S Ü Fen Ed Fak Fen Derg Sayı 27 (2006) 1- 8, KONYA

Bir Sınıf Jacobi Matrisi İçin Özdeğer Problemi[1]

Ozan ÖZKAN*

Selçuk Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü 42079 Kampüs, Konya

Özet : Bu çalışma; $n \times n$ simetrik Jacobi matrislerinin özdeğerleri üzerine bazı yeni sonuçları içermektedir. Ele alınan problem; simetrik Jacobi matrisler ailesinin özel bir halidir. Burada ele alınan simetrik Jacobi matrisi, bir sınıf hiperbolik tip diferensiyel denklemin fark denklemi hale getirilmesi sonucu oluşan katsayılar matrisi ile aynıdır [4]. Elde edilen sonuçlar; bazı diferensiyel denklem sistemlerinin çözümünün davranışını irdelemeye imkan verir.

Anahtar sözcükler: Özdeğer, simetrik Jacobi matrisi, Diferensiyel Denklemler

Eigenvalue Problem For A Class Of Jacobi Matrices

Abstract: This study contains some new results about the eigenvalues of a $n \times n$ symmetric Jacobi matrix. The problem is a special kind for the of family of the symmetric Jacobi matrices. The symmetric Jacobi matrix in this paper, is the same as the coefficient matrix obtained by converting one class of hyperbolic type differential equation into difference equation [4]. The obtained results enable to analyses the behavior of the solution of the system of some differential equations.

Key words: Eigenvalue, symmetric Jacobi matrix, Differential equations

1.Giriş

Bu çalışmada bir sınıf simetrik Jacobi matrisinin özdeğerleri ve bu özdeğerlerin davranışı incelenecektir. Jacobi matrislerinin çözümlerinin varlık ve tekliklerinin temel teorisi litaratürde mevcuttur [5,6]. Simetrik Jacobi matrisleri genel olarak,

$$J = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & & & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & c_2 & a_3 & b_3 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . & & . \\ . & . & . & . & . & & b_{n-1} \\ 0 & . & . & . & c_{n-1} & & a_n \end{pmatrix}_{nxn} \tag{1.1}$$

---

[1] Bu makale Yüksek Lisans tezinin bir bölümüdür.

* E-mail: oozkan@selcuk.edu.tr

biçiminde verilen ve $c_i = b_i$, $i = \overline{1, n-1}$ şartını sağlayan matrisler olarak tanımlanmaktadır [7]. İkinci bölümde; (1.1) ile gösterilen simetrik Jacobi matrisilerinden özel bir matris ele alınacaktır. Bu matris; $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları sürekli fonksiyonlar, a, b katsayıları reel sayı ve $\ell > 0$ için

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + b \frac{\partial U}{\partial t} = 0 \quad , \quad (t, x) \in Q \equiv R_+ \times [0, \ell] \tag{1.2}$$

$$U(t, 0) = U(t, \ell) = 0 \quad , \quad t \geq 0 \tag{1.3}$$

$$U(0, x) = f(x) \quad U_t(0, x) = g(x) \quad , \quad x \in [0, \ell] \tag{1.4}$$

biçiminde verilen lineer hiperbolik diferensiyel denkleminin aşağıda gösterileceği gibi fark denklemi halinde yazılması sonucu elde edilen katsayılar matristir [4]. Yeterli kadar büyük n doğal sayısı için $[0, \ell]$ aralığında aşağıdaki gibi noktalar belirleyip uzaklığa bağlı sonlu farklar yöntemi kullanılarak; (1.2)-(1.4) problemi sonlu farklar problemine dönüştürülsün [1,8].

