ARMAX Sistemlerinde Kontrol Problemi Üzerine Bir Çalışma

Fahrettin Arslan, Esin Köksal, Fikri Öztürk

Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, İstatistik Bölümü, Ankara

Özet: Bu çalışmada, ARMAX ile modellenen sistemlerde parametrelerin bilinmesi ve bilinmemesi durumları için kontrol problemi ele alınmaktadır. En-küçük varyans, LQG ve kutup kaydırmalı kontrol üzerinde durulup, bazıları için simulasyon çalışmaları yapılmaktadır.

Anahtar Kelimeler: ARMAX, Durum-uzay modeli, Kontrol

A Study on the Control Problem of ARMAX Systems

Abstract: This study dwells on the control problem of systems modeled by ARMAX in the cases of known and unknown parameters. Minimum-variance, LQG and Pole-shifting controls are considered and simulation studies are carried on some of them.

Keywords: ARMAX, State-Space Models, Control.

1. Giriş

Bir sistemde veya bu sistemi anlatan modelde kontrol problemi, belirlenmiş bazı şartlar altında, arzu edilen bir sistem çıktısının elde edilmesi için gereken girdinin bulunmasıdır. Model parametreleri bilinen bir sistemde kontrol problemi bir optimizasyon problemidir. Parametreler bilinmediğinde, yani sistemin hangi girdiye nasıl bir tepki göstereceği belli olmadığında, sistemi istenen şekilde kontrol etmek için verilmesi gereken girdiyi belirlemek kolay bir problem değildir. Sistem belirleme, sistemi anlatan modeldeki bilinmeyen parametreleri sistem üzerinde yapılan gözlemlerin oluşturduğu sistem çıktısına dayalı olarak tahmin etmektir. Sistem parametreleri zaman içinde değişebilir. Bir sistemde sistem belirleme ve kontrolun birlikte eş zamanlı olarak yürütülmesi uyarlamalı kontrol (adaptive control) olarak isimlendirilmektedir. Uyarlamalı kontrol sistem analizinin en çetin ve en çok çalışılan konularından birisi olup bu konu ile ilgili çok sayıda kitap ve makale bulunmaktadır [1].

Bu çalışmada, bilinmeyen ve zaman içinde değişmeyen parametreli ARMAX modellerinde kontrol problemi üzerinde durulmaktadır. Zaman parametresi k (k=0,1,2,3,$\ldots$) 'ye bağlı olarak, $Y(k)$ rasgele değişkeni sistem çıktısını ve $u(k)$ sistem girdisini göstermek üzere,

$$Y(k)+a_1Y(k-1)+a_2Y(k-2)+\ldots+a_nY(k-n)=b_1u(k-1)+b_2u(k-2)+\ldots+b_nu(k-n)$$
$$+c_0e(k)+c_1e(k-1)+\ldots+c_ne(k-n) \qquad (1.1)$$

gibi bir modele ARMAX modeli denir. $e(k)$ hata terimi zaman serilerindeki alışılmış varsayımları sağlamaktadır [3,5]. Gösterimdeki X harfi sisteme giren dışsal değişkenin varlığını ifade etmektedir. Bu model, bir ARMA modeline sistem girdisinin n adım gecikmeli etkilerinin eklenmesi ile ortaya çıkmış olarak düşünülebilir. Gecikme parametrelerin (derecelerin) tümünün aynı ve n olması gösterim kolaylığı içindir. Gecikme parametrelerinin farklı olması durumu bazı katsayıların sıfır alınmasıyla sağlanabilir.

Çalışmanın ikinci kısmında parametreleri bilinen ARMAX modellerinde kontrol problemi hatırlatıldıktan sonra üçüncü kısımda parametreleri bilinmeyen ARMAX modellerinde uyarlamalı kontrol üzerinde durulmaktadır. Dördüncü kısımda bazı simülasyon çalışmaları yapılmaktadır.

2. Bilinen Parametreli ARMAX Modellerinde Kontrol

Bir ARMAX modelindeki çıktıların sıfırlanmasını veya bir referans çıktıya göre farkın küçük tutulmasını amaçlayan basit bir kontrol tarzına en küçük-varyans kontrol (minimum-variance control) denir. Kontrolun amacı çıktı değerlerini küçük tutmaktır. En küçük-varyans denmesinin sebebi her k için $E\left(Y^2(k)\right)$ değerinin en küçük tutulmasının istenmesidir.

2.1 En Küçük-Varyans Maliyetsiz Kontrol

ARMAX modeli, $e(k)$ lar sıfır ortalamalı σ^2 varyanslı beyaz gürültü süreci oluşturmak üzere,

$$\Phi(B)Y(k) = B^r\Psi(B)u(k) + C(B)e(k) \tag{2.1}$$

biçiminde olsun. Burada, $r \quad (r \geq 1)$ çıktı ile girdi arasındaki gecikme adımlarının sayısı olup,

$$\Phi(B) = 1 + a_1B^1 + a_2B^2 + ... + a_nB^n$$
$$\Psi(B) = b_0 + b_1B^1 + b_2B^2 + ... + b_{n-r}B^{n-r}$$
$$C(B) = 1 + c_1B^1 + c_2B^2 + ... + c_nB^n$$

dır. Ayrıca, $b_0 \neq 0$, Φ ile C nin kararlı (kökler birim diskin içinde) oldukları varsayılsın.

$$C\left(B\right) = \Phi\left(B\right)F\left(B\right) + B^rD\left(B\right) \tag{2.2}$$

olacak şekilde dereceleri sırasıyla $r-1$ ve $n-1$ olan, $F\left(B\right) = f_0 + f_1B + ... + f_{r-1}B^{r-1}$ ile $D\left(B\right) = d_0 + d_1B + ... + d_{n-1}B^{n-1}$ polinomları vardır [4]. Bunlara bağlı olarak,

$$Y(k+r) = \frac{\Psi\left(B\right)F\left(B\right)}{C\left(B\right)}u(k) + \frac{D\left(B\right)}{C\left(B\right)}Y(k) + F\left(B\right)e(k+r) \tag{2.3}$$

yazılabilir.

