Matematik Öğretmeni Adaylarının İspat Değerlendirme Becerilerinin İncelenmesi: Ardışık Tek Sayıların Toplamı Örneği

Gürsel Güler*, Serap Ekmekci**

Makale Geliş Tarihi: 19/04/2016 *Makale Kabul Tarihi:01/06/2016*

Özet

Bu araştırmanın amacı ilköğretim matematik öğretmenliği birinci sınıfında öğrenim görmekte olan öğrencilerin ispat değerlendirme becerilerini ve bu süreçte kullandıkları argümanları incelemektir. Araştırmanın verileri iki aşamada toplanmıştır. İlk olarak iki farklı üniversitede öğrenim gören 92 öğrenciye araştırmacılar tarafından geliştirilen İspat Değerlendirme Testi uygulanmıştır. Öğrencilerin teste verdikleri yanıtlar kullanılan argümanların yapısına göre güçlü ve zayıf olarak sınıflandırılmıştır. İkinci aşamasında ise ispat değerlendirme sürecinde ardışık tek sayıların toplamını veren kurala yönelik sekiz farklı ispat için güçlü ve zayıf argümanlar üreten 9 öğrenci ile yarı yapılandırılmış mülakatlar gerçekleştirilmiştir. Verilerin analizinde nitel betimsel analiz yöntemi kullanılmıştır. Araştırma sonucunda, öğrencilerin çoğunlukla ispatların doğru olduğuna karar verebildikleri ancak yeterli argümanlar kullanarak yanıtlarını savunamadıkları tespit edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: *Ardışık tek sayılar, ispat değerlendirme, matematiksel ispat*

Examination of the Proof Evaluation Skills of the Prospective Mathematics Teachers: The Example of Sum of Successive Odd Numbers

Abstract

The aim of this research is to examine the proof evaluation skills of the prospective mathematics teachers and the arguments they have used during this process. The data of the research have been gathered at two stages. At the first stage, the Proof Evaluation Test developed by the researchers has been applied to 92 students who are students at two different universities. The responses given to the test by the students have been classified as strong and weak according to the structures of the arguments used. In the second stage, semi-structured interviews were conducted with 9 students who produced strong and weak arguments for eight different proofs for the rule that gives the sum of successive odd numbers during the proof evaluation process. Qualitative descriptive analysis method was used while analyzing the data. At the result of the research, it has been seen that the students mostly have been able to decide the correction of the proof but they have not defended their responses by using enough arguments.

Keywords: *Mathematical proof, proof evaluation, successive odd numbers*

* Bozok Üniversitesi, Eğitim Fakülte, İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü, Yozgat, Türkiye, gursel.guler@bozok.edu.tr
** Bozok Üniversitesi, Eğitim Fakülte, İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü, Yozgat, Türkiye, serap.ekmekci@bozok.edu.tr

1. Giriş

Matematik eğitiminin en önemli hedeflerinden birisi öğrencilerin öğrenecekleri kavramlarla ilgili neden, niçin sorularına karşılık olarak mantıklı cevaplar elde etmelerini sağlayabilmektir (Güler & Temizyürek, 2015). Matematiksel ispatlar bir sonucun doğruluğunu farklı gerekçelerle göstermek, başkalarını bu konu hakkında bilgilendirmek ve ikna etmek, ulaşılan bu sonucu bir sistem içine yerleştirmek amacıyla yapıldığı için (Hanna, 1991) matematik eğitiminin bu hedefine ulaşmasında kilit bir role sahiptir. İspat matematik öğretiminde ezberci öğrenmeyi değil kavramsal ve anlamlı öğrenmeyi sağladığı için önemli bir unsurdur (Aylar ve Şahiner, 2014). Bu sebeple ispat tüm sınıf seviyelerine adapte edilerek öğretim sürecinde bir araç olarak kullanılmalıdır (Knuth, 2002). Çünkü ispatlar sadece sonuçların doğruluğunu gösterdiği için değil aynı zamanda yeni matematiksel metotlar, araçlar, stratejiler ve kavramlar sunması açısından da önemlidir (Hanna and Barbeau, 2008). Bu yüzden özellikle son yıllarda matematik eğitimi programları ispatların bu fonksiyonlarını kullanarak matematiğin sistemli bir bilim olarak öğretilmesinin ve matematiksel bilgilerin öğrenciler tarafından keşfedilmesinin önünü açmaya çalışmaktadırlar. Bu bağlamda NCTM' in (National Council of Teachers of Mathematics) son reform belgelerinde ispat önemli bir yere sahiptir (NCTM, 2000). NCTM, "Okul Matematiğinin İlkeleri ve Standartları" adlı raporunda erken yaşlardan itibaren ispat gelişimi ve akıl yürütmenin öğrencilerin bireysel gelişimlerine yönelik katkılarına dikkat çekmektedir. Benzer şekilde Milli Eğitim Bakanlığı (MEB) tarafından 2013 yılında güncellenen ortaokul matematik dersi öğretim programında matematiksel süreç becerileri arasında öğrencilere akıl yürütme (muhakeme) becerisinin kazandırılması gerektiği vurgulanmaktadır. Öğrencilerin akıl yürütme becerisine yönelik göstergeler arasında ise; çıkarımların doğruluğunu ve geçerliliğini savunma, mantıklı genellemelerde ve çıkarımlarda bulunma (MEB, 2013) şeklinde ispat fikrini geliştirecek becerilerin kazandırılmasının hedeflendiği görülmektedir.