$x_j = j \dfrac{\ell}{n+1}$, $j = \overline{0, n+1}$ olmak üzere (1.2)-(1.4) problemine uygun sonlu farklar yöntemiyle oluşturulmuş problem;

$$U''(t, x_i) + bU'(t, x_i) - \frac{(n+1)^2 a^2}{\ell^2} \left(U(t, x_{i+1}) - 2U(t, x_i) + U(t, x_{i-1}) \right) = 0, \; i = \overline{1, n} \tag{1.5}$$

$$U(t, x_0) = U(t, x_{n+1}) = 0 \tag{1.6}$$

$$U(0, x_i) = f(x_i) \quad , \quad U'(0, x_i) = g(x_i) \quad i = \overline{1, n} \tag{1.7}$$

olur. Yukarıda her bir i değeri için n tane denklemden elde edilen sistemde;

$$\overline{U} = \begin{pmatrix} U(x_1) \\ . \\ . \\ . \\ U(x_n) \end{pmatrix} , \quad \overline{f} = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ . \\ . \\ . \\ f(x_n) \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad \overline{g} = \begin{pmatrix} g(x_1) \\ . \\ . \\ . \\ g(x_n) \end{pmatrix}$$

eşitlikleri ile $1 \times n$ boyutlu vektörleri,

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 1 \\ 0 & 0 & . & . & . & 1 & -2 \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

ile de $n \times n$ boyutlu matrisi gösterilirse (1.5)-(1.7) probleminden aşağıdaki ifadeyi elde edilir [9,10,11].

$$\overline{U}'' + b\,\overline{U}' - \frac{(n+1)^2 a^2}{\ell^2} A\,\overline{U} = 0 \tag{1.9}$$

$$\overline{U}(0) = \overline{f} \quad , \quad \overline{U}'(0) = \overline{g} \tag{1.10}$$

Bu çalışmada (1.9)-(1.10) probleminin çözümünden ziyade (1.9) denklemindeki (1.8) ile gösterilen A matrisi incelenecektir. Ele alınan matrisin karakteristik polinomu vasıtasıyla sırasıyla; özdeğerlerin tanımlanmış oldukları aralık, bu aralıkta nasıl sıralandıkları ve davranışları incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar matrisin elemanlarına bağlı olduğundan, bu çalışma matrisin elemanlarına bağlı olarak özdeğerlerin sınıflandırılması için yeni bir karakterasyon vermiş olacaktır.

2. Simetrik üçlü bant matrisin öz değerleri

Bu bölümde n-mertebeden (1.8) matrisinin spektral yapısı incelenecektir.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & ... & & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 ... & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 1 \\ 0 & . & . & . & 1 & -2 \end{pmatrix}_{nxn}$$

Biliniyor ki keyfi A matrisinin özdeğerlerini ve özvektörlerini bulmak için,

$$A\,\varphi = \lambda\,\varphi$$

denkleminden faydalanılır [1,2,3]. Bu sistem homojen sistem olduğundan; bilindiği gibi sıfırdan faklı çözümünün olabilmesi için A-λE matrisinin determinantının sıfıra eşit olması lazımdır. Bunun için aşağıdaki formda tanımlanmış $P_n(\lambda)$ polinomunu incelemek yeterlidir.

$$P_n(\lambda) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 1 & -2-\lambda & 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 1 & -2-\lambda & 1 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & 1 \\ 0 & . & . & . & 0 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} \qquad (2.1)$$

Lemma 2.1.

$\forall n \geq 3$ için; $P_n(\lambda) = (-2-\lambda)\,P_{n-1}(\lambda) - P_{n-2}(\lambda)$ (2.2)

eşitliği doğrudur.

İspat : Yukarıdaki (2.1) determinantının değeri birinci satırı kullanarak hesap edilirse;

$$P_n(\lambda) = (-2-\lambda)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & 0 & ... & 0 \\ 1 & -2-\lambda & 1 & ... & 0 \\ . & . & . & & 0 \\ & & & & 1 \\ 0 & 0 & 1 & & -2-\lambda \end{vmatrix}_{(n-1)x(n-1)} +$$

$$1(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & & ... & 0 \\ 0 & -2-\lambda & 1 & 0 & ... & 0 \\ . & . & . & . & . & \\ . & . & . & . & . & \\ . & . & . & . & 1 & \\ 0 & ... & 0 & 1 & -2-\lambda & \end{vmatrix}_{(n-1)x(n-1)}$$

olur. Elde edilen yukarıdaki eşitlikteki toplamın birinci determinantı $P_{n-1}(\lambda)$' ya eşittir. Toplamın ikinci determinantının değeri ise; birinci sütun kullanılarak hesap edilirse değerinin $P_{n-2}(\lambda)$' ya eşit olduğunu görülür. Böylelikle (2.2) bağıntısının doğruluğu ispatlanır.

