2}{\tau} + 2(1-\theta)\right) v_M^n + 2(1-\theta)h\eta_2 + G(x, t)
\end{aligned}$$

ifadeleri elde edilir. Genel halde sistem matris formunda

$$CV^{n+1} = D + G \quad (5.7)$$

şeklinde yazılabilir. Burada,

$$C = \begin{pmatrix} \frac{h^2}{\tau} + 2\theta & -2\theta & & & & \\ -\theta & \frac{h^2}{\tau} + 2\theta & -\theta & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & & \\ & & & & -\theta & \frac{h^2}{\tau} + 2\theta & -\theta \\ & & & & & -2\theta & \frac{h^2}{\tau} + 2\theta \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} \frac{h^2}{\tau} + 2(\theta-1) & 2(1-\theta) & & & & \\ 1-\theta & \frac{h^2}{\tau} + 2(\theta-1) & 1-\theta & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & & \\ & & & & 1-\theta & \frac{h^2}{\tau} + 2(\theta-1) & 1-\theta \\ & & & & & 2(1-\theta) & \frac{h^2}{\tau} + 2(\theta-1) \end{pmatrix}$$

$g_i = G(x_i, t)$  olmak üzere,

$$G = \begin{bmatrix} g_1 + 2(\theta-1)h\eta_1^n - 2h\theta\eta_1^{n+1} \\ g_2 \\ \vdots \\ g_M \\ g_{M+1} + 2(1-\theta)h\eta_2^n + 2h\theta\eta_2^{n+1} \end{bmatrix}$$

biçimindedir.

**6. Sayısal bir Örnek:**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + pu + (1 - \pi^2) \exp(-t^2) \sin(\pi x) - 1 + 2t \quad 0 < x < 1; 0 < t \leq 1 \quad (6.1)$$

$$u(x, 0) = 1 - \sin(\pi x) \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (6.2)$$

$$u_x(0, t) = -\pi \exp(-t^2) \quad 0 < t \leq 1 \quad (6.3)$$

$$u_x(1, t) = \pi \exp(-t^2) \quad 0 < t \leq 1 \quad (6.4)$$

$$\int_0^{s(t)} u dx = \frac{1}{2}(1+t) - \frac{\exp(-t^2)}{\pi} \left[ 1 + \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) \right] \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (6.5)$$

denklemleri başlangıç ve sınır koşulları ile birlikte verilsin. Burada,

$$s(t) = \frac{1}{2}(1+t)$$

dır. Denklemin analitik çözümü,

$$u(x, t) = 1 - \exp(-t^2) \sin(\pi x)$$

p(t) ve r(t)'nin analitik çözümü ise

$$p(t) = 1 - 2t, \quad r(t) = \exp(t^2 - t)$$

dır.

(6.1-6.4) denklem sistemine (3.3) denklemine verilen dönüşümler uygulanırsa PDE olarak adlandırılan

$$v_t = v_{xx} + (1 - \pi^2) \exp(-t) \sin(\pi x) - (1 - 2t) \exp(t^2 - t) \quad 0 < x < 1; 0 < t \leq 1 \quad (6.6)$$

$$v(x, 0) = 1 - \sin(\pi x) \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (6.7)$$