Bilimin bütün alanlarında, elde edilen bilimsel bilgilerin doğruluğunu ispatlamak ortak bir amaçtır (Dede & Karakuş, 2014). Ancak matematiksel ispat, matematiksel anlayış geliştirme ve matematiksel bilgiyi yapılandırma için gerekli bir unsurdur (Kitcher, 1984; Polya, 1981). Bu yüzden matematiksel ispat matematikten ayrı düşünülemez ve matematiğin merkezinde yer alır (Schoenfeld, 1994). Ayrıca ispat matematik eğitimini diğer disiplinlerden ayıran önemli bir öğretim aracıdır (Dreyfus, 1990). Çünkü matematiksel bilgi üretimi süreci diğer fen bilimleri alanlarında olduğu gibi gözlem ve deney sonuçlarına dayanmamaktadır. Bu kapsamda Rav (1999) ispatı, deneysel bir bilimle uğraşan bilim insanı için deneysel prosedürler ne ise matematikçiler içinde ispat aynıdır şeklinde açıklamıştır. Matematiksel bilgilerin yapılandırılması mevcut bilgiler doğrultusunda şekillenmektedir (Harel & Sowder, 2007). Öğrenenin var olan bilgileri gelecekte öğrenecekleri için temel oluşturmaktadır. Dolayısıyla öğrencinin bireysel olarak ispat kavramını geliştirmesi bilişsel bir yapılandırma içermektedir (Harel & Sowder, 2007). Harel & Sowder'a (2007) göre ispat kavramı aynı zamanda başka kişilerin de kabulüne sunulan inandırıcı bir argüman olarak bireyin bilişsel gelişim sürecinin yapısını oluşturmaktadır.