k. adımda iken çıktının $r \quad (r \geq 1)$ adım ilerisi için $u(k) = u\left(Y_k, Y_{k-1}, ...\right)$ biçiminde bir kontrol düşünülürse,

$$E\left(Y^2(k+r)\right) = E\left(\frac{\Psi\left(B\right)F\left(B\right)}{C\left(B\right)}u(k) + \frac{D\left(B\right)}{C\left(B\right)}Y(k)\right)^2 + E\left(F\left(B\right)e(k+r)\right)^2$$

olmak üzere, en küçük-varyans kontrol ,

$$\Psi\left(B\right)F\left(B\right)u(k) + D\left(B\right)Y(k) = 0$$

alınmasıyla,

$$u^*(k) = -\frac{D\left(B\right)}{\Psi\left(B\right)F\left(B\right)}Y(k) \tag{2.4}$$

olmaktadır. Bu $u^*(k)$ en küçük-varyans kontrolun uygulanmasıyla kontrol edilmiş süreç,

$$Y(k) = F\left(B\right)e(k) \tag{2.5}$$

denklemini sağlar, yani $r-1$ dereceden bir hareketli ortalama (moving average) sürecidir. Bu sürecin varyans fonksiyonu,

$$E\left(Y^2(k)\right) = \left(f_0^2 + f_1^2 + ... + f_{r-1}^2\right)\sigma^2 \tag{2.6}$$

dır.

En küçük-varyans kontrol,

$$u^*(k) = -\frac{D\left(B\right)}{\Psi\left(B\right)F\left(B\right)}Y(k) = -\frac{D\left(B\right)}{\Psi\left(B\right)}e(k)$$

olmak üzere, $\Psi(B)$ polinomunun $D(B)$ ile sadeleşmeyen çarpanlarında bulunan kararsız köklerin var olması durumunda $Var\left(u^*(k)\right)$ değerleri sonsuza gidebilir. Kontrolun maliyeti olmadığı için bu durum bir sakınca yaratmamaktadır, ancak beklenmedik alışılmamış bir durumdur. $\Psi(B)$ nin kararsız kökü bulunmadığında kontrol dizisi asimptotik durağan bir süreçtir [4].

Amaç, sistemi belli bir $\left(y^*(k)\right)_{k=1}^{\infty}$ yörüngesi etrafında tutmak olduğunda,

$$E\left(Y(k+r)-y^*(k+r)\right)^2 = E\left(\frac{\Psi(B)F(B)}{C(B)}u(k)+\frac{D(B)}{C(B)}Y(k)-y^*(k+r)\right)^2 + E\left(F(B)e(k+r)\right)^2$$

olmak üzere, en küçük-varyans kontrol,

$$\Psi(B)F(B)u(k) = C(B)y^*(k+r)-D(B)Y(k) \tag{2.7}$$

indirgeme bağıntısı ile elde edilir.

2.2 Karesel Maliyet Fonksiyonu Altında Kontrol

Bir sistemi anlatan ARMAX modeli (2.1) deki gibi olsun. Bu sistemin,

$$J(u) = \lim_{N\to\infty} E\left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(Y^2(k)+\lambda u^2(k))\right) \tag{2.8}$$

maliyet fonksiyonu altında kontrolu söz konusu olsun. Burada λ pozitif bir sabit olup kontrolun fiyatını belirtmektedir. λ=0 durumunda en iyi kontrol en küçük-varyans kontroldur. Genel olarak buradaki problem, lineer sistemlerde karesel maliyet fonksiyonu altında bir kontrol problemi olarak ele alınabilir. Bununla ilgili kısa bir hatırlatma yapalım.

(2.1) deki ARMAX modeli,

$$\underline{X}_{k+1} = \begin{bmatrix} X_1(k+1) \\ X_2(k+1) \\ \vdots \\ X_n(k+1) \end{bmatrix}, \; A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & & 0 & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} b_{n-r+1} \\ \vdots \\ b_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} c_n - a_n \\ c_{n-1} - a_{n-1} \\ \vdots \\ c_1 - a_1 \end{bmatrix}$$

gösterimleri ile,

$$\underline{X}_{k+1} = A\underline{X}_k + Bu(k) + Ce(k) \tag{2.9}$$

$$Y(k) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}\underline{X}_k + e(k) \tag{2.10}$$

biçiminde bir durum-uzay modeli olarak yazılabilir [3,4,5]. Bu durum-uzay modelinde $u(k)=K\underline{X}_k$ gibi durum geri beslemeli bir kontrol uygulandığında, kontrol sadece $e(k-1), e(k-2), ..., e(0)$ hata terimlerini içerecektir, halbuki en küçük-varyans kontrol $e(k)$ terimini de içermektedir. Bu amaçla, $e(k)$ hata terimi durum vektörüne, $X^0(k)=e(k)$ gibi bir durum değişkeni olarak eklenebilir. $v(k)=e(k+1)$ olarak tanımlanıp, genişletilmiş

$$\begin{bmatrix} X^0(k+1) \\ \underline{X}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ C & A \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X^0(k) \\ \underline{X}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix}u(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}v(k) \tag{2.11}$$

$$Y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X^0(k) \\ \underline{X}_k \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

durum-uzay modelinde durum geri beslemeli kontrol uygulanırsa, böyle kontrollerin sınıfı en küçük-varyans kontrolu da içerir. Ayrıca, başlangıç değer dışında durum vektörü tamamiyle çıktıdan hesaplanabilir. O zaman,