Sonuç 2.2.

$\forall n \geq 1$ için $P_n(-4-\lambda) = (-1)^n P_n(\lambda)$ (2.3)

dır.

İspat : $P_n(\lambda)$' nın tanımından ,

$P_1(\lambda) = -2-\lambda$, $P_2(\lambda) = (2+\lambda)^2-1$

değerleri kolaylıkla bulunabilir. Bu değerler indüksiyon metodunun ilk aşaması olarak (2.3)' ün doğruluğunu kontrol için kullanırsa;

$P_1(-4-\lambda) = -2-(-4-\lambda) = 2+\lambda = -P_1(\lambda)$

$P_2(-4-\lambda) = (2+\lambda)^2-1 = (-1)^2P_2(\lambda)$

eşitlikleri bulunur. Bu ise n = 1 ve n = 2 için (2.3) ün doğru olduğunu gösterir.İkinci aşama olarak varsayalım ki; $n = k$-1 ve $n = k$ için (2.3) eşitliği doğru olsun. $n = k$+1 için doğru olduğu gösterilmelidir. (2.2) formülüne göre,

$$P_{k+1}(-4-\lambda) = (2+\lambda)P_k(-4-\lambda) - P_{k-1}(-4-\lambda)$$
$$= (2+\lambda)(-1)P_k(\lambda) - (-1)^{k-1}P_{k-1}(\lambda)$$
$$= (-1)^{k+1}[(-2-\lambda)P_k(\lambda) - P_{k-1}(\lambda)] = (-1)^{k+1}P_{k+1}(\lambda)$$

olur. Bu $\forall\, n \geq 1$ için (2.3) eşitliğinin doğru olduğunu gösterir.

Sonuç 2.3.

$\forall\, n \geq 1$ için aşağıdaki eşitlikler doğrudur

$$P_n(0) = (-1)^n (n+1) \qquad (2.4)$$
$$P_n(-4) = n+1 \qquad (2.5)$$

İspat: (2.5) eşitliğinin doğruluğu (2.3) ve (2.4) den kolayca görülür. Bu nedenle sadece (2.4) eşitliğinin doğru olduğunun ispatlanması yeterli olacaktır. Yine indüksiyon metodunu kullanılırsa,

n = 1 ve n = 2 için; $P_1(0) = -2$, $P_2(0) = 3$

olur. (2.4) eşitliğinin $n = k$-1 ve $n = k$ için doğru kabul edip, $n = k$+1 için doğru olduğu gösterilmelidir. (2.2) den dolayı ;

$$P_{k+1}(0) = -2P_k(0) - P_{k-1}(0) = (-2)(-1)^k(k+1) - (-1)^{k-1}k$$
$$= (-1)^{k+1}(2k+2-k)$$
$$= (-1)^{k+1}((k+1)+1)$$

olur. Bu ise (2.4) ün $n = k$+1 için doğru olması demektir. Böylelikle Sonuç 2.3' ün ispatı yapılmış olur.

Teorem 2.4.

$P_n(\lambda)$ ve $P_{n-1}(\lambda)$ polinomlarının kökleri aşağıdaki formda sıralanmışlardır.

$$-4 < \lambda_i^{(n)} < \lambda_i^{(n-1)} < \ldots < \lambda_{n-i}^{(n-1)} < \lambda_n^{(n)} < 0 \quad , \quad i = \overline{1,n}$$

$n=2k+1$, $\forall k \geq 0$ için , $P_n(-2) = 0$

ve kökler $\lambda = -2$ noktasına göre simetriktir.