Matematiksel ispat ile ilgili literatür incelendiğinde özellikle matematik ağırlıklı branşlarda ve matematik öğretmenliği bölümlerinde matematiksel ispat yapma becerisi kazandırmanın en önemli amaç olduğu görülmektedir (Stylianou, Blanton & Rotou, 2015). Ancak literatürde yer alan çalışmalarda matematik ve matematik öğretmenliği bölümü öğrencilerinin ispat yapma (Almeida, 2003; Doruk & Kaplan, 2015; Moore, 1994; Güler, Özdemir & Dikici, 2012; Weber, 2001) ve ispatları değerlendirmede (Bayazıt, 2009; Doruk & Kaplan, 2013; Güler, 2013; Powers, Craviotto & Grassl, 2010) güçlükler yaşadıkları tespit edilmiştir. Öğretmen adaylarının ispat doğruluğu değerlendirme sürecinin ispat yapma performanslarını artırdığı yapılan araştırmalarla ortaya konulmuştur (Bayazıt, 2009; Powers, Craviotto & Grassl, 2010). Bununla birlikte ispat değerlendirme becerisinin geleceğin öğretmenleri ve akademisyenlerinin uygulamaları ve öğretimleri için çok gerekli bir kabiliyet olduğu vurgulanmaktadır (Powers, Craviotto & Grassl, 2010). İspat değerlendirme sürecinin matematik öğretimi açısından önemli olduğu araştırmacılar tarafından vurgulanmasına rağmen Doruk & Kaplan (2013) çalışmalarında ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının ispat değerlendirmede başarısız olduklarını tespit etmişlerdir. Bu başarısızlığın sebebi olarak ise, ispatlardaki anahtar düşüncelere dikkat edilmemesi ve öğretmen adaylarının ispatları öğrenmek için düşünce sürecine girmeden sadece ezberleme yoluna gidildiğini ifade etmişlerdir. Benzer şekilde Uygan, Tanışlı & Köse (2014) ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının kanıt değerlendirme sürecinde bilgisayar ortamındaki deneysel doğrulamaları matematiksel bir kanıt için yeterli olarak düşünebildiklerini ve aksiyomatik yapıyı bozan gerekçeleri değerlendirmekte hata yaptıklarını belirlemişlerdir. Bu bağlamda matematik öğretmenlerinin öncelikle kendilerinin matematiksel argümanları nasıl değerlendirileceği, matematiksel önermelerin doğruluğunun nasıl belirleneceği ve doğru olduğunu düşündükleri matematiksel ispatları öğrencilerine nasıl sunmaları gerektiğine yönelik bilgili olmaları gerekmektedir. Bu nedenle gelecekte ilköğretim matematik öğretmeni olacak olan ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının söz konusu becerilere sahip olup olmadığı ayrıntılı bir şekilde incelenmelidir. Bu çalışmada da ilköğretim matematik öğretmenliği birinci sınıfında öğrenim gören öğretmen adaylarının ardışık tek sayıların toplamını veren kuralın ispatına yönelik hazırlanan sekiz farklı ispatı değerlendirme süreçlerinin incelenmesi amaçlanmıştır. Bu amaç kapsamında öğretmen adaylarının ispat değerlendirme durumları ve bu süreçte ürettikleri argümanlar betimsel olarak analiz edilmiştir.

2. Yöntem

2.1. Katılımcılar

Araştırma 2015-2016 eğitim öğretim yılı bahar döneminde İç Anadolu ve Karadeniz bölgelerinde yer alan iki devlet üniversitesinin ilköğretim matematik öğretmenliği bölümlerinde öğrenim gören 92 birinci sınıf öğrencisi ile yürütülmüştür.

Katılımcılardan 67 kişi kız, 25 kişi erkek olup ortalama yaş 20'dir. Araştırmada katılımcıların belirlenmesi aşamasında her iki devlet üniversitesinin birinci sınıfında öğrenim görmekte olan öğrenciler çalışmanın amacı hakkında bilgilendirilerek gönüllülük esas alınmıştır. Ayrıca katılımcıların seçiminde amaçlı örnekleme yöntemleri içerisinde yer alan ölçüt örnekleme yöntemi kullanılmıştır. Genel Matematik I dersini almış olmak katılımcıların seçiminde ölçüt olarak belirlenmiştir. Çünkü bu ders kapsamında öğrencilerin tümevarım ile ispat yapma hakkında yeterli bilgiye sahip olmaları sağlanmaktadır. Araştırmaya katılan her bir öğrenciye isimlerinin gizli kalması için araştırmacılar tarafından Ö1, Ö2,…,Ö92 şeklinde kod isimler verilmiştir.

2.2. Veri toplama aracı ve analizi

Araştırmada veri toplama aracı olarak araştırmacılar tarafından oluşturulan ve sekiz ispattan oluşan İspat Değerlendirme Testi (İDT) kullanılmıştır. İDT'nin içeriğindeki ispatların özellikle ilköğretim matematik öğretmenlerinin Genel Matematik dersi kapsamında öğrendikleri tümevarım ispat yöntemine yönelik ispatlardan oluşmasına dikkat edilmiştir. Bu doğrultuda İDT'nin içeriğinde ardışık tek sayıların toplamını veren kuralın ispatına yönelik olarak literatürde (Güler & Temizyürek, 2015; Nelsen, 1993) yer alan sekiz farklı ispat kullanılmıştır. Oluşturulan testte her bir ispatın öğretmen adayları tarafından değerlendirilmesi için ispat doğrudur, çünkü…, ispat eksiktir, çünkü… ve ispat yanlıştır, çünkü… şeklinde seçenekler yer almaktadır. Bu şekilde hazırlanan İDT'nin öğretmen adaylarının seviyelerine uygunluğunu tespit etmek için ilköğretim matematik öğretmenliği birinci sınıfında öğrenim gören 3 öğretmen adayı ile birer saat süren mülakatlar gerçekleştirilmiştir. Daha sonra hazırlanan test matematik eğitimi alanında 3 uzman tarafından incelenmiştir. Son olarak uzman görüşleri ve mülakat verileri doğrultusunda araştırmacılar tarafından revize edilen testin kullanılmasına karar verilmiştir. İDT'nin sekiz ispattan oluşan son şekli EK-1 de sunulmuştur.