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ C & A\end{bmatrix},\ \overline{B}=\begin{bmatrix}0\\ B\end{bmatrix},\ H=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix}H\\ 0\end{bmatrix},\ F=\begin{bmatrix}0\\ \sqrt{\lambda}\end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$\begin{bmatrix}X^0(k+1)\\ \underline{X}_{k+1}\end{bmatrix}=\overline{A}\begin{bmatrix}X^0(k)\\ \underline{X}_k\end{bmatrix}+\overline{B}u(k)+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}v(k)$$

lineer sisteminde,

$$J(u)=\lim_{N\to\infty}E\left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left\|D\begin{bmatrix}X^0(k)\\ \underline{X}_k\end{bmatrix}+Fu(k)\right\|^2\right)$$

maliyet fonksiyonu altında optimal kontrol,

$$u^*(k)=-M\begin{bmatrix}X^0(k)\\ \underline{X}_k\end{bmatrix} \tag{2.13}$$

dır. Burada, M matrisi,

$$M=(\overline{B}'S\overline{B}+\lambda)^{-1}\overline{B}'S\overline{A} \tag{2.14}$$

olup, S matrisi,

$$S=\overline{A}'S\overline{A}+H'H-\overline{A}'S\overline{B}(\overline{B}'S\overline{B}+\lambda)^{-1}\overline{B}'S\overline{A} \tag{2.15}$$

Riccati denkleminin çözümüdür [4]. Buradaki sonuçlar, $(\overline{A},\overline{B})$ ikilisinin kararlı olabilen ve $(D,\overline{A})$ ikilisinin teşhis edilebilir olması durumunda geçerlidir. A matrisinin özdeğerleri birim diskin içinde, yani A kararlı bir matris olduğunda, bu şartlar yerine gelmektedir.

2.3 Kutup Kaydırmalı Kontrol

Parametreleri zamanla değişmeyen ve $e(k)$ dan $Y(k)$ ye $\dfrac{Z(B)}{T(B)}$ transfer fonksiyonlu lineer sistemlerde çıktı, transfer fonksiyonuna, daha doğrusu transfer fonksiyonunun kutupları ($T(B)$ polinomunun kökleri) ile sıfırlarına ($Z(B)$ polinomunun köklerine) bağlıdır. Klasik kontrol sistemi tasarımının amacı kutup ve sıfırları uygun çıktı oluşturacak yerlere yerleştirmektir.

ARMAX modeli (2.1) deki gibi, ancak $\Phi(B),\Psi(B),C(B)$ polinomlarının dereceleri sırasıyla n_Φ,n_Ψ,n_C olsun. n_Φ,n_Ψ,n_C sayıları biribirinden farklı da olabilir. Bu durumda (2.2) ifadesindeki $F(B)$ nin derecesi $r-1$, ancak $D(B)$ nin derecesi,

$$n_D=\begin{cases}n_A-1 & ,\quad n_C\le n_\Phi+r-1\\ n_C-1 & ,\quad n_C>n_\Phi+r-1\end{cases}$$

dır [4].

k. adımda iken çıktının r $(r\ge 1)$ adım ilerisi için kontrol,

$$u(k)=\frac{H(B)}{J(B)}Y(k) \tag{2.16}$$

geri beslemesi biçiminde düşünülsün. Burada, $H(B)$ ve $J(B)$ polinomları,

$$H(B)=h_0+h_1B+h_2B^2+\ldots+h_{n_H}B^{n_H} \tag{2.17}$$

$$J(B)=1+j_1B+j_2B^2+\ldots+j_{n_J}B^{n_J} \tag{2.18}$$

olup, bu polinomların katsatıları, e_k den Y_k ye transfer fonksiyonu belli bir $\dfrac{Z(B)}{T(B)}$ fonksiyonu olacak şekilde seçilecektir. Bu amaçla, (2.16) daki kontrol (2.1) deki ARMAX modelinin r adım ilerisi için öngörü denklemi olan (2.2) denkleminde yerine yazılır ve denklem düzenlenirse,

$$\left[J(B)\left(C(B)-B^r D(B)\right)-B^r\Psi(B)F(B)H(B)\right]Y(k)=J(B)F(B)C(B)e(k) \tag{2.19}$$

kapalı-döngü sistem gösterimine ulaşılır. $Y(k)=\dfrac{Z(B)}{T(B)}e(k)$ ifadesi son denklemde yerini aldığında,

$$Z(B)\left[J(B)\left(C(B)-B^r D(B)\right)-B^r\Psi(B)F(B)H(B)\right]=J(B)F(B)C(B)T(B) \tag{2.20}$$

elde edilir. Bu denklemin iki tarafındaki B operatörünün önündeki katsayılar eşitlenerek $H(B)$ ve $J(B)$ polinomlarının katsayıları belirlenir. Çözümün var olması için (2.20) denklemindeki polinomların dereceleri ile ilgili bazı kısıtlamaların söz konusu olacağı ortadadır.

Özel olarak, (2.4) ile verilen en küçük-varyans kontrolun uygulanması ile elde edilen (2.5) deki gibi bir çıktı arzu edildiğinde, $Z(B)=F(B)$, $T(B)=1$ olmak üzere, (2.20) denklemi,

$$D(B)J(B)+\Psi(B)F(B)H(B)=0 \tag{2.21}$$

olur. Bu denklemden (2.16) daki kutup kaydırmalı kontrolun $H(B)$ ve $J(B)$ polinomları,

$$H(B)=-\frac{1}{b_0}D(B) \tag{2.22}$$

$$J(B)=\frac{1}{b_0}\Psi(B)F(B) \tag{2.23}$$

dır. Bu durumda, $j_0=0$ ve $n_H=n_D, n_J=n_\Psi+r-1$ dır.