İspat: Köklerin $\lambda = -2$ noktasına göre simetrikliği Sonuç 2.2.'den görülebilir. Lemma 2.1' deki (2.2) eşitliğinden de

$$P_n(-2) = -P_{n-2}(-2)$$

dir. Buradan her $k \geq 1$ için

$$P_{2k-1}(-2) = -P_{2k-3}(-2) = \ldots = (-1)^{k-1}P_1(-2) = 0$$

olur.Teoremin esas hükmünü ispatlamak için burada da indüksiyon metodu kullanılacaktır.

n = 1 ve n = 2 için;

$$P_1(\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad -2-\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -2$$
$$P_2(\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad (-2-\lambda)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -3, \;\; \lambda_2 = -1$$

dir. $P_{k-1}(\lambda)$ ve $P_k(\lambda)$ için teoremin hükmü doğru olsun. Yani, bu polinomların sırasıyla (k-1) ve (k) sayıda negatif, aynı zamanda $\lambda = -2$ noktasına göre simetrik olan kökleri mevcut olsun ve $P_{k-1}(\lambda)$ nın kökleri $P_k(\lambda)$ nın kökleri arasına girsin. Köklerin negatif ve $\lambda = -2$' ye göre simetrikliğinden anlaşılıyor ki, kökler (-4, 0) aralığında tanımlıdır. Bu kökler sırasıyla,

$\lambda_i^{(k-1)}$, $i = \overline{1,k-1}$

$\lambda_i^{(k)}$, $i = \overline{1,k}$

şeklinde gösterilirse,

$$-4 < \lambda_i^{(k)} < \lambda_i^{(k-1)} < \ldots < \lambda_{k-i}^{(k-1)} < \lambda_k^{(k)} < 0$$

olur. Bu ise ;

$$\lambda_i^{(k)} = -4 - \lambda_{k+1-i}^{(k)} \qquad (\mathrm{i} = \overline{1,\mathrm{k}})$$

$$\lambda_i^{(k-1)} = -4 - \lambda_{k-i}^{(k-1)} \qquad (\mathrm{i} = \overline{1,\mathrm{k-1}})$$

demektir.

Buradan $P_{k+1}(\lambda)$ için teoremin hükmünün doğruluğu görülür. Kökler simetrik olduğundan (-4,-2) veya (-2,0) aralıklarından sadece birinde inceleme yapmak yeterli olacaktır. $P_k(\lambda)$ ve $P_{k-1}(\lambda)$ polinomlarını çarpanlarına ayrıldığında,

$$\left.\begin{aligned} P_{k-1}(\lambda) &= (-1)^{k-1}(\lambda-\lambda_1{}^{k-1})(\lambda-\lambda_2{}^{k-1})...(\lambda-\lambda_{k-1}{}^{k-1}) \\ P_k(\lambda) &= (-1)^k(\lambda-\lambda_1{}^k)(\lambda-\lambda_2{}^k)...(\lambda-\lambda_k{}^k) \end{aligned}\right\} \qquad (2.6)$$

olur. $[-4,-2]$ aralığında $P_{k+1}(\lambda)=0$ denkleminin köklerini bulunsun. $[-4,-\lambda_1^{(k)}]$ aralığının uçlarında $P_{k+1}(\lambda)$ 'nın işareti incelenirse, (2.5)' den

$$P_{k+1}(-4) = k+2 > 0$$

olur. (2.2) formülünden ;

$$P_{k+1}(\lambda_1{}^{(k)}) = (-2-\lambda_1{}^{(k)})P_k(\lambda_1{}^{(k)}) - P_{k-1}(\lambda_1{}^{(k)})$$

olup, burada (2.6) kullanırsa;

$$P_k(\lambda_1{}^{(k)}) = 0 \text{ ve } P_{k-1}(\lambda_1{}^{(k)}) > 0$$

olur ki, bu

$$P_{k+1}(\lambda_1{}^{(k)}) < 0$$

olmasını gerektirir. Bu ise Cauchy teoreminden; $\exists\lambda_1{}^{(k+1)} \in (-4,\lambda_1{}^{(k)}) \ni P_{k+1}(\lambda_1{}^{(k+1)}) = 0$ olması demektir.