$$v_x(0, t) = -\pi \exp(-t) \quad 0 < t \leq 1 \quad (6.8)$$

$$v_x(1, t) = \pi \exp(-t) \quad 0 < t \leq 1 \quad (6.9)$$

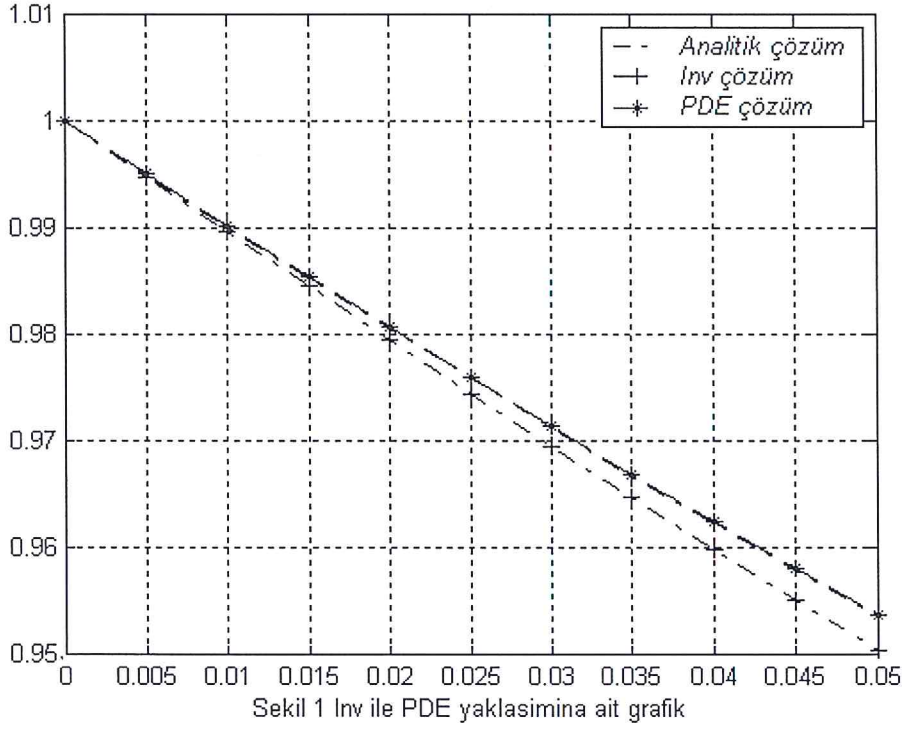
$$\int_0^{s(t)} v dx = \frac{1}{2}(1+t) - \frac{\exp(-t^2)}{\pi} \left[ 1 + \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) \right] \exp(t^2 - t) \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (6.10)$$

denklemler sistemi elde edilir. Bu denklemin farklı zamanlarda nümerik çözümleri analitik çözümler ile karşılaştırmalı olarak aşağıda verilmiştir.

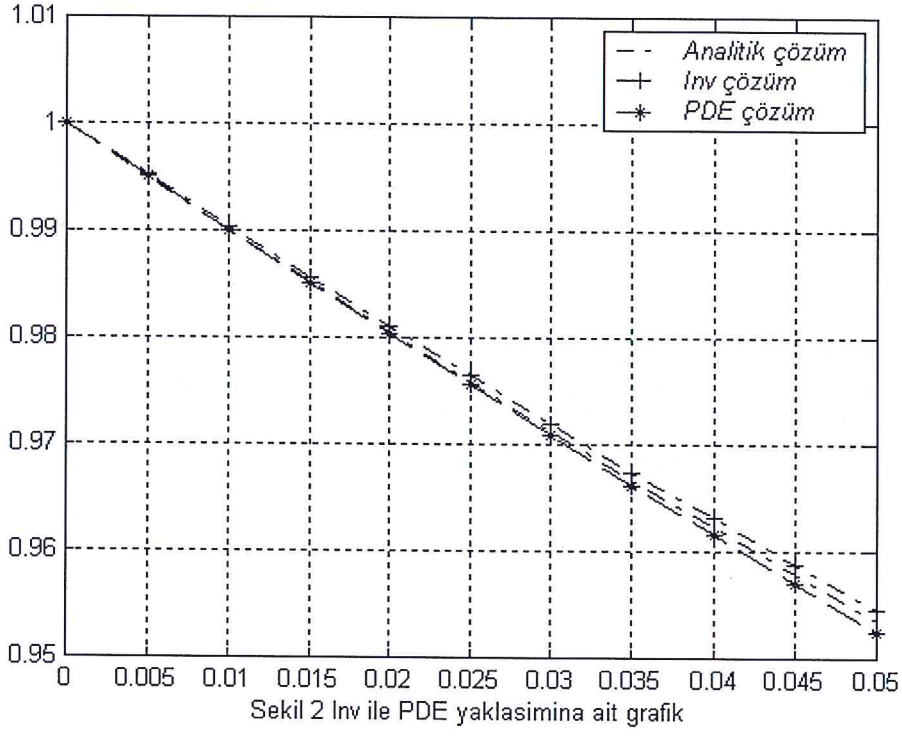
Tablo1  $\theta=1/2$ (CN) için r(t)'nin PDE ve Inv. Yaklaşımlarına ait sonuçlar

t	AnolitikÇözüm	Inv.Çözüm	PDEÇözüm	PDEHata	Inv.Hata
0	1.000000000	1.000130512	1.000144093	0.000130514	0.00144099
0.005	0.995037355	0.994887523	0.995188314	0.000149832	0.000150960
0.01	0.990148844	0.989709609	0.990308838	0.000439234	0.000159993
0.015	0.985333615	0.984595519	0.985503956	0.000738095	0.000170342
0.02	0.980590831	0.979544006	0.980772044	0.001046827	0.000181212
0.025	0.975919671	0.974553876	0.976111572	0.001365804	0.000191900
0.03	0.971319328	0.969623917	0.971521059	0.001695419	0.000201730
0.035	0.966789008	0.964752957	0.966999072	0.002036066	0.000210064
0.04	0.962327933	0.959939802	0.962544210	0.002388140	0.000216277
0.045	0.957935338	0.955183292	0.958155195	0.002752054	0.000219857
0.05	0.953610473	0.950482278	0.953830849	0.003128197	0.000220375