$T(B)=1$ olması durumunda $\dfrac{Z(B)}{T(B)}$ transfer fonksiyonunun kutuplarının sonsuzda olduğu düşünülebilir. Wellstead ve diğerleri (1979), en küçük-varyans kontrol ile kutup kaydırmalı kontrolun bir uzlaşması olan ve kutupları sonsuzda olmayan,

$$T(B)=1+B^r T^*(B) \tag{2.24}$$

biçiminde bir $T(B)$ polinomu alıp $\dfrac{F(B)}{T(B)}$ transfer fonksiyonuna dayalı kutup kaydırmalı kontrol önermişlerdir. Bu durumda (2.20) denklemi,

$$J(B)C(B)-B^r\left[J(B)D(B)+\Psi(B)F(B)H(B)\right]=J(B)C(B)\left[1+B^r T^*(B)\right] \tag{2.25}$$

biçiminde olup, iki taraftan $J(B)C(B)$ kısaltılıp B^r sadeleştirildikten sonra,

$$J(B)D(B)+\Psi(B)F(B)H(B)=J(B)C(B)T^*(B)$$

olur. Buradan,

$$H(B)=-\frac{1}{b_0}\left[D(B)-C(B)T^*(B)\right] \tag{2.26}$$

$$J(B)=\frac{1}{b_0}\Psi(B)F(B) \tag{2.27}$$

elde edilir.

3. Bilinmeyen Parametreli ARMAX Modellerinde Kontrol

Genel olarak, bilinmeyen parametreli bir sistemi kontrol etmenin baş ağrıtıcı bir problem olduğu açıktır. Bu durumda doğal bir yaklaşım, *k*. adımda parametrenin bir tahmin değerinin elimizde olabileceğini varsayıp bunu gerçek parametre değeri gibi düşünerek optimal kontrolu uygulamak ve sonraki adımlarda yeniden tahminde bulunup işlemi tekrarlamaktır. Böyle bir kontrolde ortaya çıkan sonuç parametrelerin bilinmesi durumunda ortaya çıkabilecek sonuç ile aynı oluyorsa kontrol sürecine kendi kendini akort edebilme özelliğine (self-tuning property) sahiptir, denir [2,4]. Bu kısımda, ARMAX modellerinde en küçük kareler tahminlerine dayalı kendini akort edebilme özelliğine sahip kontrol problemi üzerinde durulacaktır

(2.1) ile verilen ARMAX modelinde $C(B)=1$ olsun. (2.3) denklemi $\Gamma(B)=D(B)$, $\Pi(B)=\Psi(B)F(B)$ ve $v(k)=F(B)e(k)$ gösterimleri altında,

$$Y(k+r)=\Gamma(B)Y(k)+\Pi(B)u(k)+v(k+r) \tag{3.1}$$

biçiminde yazılsın. Buradaki $\Gamma(B)$ ile $\Pi(B)$ polinomlarının dereceleri sırasıyla $m=n_{\Phi}-1$ ve $l=n_{\Psi}+r-1$ olup,

$$\Gamma(B)=1+\alpha_1 B+\alpha_2 B^2+...+\alpha_1 B^m$$

$$\Pi(B)=\beta_0+\beta_1 B+\beta_2 B^2+...+\beta_l B^l$$

biçiminde yazılsın. Kontrol terimi (2.16) daki gibi,

$$u(k)=\frac{H(B)}{J(B)}Y(k) \tag{3.2}$$

biçiminde düşünülsün ve $j_0=0$ olsun. O zaman,

$$L(B)=J(B)\left[1-B^r\Gamma(B)\right]-B^r\Pi(B)H(B) \tag{3.3}$$

olmak üzere ($n_H=m$, $n_J=l$, $n_L=l+m+r$),

$$L(B)Y(k)=J(B)v(k) \tag{3.4}$$

yazılır. Şimdi, (3.1) ile verilen modeldeki parametrelerin oluşturduğu,

$$\underline{\theta}=\left[\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_m \quad \beta_1 \quad \beta_2 \quad \cdots \quad \beta_l\right]' \tag{3.5}$$

vektörü her adımda en küçük kareler yöntemi ile tahmin edilip, örneğin bu parametreler cinsinden çok kolay ifade edilen $\hat{\Pi}(B)u(k)=-\hat{\Gamma}(B)Y(k)$ en-küçük varyans kontrolu veya (3.4) göz önüne alınarak kutup kaydırmalı kontrol uygulanabilir. (2.1) modeli yerine, (3.1) modelinin tercih edilmesinin nedeni kontrol algoritmalarının doğrudan $\Pi(B),\Gamma(B)$ polinomlarındaki parametreler cinsinden ifade edilebilmesidir.

$k<0$ için $y(k)=0$ ve $u(k)=0$ olmak üzere,

$$\underline{Y}^N=\begin{bmatrix}Y(r)\\ Y(r+1)\\ \vdots\\ Y(r+N)\end{bmatrix}, \qquad \underline{e}^N=\begin{bmatrix}e(r)\\ e(r+1)\\ \vdots\\ e(r+N)\end{bmatrix},$$

$$X_N=\begin{bmatrix}Y(0) & Y(-1) & \cdots & Y(-m) & u(0) & u(-1) & \cdots & u(-l)\\ Y(1) & Y(0) & \cdots & Y(1-m) & u(1) & u(0) & \cdots & u(1-l)\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ Y(N) & Y(N-1) & \cdots & Y(N-m) & u(N) & u(N-1) & \cdots & u(N-l)\end{bmatrix}$$

gösterimleri altında gözlemler,

$$\underline{Y}^N=X_N\underline{\theta}+\underline{e}^N$$

lineer modeli olarak ifade edilebilir. $\underline{\theta}$ parametre vektörünün en küçük kareler tahmin edicisi,

$$\hat{\underline{\theta}}_N=(X_N'X_N)^{-1}X_N'\underline{Y}^N$$

dır. Bu tahmin edici için, bir $P_0=(X_0'X_0)^{-1}$ başlangıç matrisi ve $\hat{\underline{\theta}}_0$ başlangıç tahmin değeri ile başlayıp, gözlemler geldikçe,

$$\hat{\underline{\theta}}_N=\hat{\underline{\theta}}_{N-1}+K_N\left(Y(N)-\underline{x}_N'\hat{\underline{\theta}}_{N-1}\right) \tag{3.6}$$

$$K_N=(1+\underline{x}_N'P_{N-1}\underline{x}_N)^{-1}P_{N-1}\underline{x}_N$$

$$P_N=P_{N-1}-(1+\underline{x}_N'P_{N-1}\underline{x}_N)^{-1}P_{N-1}\underline{x}_N\underline{x}_N'P_{N-1}$$

algoritması ile indirgemeli tahminler ardışık olarak elde edilebilir [4].