Şimdi $[\lambda_i{}^{(k-1)},\lambda_{i+1}{}^{(k)}]$ $i=1,2,...,\left[\dfrac{k-1}{2}\right]$ parçalarının uçlarında $P_{k+1}(\lambda_1\ )$ nın işaretleri bakılmalıdır. (2.2) formülünden;

$$P_{k+1}(\lambda_i{}^{(k-1)}) = (-2-\lambda_i{}^{(k-1)})P_k(\lambda_i{}^{(k-1)}) - P_{k-1}(\lambda_i{}^{(k-1)}) = 0$$

dır. (2.6) den dolayı ;

$$P_{k+1}(\lambda_i{}^{(k-1)}) = (-2-\lambda_i{}^{(k-1)})P_k(\lambda_i{}^{(k-1)}) \qquad (2.7)$$

(2.6) daki ikinci eşitlikten dolayı $P_k(\lambda_i{}^{(k-1)})$ nin işareti , $(-1)^k.(-1)^{k-i} = (-1)^i$ olur. Bu sonuç ve $\lambda_i{}^{(k-1)} \in (-4,-2)$ olduğu (2.7) de göz önüne alınırsa; $P_{k+1}(\lambda_i{}^{(k-1)})$ nin işareti $(-1)^i$ olur. (2.6) ve (2.2) ye göre

$$P_{k+1}(\lambda_{i+1}{}^{(k)}) = -P_{k-1}(\lambda_{i+1}{}^{(k)}) \qquad (2.8)$$

dır. (2.6) 'e göre de $P_{k-1}(\lambda_{i+1}{}^{(k)})$ nın işareti $(-1)^{k-1}(-1)^{l-1-i} = (-1)^i$ olur. Bu (2.8)'de göz önüne alınırsa; $P_{k+1}(\lambda_{i+1}{}^{(k)})$ nın işareti $(-1)^{i+1}$ olur.

Yine Cauchy teoreminden;

$$\exists\lambda_{i+1}{}^{(k+1)} \in \left(\lambda_i{}^{(k-1)},\lambda_{i+1}{}^{(k)}\right) \ i=1,2,...,\left[\frac{k-1}{2}\right] \ni P_{k+1}(\lambda_{i+1}{}^{(k+1)}) = 0$$

olur. Böylelikle (-4,-2) aralığında $P_{k+1}(\lambda)$ nın toplam olarak $\left[\dfrac{k+1}{2}\right]+1$ tane kökü olduğunu bulunmuş olur. *k* 'nın tek veya çift sayı oluşuna göre köklerin sayısına bakılırsa;

I) Eğer k tek ise; (-4,-2) aralığında $P_{k+1}(\lambda)$ nın köklerinin sayısı $\dfrac{k+1}{2}$ olur. Simetri özelliğinden (-4,0) aralığında köklerin toplam sayısı (*k*+1) dir.

II) Eğer *k* çift olursa, (-4,-2) aralığında $P_{k+1}(\lambda)$ nın köklerinin sayısı $\frac{k}{2}$ olur. Simetri özelliğinden (-2,0) aralığındaki köklerin sayısı $\frac{k}{2}$ olur.

$\lambda = -2$; $P_{k+1}(\lambda)$ nın kökü olduğundan (-4,0) aralığında köklerin toplam sayısı (*k*+1) bulunur.

Teoremin ispatından anlaşılır ki $P_n(\lambda)$ nın kökleri $P_{k+1}(\lambda)$ nın kökleri arasına yerleşir.

Teorem 2.5.

$P_n(\lambda)$ polinomunun kökleri için, $\begin{array}{l} \lambda_1^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} -4 \\ \lambda_n^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{array}$, limitler doğrudur.

Bu teoremin ispatı aşağıda ispatı yapılacak olan lemmaların bir sonucudur. Ayrıca bu lemmalarda Teorem 2.5' de söylenen limitlerin yakınsama hızları da incelenecektir.