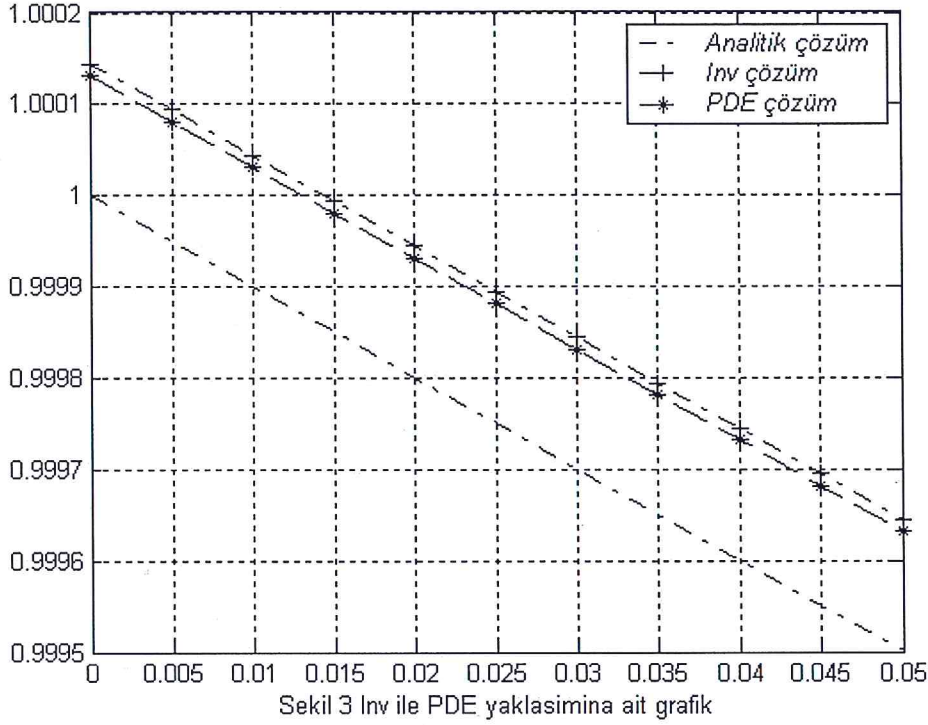
Tablo2  $\theta=1$  için  $r(t)$ 'nin PDE ve Inv. Yaklaşımlarına ait sonuçlar

t	AnolitikÇözüm	Inv.Çözüm	PDEÇözüm	Inv.Hata	PDE.Hata
0	1.000000000	1.000144093	1.000130514	0.000130514	0.000130514
0.005	0.995037355	0.995268951	0.995107753	0.000130597	0.000070399
0.01	0.990148844	0.990469170	0.990145518	0.000130681	0.000003325
0.015	0.985333615	0.985743023	0.985242918	0.000130761	0.000090697
0.02	0.980590831	0.981088789	0.980399271	0.000130843	0.000191560
0.025	0.975919671	0.976504893	0.975614050	0.000130925	0.000305622
0.03	0.971319328	0.971989864	0.970886713	0.000131005	0.000432615
0.035	0.966789008	0.967542313	0.966216649	0.000131085	0.000572359
0.04	0.962327933	0.963160996	0.961603226	0.000131160	0.000724707
0.045	0.957935338	0.958844794	0.957045683	0.000131242	0.000889656
0.05	0.953610473	0.954592755	0.952543193	0.000131319	0.001067280