$\hat{\underline{\theta}}_N$ tahmin edicisinin yakınsaması, kontrolun (3.2) deki gibi ve

$$n_C\le n_{\Phi}+n_{\Psi}+2r-2-n_L \tag{3.7}$$

olması halinde, (2.1) deki ARMAX modelinde ($n_C>0$ da olabilir),

$$\varepsilon(k+r) = Y(k+r) - \hat{\Gamma}(B)Y(k) - \hat{\Pi}(B)u(k) \tag{3.8}$$

ile tanımlanan artıklar dizisinin $r-1$ dereceli hareketli ortalama serisi olduğu gösterilebilir [4].

3.1 En Küçük-Varyans Kontrol

Belirtildiği ve görüldüğü gibi (3.1) modeli için en-küçük varyans kontrol,

$$\hat{\Pi}(B)u(k) = -\hat{\Gamma}(B)Y(k) \tag{3.9}$$

yani,

$$u(k) = -\frac{1}{\hat{\beta}_0}\left[\hat{\beta}_1 u(k-1) + \hat{\beta}_2 u(k-2) + \ldots + \hat{\beta}_l u(k-l) + \hat{\Gamma}(B)Y(k)\right] \tag{3.10}$$

dır. Bu durumda, $\dfrac{H(B)}{J(B)} = -\dfrac{\Gamma(B)}{\Pi(B)}$ ve $L(B) = J(B)$ olduğu göz önüne alınırsa, (3.7) koşulu,

$$n_C \leq n_\Phi + r - 1 \tag{3.11}$$

olur. Bu koşulun sağlanması durumunda (3.10) kontrolu (2.1) deki ARMAX modeli için kendini akort edebilen (self-tuning) kontrol olup, en küçük-varyans kontrol ile aynıdır. Çıktının asimptotik varyansı $\left(f_0^2 + f_1^2 + \ldots + f_{r-1}^2\right)\sigma^2$ dır [4].

(3.1) modeli için Wellstead ve diğerleri(1979) tarafından önerilen ve en küçük-varyans kontrol ile kutup kaydırmalı kontrolun bir uzlaşması olan kontrol algoritmasında,

$$H(B) = \frac{1}{\beta_0}\left[-\Gamma(B + T^*(B)\right] \quad , \quad J(B) = \frac{1}{\beta_0}\Pi(B)$$

olup, (3.6) koşulu,

$$n_C + n_{T^*} \leq n_\Phi - 1 \tag{3.12}$$

dır.

3.2 LQG Kontrol

Genel olarak, hata terimi normal dağılımlı olan lineer sistemlerde karesel maliyet fonksiyonu altında kontrol problemi LQG (**L**inear system, **Q**uadratic cost, **G**aussian distribution) problemi olarak isimlendirilir.

(2.1) deki ARMAX modelinde $e(k) \sim N(0, \sigma^2)$ ve bilinmeyen parametreli bu modelde (2.8) ile verilen maliyet fonksiyonu altında kontrol söz konusu olsun. $C(B)$ polinomunun derecesi birden büyük olduğunda LQG kontrolu kendini akort etme özelliğine sahip olmamaktadır. $C(B) = 1$ olduğunda, LQG kontrolu kendini akort etme özelliğine sahip olup, $r = 1$ için aşağıdaki adımlardan oluşmaktadır.

1) $\Gamma(B) = B\left(1 - \Phi(B)\right)$, $\Pi(B) = \Psi(B)$ alınıp (3.1) modelinde parametreler en küçük kareler yöntemi ile indirgemeli olarak tahmin edilir.

2) (2.1) modelinde, $\Phi(B) = 1 - B\hat{\Gamma}(B)$, $\psi(B) = \hat{\Pi}(B)$ ve $C(B) = 1$ alıp, altkısım 2.2 de anlatılan ve (2.16) ile verilen kontrol hesaplanır.

3.3 Kutup Kaydırmalı Kontrol

$T(B)$ verilen bir polinom olmak üzere, (3.3) deki $L(B)$ polinomu $L(B) = T(B)P(B)$ ve kontrol yine $u(k) = \dfrac{H(B)}{J(B)}Y(k)$ biçiminde olmak üzere,

$$T(B)P(B) = J(B)\left[1 - B^r\hat{\Gamma}(B)\right] - B^r\hat{\Pi}(B)H(B) \tag{3.13}$$

denkleminden, $P(B) = 1 + p_1 B + p_2 B^2 + \ldots + p_{r-1}B^{r-1}$, $H(B)$ ve $J(B)$ polinomlarının katsayıları belirlenebilir. $T(B)$ polinomunun derecesi, $n_T = l + m + 1$ olduğunda, (3.3) denkleminin her iki tarafının derecesi $l + m + r$ olduğundan $P(B)$, $H(B)$ ve $J(B)$ polinomlarının katsayıları tek biçimde belirlenebilir. Kontrolun kendini akort edebilme özelliğine sahip olabilmesi için, (3.7) da verilen

$n_C \leq n_\Phi + n_\Psi + 2r - 2 - n_L$ eşitsizliğinde $n_L = n_T + r - 1$ olmak üzere, $n_T \leq l + m + 1 - n_C$ olmalıdır. Bu durumda, sistem çıktısının,

$$Y(k) = \frac{J(B)}{T(B)} e(k) \tag{3.14}$$

biçiminde olduğu gösterilebilir [4]. Buradaki transfer fonksiyonunun sıfırları, $u(k) = \frac{H(B)}{J(B)} Y(k)$ kontrolunun kutuplarıdır.