İlk olarak; $\lambda_n^{(n)}$ nin sıfıra yakınsama hızına bakalım.

Öncelikle genel terimleri ; $\mu_n = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}$ ve $\chi_n = \frac{2n}{2n-1}$ şeklinde olan dizileri göz önüne alalım $\exists m_0 > 1$ seçelim ki $\forall \lambda \in \left[-4, -4 + \mu_{m_0}\right]$ için

$$\frac{(3+\lambda)(1+\lambda)}{(-2-\lambda)} > \chi_{m_0} \tag{2.9}$$

olsun. Bu m_0'ların varlığı aşağıdaki limitlerden açıktır.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1+\mu_n)(-3+\mu_n)}{(2-\mu_n)} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \chi_n = 1$$

Lemma 2.6.

$\forall \lambda \in \left[-4, -4 + \mu_{n+m_0-1}\right]$ için, $P_{n+1}(\lambda) > \chi_{n+m_0-1} P_n(\lambda)$ eşitsizliği vardır.

İspat: İspat indüksiyon metoduyla yapılırsa;

n =1 için, $P_1(\lambda) = -2 - \lambda$ $\qquad P_2(\lambda) = (2+\lambda)^2 - 1$

olur. (2.9) eşitsizliğinden $\forall \lambda \in [-4, -4 + \mu_{m_0}]$ için , $P_2(\lambda) > x_{m_0} P_1(\lambda)$ olur. Lemmanın hükmünün *n*=*k* için doğru kabul edip *n*=*k*+1 için bakılırsa;

$$\forall \lambda \in [-4, -4 + \mu_{k+m_0-1}] \text{ için, } P_{k+1}(\lambda) > \chi_{k+m_0-1} P_k(\lambda) \tag{2.10}$$

olup, $\forall \lambda \in [-4, -4 + \mu_{k+m_0}]$ için (2.2) formülünden

$$P_{k+2}(\lambda) = (-2-\lambda) P_{k+1} - P_k(\lambda) \tag{2.11}$$

$\mu_n > \mu_{n+1}$ olduğundan (2.10)-(2.11) den

$$P_{k+2}(\lambda) > \left(-2 - \lambda - \frac{1}{x_{k+m_0-1}}\right) P_{k+1}(\lambda)$$

$$\geq \left(2 - \mu_{k+m_0-1} - \frac{1}{x_{k+m_0-1}}\right) P_{k+1}(\lambda)$$

$$=\left(2-\frac{1}{2(k+m_0-1)}+\frac{1}{2(k+m_0-1)+1}-\frac{2(k+m_0-1)-1}{2(k+m_0-1)}\right)P_{k+1}(\lambda)$$

$$=\left(1+\frac{1}{2(k+m_0-1)+1}\right)P_{k+1}(\lambda)=\frac{2(k+m_0)}{2(k+m_0)-1}P_{k+1}(\lambda)=x_{k+m_0}P_{k+1}(\lambda)$$

dır.

Lemma 2.7.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lambda_n^{(n)}n^2\right)\le-\frac{1}{4}$$ limiti doğrudur.

İspat:

$\forall\lambda\in\left[-4,-4+\mu_{n+m_0-2}\right]$ için,

$$P_1(\lambda)=-2-\lambda\ge2-\mu_{n+m_0-2}=2-\frac{1}{2(n+m_0-2)}+\frac{1}{2(n+m_0-2)+1}>0$$

ve $\chi_n>1$ olduğundan Lemma 2.6.' ya göre

$$P_n(\lambda)>P_{n-1}(\lambda)>...>P_1(\lambda)>0$$

olur. Buradan anlaşılıyor ki $[-4,-4+\mu_{n+m_0-2}]$ aralığında $P_n(\lambda)$ nın kökü yoktur.