Tablo3  $\theta=0$  için  $r(t)$ 'nin PDE ve Inv. Yaklaşımlarına ait sonuçlar

t	AnalitikÇözüm	Inv.Çözüm	PDEÇözüm	Inv.Hata	PDE.Hata
0.00000	1.000000000	1.000144094	1.000130514	0.000144094	0.000130514
0.00005	0.999950003	1.000094146	1.000080601	0.000144142	0.000130597
0.00010	0.999900015	1.000044207	1.000030696	0.000144192	0.000130681
0.00015	0.999850034	0.999994273	0.999980795	0.000144240	0.000130761
0.00020	0.999800060	0.999944350	0.999930903	0.000144290	0.000130843
0.00025	0.999750094	0.999894434	0.999881018	0.000144340	0.000130925
0.00030	0.999700135	0.999844525	0.999831140	0.000144390	0.000131005
0.00035	0.999650184	0.999794625	0.999781268	0.000144441	0.000131085
0.00040	0.999600240	0.999744731	0.999731400	0.000144491	0.000131160
0.00045	0.999550304	0.999694846	0.999681546	0.000144542	0.000131241
0.00050	0.999500375	0.999644969	0.999631693	0.000144594	0.000131319



Sekil 3 Inv ile PDE yaklasimina ait grafik

## 7. Sonuç ve Tartışma

Bu çalışmada bir boyutlu ters problemlere farklı nümerik yöntemler, sonlu fark metodları kullanılarak uygulanmıştır. Ayrıca sonuçlar tam çözümlerle karşılaştırılarak, tablo ve grafikler aracılığı ile verilmiştir.

Önerilen nümerik yöntem model problemi yeteri doğrulukta çözmektedir. Açık yöntem olarak (1,3) FTCS(Forward Time Centered Space) ve 5- nokta FTCS, kapalı yöntem olarak (3,1) BTCS(Backward Time Centered Space Method), (3,3) Crandall, (3,3) Crank-Nicolson ve (5,5) Crank-Nicolson yöntemleri uygulanmıştır. Ağırlıklı ortalama yaklaşımı kullanılarak ters problemlerin çözümünde karşımıza çıkan kontrol parametresi, yaklaşık türevlerin hesaplanmasında kullanılan enterpolasyon tekniklerinden yararlanılarak belirlenmiştir. Açık sonlu fark yöntemleri kullanım açısından oldukça uygun ve ekonomiktir. Açık ve Kapalı yöntemlerle elde edilen sonuçlar problemin analitik çözümünden elde edilen değerler ile karşılaştırılmıştır. Açık yöntemin kapalı yöntemle oranla daha az CPU zaman gerektirdiği gözlenmiştir.

Burada kullanılan yöntemler hata açısı bakımından ele alındığında uygulanabilir oldukları gözlenmiş ve bundan sonraki çalışmalara ışık tutacağı varsayılmaktadır.

## Kaynaklar

1. Wang, S., Lin, Y. "A Finite Difference Solution to an Inverse Problem for Determining a Control Function in a Parabolic Partial Diferential Equation" Inverse Problem 5, 631-640(1989)
2. Dehghan, M."An Inverse Problem of Finding a Source Parameter in a Semilinear Parabolic Equation", Appl. Math. Modelling, 25, 743-75(2001)
3. Dehghan, M."Finding a Control Parameter in One-Dimensional Parabolic Equations" Appl. Math. Com., 135, 491-503(2003)

4. Dehghan, M. "Numerical Solution of one Dimensional Parabolic Inverse Problem" Appl. Math. Comp., 136, 333-344(2003)
5. Hildebrand, F.B., "Introduction to Numerical Analysis" Dover Publications, New York,(1987)
6. Smith, G.D. "Numerical Solution of Partial Differential Equations" Clarendon Press, Oxford,(1985)
7. Warming R.F., Hyett B.J., "The Modified Equation Approach to the Stability and Accuracy Analysis of Finite-Difference Methods" J.Compt. Physics., 14, 159-179(1973)
8. Türker, S., Engin, C., "Bilgisayar Uygulamalı Sayısal Analiz Yöntemleri", Değişim Yayınları, Adapazarı,(1999)
9. Fatullayev, A., Can, E., "Numerical procedures for determining unknown source parameter in parabolic equations" Math. Comp. and Sim., 54, 159-167(2000)
10. Cannon, J.R., Lin, Y., Wang, S., "Determination of source parameter in parabolic equations", Meccanica, 27, 85-94,(1992)
11. Dehghan, M., "Determination of a control parameter in a one dimensional parabolic equation using the method of radial basis functions" Math. Comput. Mod., 44, 1160-1168(2006)
12. Mitchell, A.R., Griffiths, D.F., The finite difference method in Partial Differential Equation, T. Wiley,(1980)
13. Cranc, J., Nicolson P., "A practical method for numerical evaluation of solutions of Partial Differential Equation of the heat-conduction type" Proc. Camb. Philos. Soc. 43(1), 50-67(1947)