4. Simülasyon Çalışması

Bu kısımda, hata terimi normal dağılımlı modeller üzerinde bazı simülasyon çalışmaları ele alınmaktadır. MATLAB yazılımında yürütülen simülasyonlarda, hatalar (gürültüler) standart normal dağılıma sahip olarak üretilip, model yapısına bağlı olarak sistem çıktıları elde edilmektedir. Belirtildiği gibi kontrollerdeki amaç çıktıyı sıfırlamaktır, yani küçük tutmaktır. Uygulanan kontrolun etkisini görmek için aynı gürültü altında işleyen ancak kontrol uygulanmayan ikinci bir sistemin çıktısı da grafiklerde (kesikli çizgi) yer almaktadır. Yatay eksen zamanı ($k = 0,1,2,...$), düşey eksen sistem çıktısı ile kontrolu, noktalı çizgiler kontrolu ve sürekli çizgiler kontrol altındaki sistem çıktısını göstermektedir. Sadece Şekil-6 da düşey eksen parametre tahminlerini göstermektedir.

A) Bilinen Parametreli ARMAX Modellerinde En Küçük-Varyans Maliyetsiz Kontrol.

Modelimiz,

$$Y(k) = 1.7Y(k-1) - 0.72Y(k-2) + u(k-1) + e(k) - 0.5e(k-1) \tag{4.1}$$

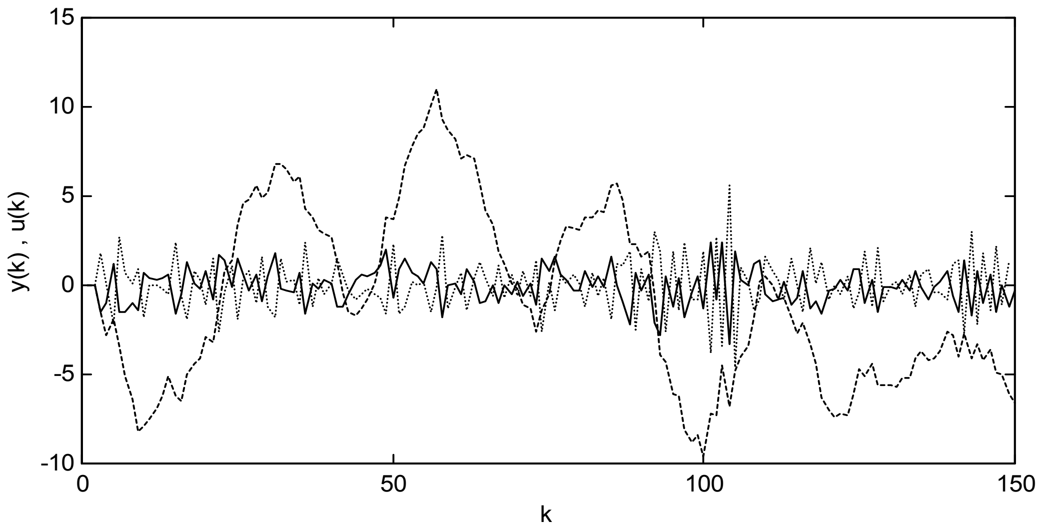
olsun. $r = 1$ ve (2.2) denklemi,

$$1 - 0.5B = (1 - 1.7B + 0.72B^2) f_0 + B(d_0 + d_1 B) \tag{4.2}$$

olup, (2.4) ile verilen en küçük-varyans kontrol,

$$u(k) = -\frac{d_0 + d_1 B}{1.f_0} = -\left[1.2Y(k) - 0.72Y(k-1)\right] \tag{4.3}$$

dır. Bu model üzerinde yapılan simülasyon sonucu Şekil-1 deki gibidir.



Şekil 1. En Küçük-Varyans Maliyetsiz Kontrol

B) Bilinen Parametreli ARMAX Modellerinde Maliyetli Kontrol.

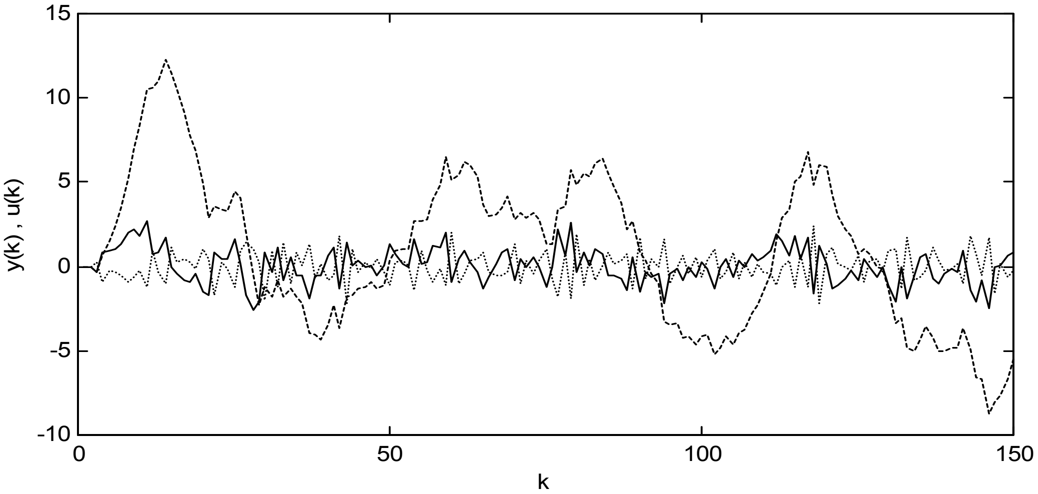
(4.1) deki ARMAX modelinde (2.8) ile verilen maliyet fonksiyonu altındaki optimal kontrolu elde etmek için modeli, (2.11)-(2.12) ‘deki gibi durum-uzay modeli biçiminde yazmak gerekmektedir. İlgili matrisler,

$$\overline{\mathrm{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0.72 & 0 & -0.72 \\ 1.2 & 1 & 1.7 \end{bmatrix}, \quad \overline{\mathrm{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{H} = [1\ 0\ 1] \tag{4.4}$$