Sonuç 2.2' den anlaşılır ki, $[-\mu_{n+m_0-2},0]$ parçasında da $P_n(\lambda)$ nın kökü yoktur. Buradan da

$$\lambda_n^{(n)}<-\mu_{n+m_0-2}$$

elde edilir. Böylelikle

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\lambda_n^{(n)}n^2\right)\le\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(-\mu_{n+m_0-2}n^2\right)=-\frac{1}{4}$$

olur $\therefore$

Teorem 2.5 İçin İspat

Teorem 2.4.'e göre

$$\lambda_1^{(n)}>\lambda_1^{(n+1)}>\lambda_1^{(n+2)}>...>-4$$

yani; $\left\{\lambda_1^{(n)}\right\}$ dizisi monoton azalan ve alttan sınırlı olduğundan bir noktaya yakınsar. Yani;

$$\lambda_1^{(n)}\xrightarrow[n\to\infty]{}\alpha\ge-4\,,$$

Benzer olarak

$$\lambda_{n-1}^{(n-1)}<\lambda_n^{(n)}<\lambda_{n+11}^{(n+1)}<...<0$$

yani; $\left\{\lambda_n^{(n)}\right\}$ dizisi monoton artan ve üstten sınırlı olduğundan bir noktaya yakınsar. Başka bir değişle $\lambda_n^{(n)}\xrightarrow[n\to\infty]{}\beta\le0$ olur. Ancak Lemma 2.7' den β= 0 bulunur. Aynı zamanda $\lambda_n^{(n)}=-4-\lambda_1^{(n)}$ olduğundan α= -4 dür. Böylelikle sadece teoremin ispatı yapılmakla kalınmayıp, köklerin yakınsama hızları da bulunmuş olur. Yani, $\left\{\lambda_1^{(n)}\right\}$ ve $\left\{\lambda_n^{(n)}\right\}$ dizilerinin kendi limitlerine hangi hızla yaklaştığı görülür.

2. Sonuçlar

Bu çalışmada bir sınıf *n*-ninci mertebeden simetrik Jacobi matrisinin özdeğerleri incelenmiştir. Ele alınan problem için; özdeğerlerin tanımlı olduğu aralık, bu aralıktaki yerleri ve yakınsadıkları değerler hakkında yeni bir karektrizasyon elde edilmiştir. Bu sonuçlar; simetrik

Jacobi matrisinin elemanlarına bağlı olarak özdeğerleri hakkında bilgi edinilmesine imkan tanımıştır.

3. Kaynaklar

1. Alan Jeffrey, "**Linear Algebra And Ordinary Differential Equations**" CRC press, Inc., Boca Raton Ann Arbor. London, Tokyo,(1993).
2. Kurosh, "**Higher Algebra**", Mır Publıshers, Moscow, (1975).
3. John T. Moore, "**Elements Of Linear Algebra And Matrix Theory**", New York, (1968).
4. O. Özkan, "**İkinci Mertebeden Lineer Hiperbolik Denklemler Üzerine Bazı Karışık Problemler"**, Yüksek Lisans Tezi, S.Ü. Fen Bilimleri Enst., Konya, (1999).
5. Hochstandt H., "**On Construction Of A Jacobi Matrices**", Lin. Alg. Appl., 8, 435-446, (1974).
6. Hald O., "**Inverse Eigenvalue Problems For Jacobi Matrices**", Lin. Alg. Appl.,14, 63-85, (1976).
7. M. Marcus, H. Minc, "**A Survey Of Matrix Theory And Matrix İnequalities**", Dover Publications, NewYork, 166-167, (1964) .
8. Courant-Hilbert, "**Methods of Mathematical Physics**", Interscıence Publıshers, Inc., New York, (1953).
9. B. Aliev and A. Kh. Khanmamedov, "**Energy Estimates for Solutions of the Mixed Problem for Lineer second-order Hperbolic Equations**", Mathematical Notes, vol. 59, No.4, (1996).
10. S. G. Kreın, "**Linear Differential equations in Banach spaces (Russian)**". Ed. Nauka, Moscow, (1969).
11. J.-L. Lions, E. Magenes, "**Problemes aux limites nonhomogenes et applications**", vol.1, Dunod, Paris, (1968).