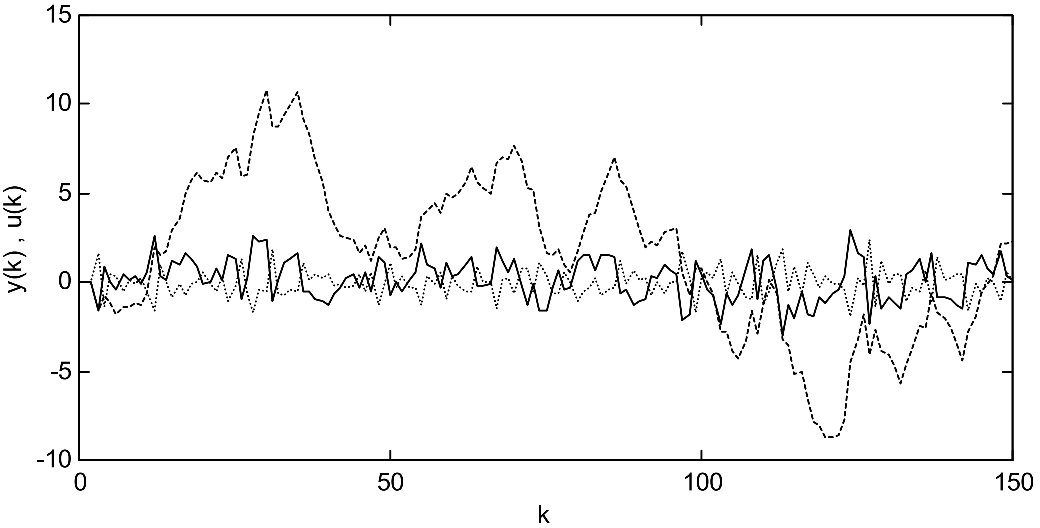
olmak üzere, λ=0.5 , 1 , 5 için (2.15) deki Riccati denkleminin çözümleri sırasıyla,

$$S=\begin{bmatrix}3.05 & 1.97 & 4.04\\ 1.97 & 1.99 & 2.97\\ 4.04 & 2.97 & 5.52\end{bmatrix},\ S=\begin{bmatrix}3.37 & 2.41 & 4.58\\ 2.40 & 2.62 & 3.72\\ 4.58 & 3.72 & 6.44\end{bmatrix},\ S=\begin{bmatrix}4.59 & 4.26 & 6.72\\ 4.26 & 5.55 & 7.03\\ 6.72 & 7.03 & 10.24\end{bmatrix}$$

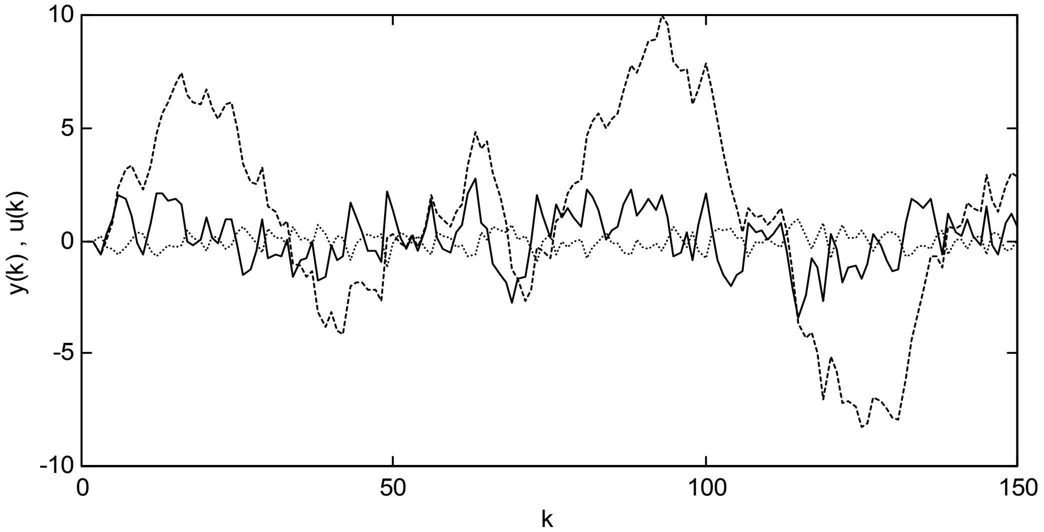
olup, (2.13) de verilen kontrolun uygulanmasıyla elde edilen simülasyon sonuçları sırasıyla Şekil-2, Şekil-3, Şekil-4 dedir.



Şekil 2. λ=0.5 **için Maliyetli Kontrol**



Şekil 3. $\lambda = 1$ **için Maliyetli Kontrol**



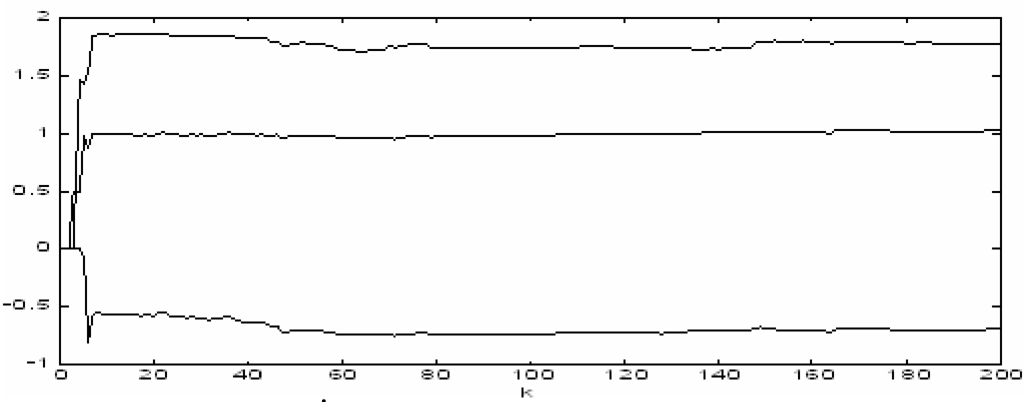
Şekil 4. $\lambda = 5$ **için Maliyetli Kontrol**

C) Bilinmeyen Parametreli ARMAX Modellerinde En Küçük-Varyans Maliyetsiz Kontrol.

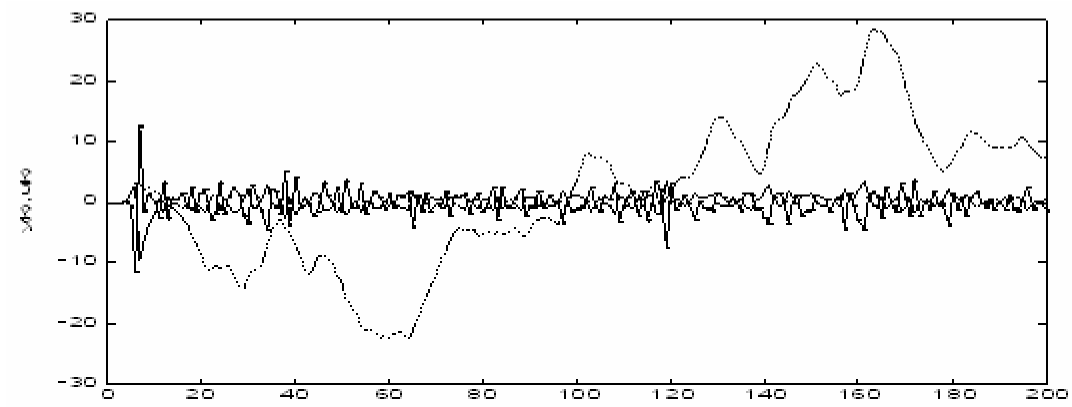
Modelimiz,

$$Y(k)=a_1Y(k\text{-}1)+a_2Y(k\text{-}2)+b_1u(k\text{-}1)+e(k) \qquad (4.5)$$

biçiminde olsun. Bilinmeyen parametre değerleri her adımda (3.6) da verilen indirgemeli en küçük kareler algoritması ile tahmin edilip (3.10) ile verilen kontrol uygulansın. Simülasyon çalışmasında bilinmeyen parametre değerleri $a_1 = 1.7$, $a_2 = -0.72$, $b_1 = 1$ olarak alınmıştır. Kontrol altındaki sistemden alınan gözlemler ile parametrelerin indirgemeli en küçük kareler tahminleri Şekil-5 ve sistem çıktısı ile kontrol Şekil-6 daki gibi olmuştur.



Şekil 5. İndirgemeli En Küçük Kareler Tahminleri



Şekil 6. En Küçük-Varyans Maliyetsiz Kontrol

Sonuç

ARMAX ile modellenen bir sistemde kontrol problemi, arzu edilen bir sistem çıktısının elde edilmesi için gereken girdinin bulunmasıdır. İstenen bir referans çıktı ile gerçek sistem çıktısı arasındaki farkın küçük tutulmasını amaçlayan kontrol tarzına en küçük-varyans kontrol denir. Ölçü aletleri doğrudan referans çıktı ile gerçek sistem çıktısı arasındaki farkı çıktığında amaç bu farkı sıfırlamaktır. Şekil-1 ile Şekil-6 da görüldüğü gibi parametreleri bilinen ARMAX ve parametreleri bilinmeyen ARMAX modellerinde uygulanan en küçük-varyans kontrol sonucunda çıktı sıfır etrafında dalgalanmakta olup, aynı şartlarda çalışan kontrolsuz sistem çıktısı gibi aşırı sapmalar ortaya çıkmamaktadır. Ayrıca, Şekil-5 de görüldüğü gibi kontrol altında bulunan ve parametreleri bilinmeyen ARMAX sisteminde parametre değerleri, amaç bu olmasa bile, zaman ilerledikçe başarılı bir şekilde tahmin edilebilmektedir. Çıktının sıfırlanması amaçlanıp uygulanan kontrolun büyüklüğü ile ilgili (2.8) deki gibi bir maliyet fonksiyonu altında kontrol söz konusu olduğunda, Şekil-2, Şekil-3, Şekil-4 de görüldüğü gibi kontrol maliyetini yansıtan λ parametresinin değerleri arttıkça kontrol değerleri mutlak değerce küçülmekte, ancak buna karşılık sistem çıktıları büyümektedir.

Genelde sistem kontrolu kolay bir problem olmamakla birlikte, bir sistemin kontrolunda en önemli etkenin sistemi anlama-anlatma yani modelleme olduğunu unutmamak gerekir.

Kaynaklar:

1. Aström, K.J. (1983), "Theory and applications of adaptive control - a survey", Automatica, 19, 471-486.
2. Aström, K.J. and Wittenmark, B. (1973), "On Self Tuning Regulators", Automatica, 9, 185-199.
3. Brockwell,P.J. and Davis,R.A. (1996), Introduction to Time Series and Forecasting, Springer.
4. Davis, M.H.A. and Winter,R.B. (1985), Stochastic Modelling and Control, Chapman and Hall.
5. Durbin J. and Koopman, S.J. (2001), Time Series Analysis by State Space Methods, Oxford University Press.
6. Wellstead, P.E., Edmunds, J.M., Prager,D. and Zanker, P. (1979), "Self-tuning pole/zero assignment regulators", Int. J. Control, 30, 1-26.