Araştırmanın veri toplama süreci iki aşamada gerçekleştirilmiştir. İlk olarak iki farklı devlet üniversitesinin ilköğretim matematik öğretmenliği bölümlerinde öğrenim gören 92 birinci sınıf öğrencisine İDT bir ders saati süresinde uygulanmıştır. Daha sonra İDT'ye verilen yanıtlar doğrultusunda verdikleri yanıtları güçlü ya da zayıf açıklamalarla destekleyen 9 öğrenci ile yarı yapılandırılmış mülakatlar yapılmıştır. Yapılan mülakatlar öğrencilerin izinleri alınarak ses kayıt cihazı ile kayıt edilmiştir. Son olarak mülakatlardaki ses kayıtları yazıya dökülerek verilerin analizine başlanmıştır. Araştırmada elde edilen verilerin analizi sürecinde ilk olarak öğrencilerin İDT ne verdikleri yanıtlar doğru, eksik ve yanlış kategorilerine göre yüzde ve frekanslarına göre analiz edilmiştir. İspatların sınıflandırılması aşamasında araştırmacılar ilk olarak on beş testi birlikte analiz etmişler ve daha sonra diğer testleri paylaşarak birbirlerinden bağımsız bir şekilde analizlere devam etmişlerdir. Araştırmacılar belirli aralıklarla bir araya gelerek yaptıkları sınıflamalar hakkında fikir alış verişinde bulunmuşlardır. Bununla birlikte bazı yanıtlarda sınıflandırma yapılırken kararsız kalındığında araştırmacılar birbirlerinin yaptıkları sınıflamaları kontrol ederek ve üzerinde tartışarak düzeltmişlerdir. Araştırmacıların sınıflandırma süreci sonundaki analizler üzerindeki uyum katsayıları %82 ile %96 arasında değişmiştir. Öğretmen adaylarının oluşturdukları güçlü ve zayıf argümanları desteklemek için de yarı yapılandırılmış mülakat verileri betimsel olarak analiz edilerek doğrudan alıntılar şeklinde sunulmuştur.

3. Bulgular ve Yorum

Bu bölümde öğretmen adaylarının İDT ne verdikleri yanıtlardan ve yarı yapılandırılmış görüşmelerden elde edilen bulgulara yer verilmiştir. Öğretmen adaylarının İDT de yer alan sekiz farklı ispat için; ispatların kilit noktalarına vurgu yapan, işlem basamaklarını göz önünde bulunduran ve ispatın yöntemine bağlı kalarak verilen önermenin geçerli argümanlarla desteklenip desteklenmediğini kontrol eden yanıtları güçlü, diğer yanıtlar ise zayıf kategorisinde yer almıştır.

Tablo 1.

Öğretmen Adaylarının İspat Değerlendirme Durumlarına Göre Yer Aldıkları Kategorilerin Yüzde ve Frekansları

		Doğru f(%)	Eksik f(%)	Yanlış f(%)	Boş f(%)
İspat 1	Güçlü	9 (9,7)	1 (1,08)	0 (0)	4 (4,3)
	Zayıf	60 (65)	15 (16,3)	3 (3,2)	
İspat 2	Güçlü	7 (7,6)	0 (0)	0 (0)	4 (4,3)
	Zayıf	66 (71,7)	8 (8,6)	7 (7,6)	
İspat 3	Güçlü	7 (7,6)	0 (0)	0 (0)	8 (8,6)
	Zayıf	40 (43,4)	17 (18,4)	20 (21,7)	
İspat 4	Güçlü	5 (5,4)	1 (1,08)	0 (0)	1 (1,08)
	Zayıf	72 (78,2)	8 (8,6)	5 (5,4)	
İspat 5	Güçlü	2 (2,1)	1 (1,08)	0 (0)	7 (7,6)
	Zayıf	73 (79,3)	5 (5,4)	4 (4,3)	
İspat 6	Güçlü	6 (6,5)	0 (0)	1 (1,08)	10 (10,8)
	Zayıf	60 (65,2)	9 (9,7)	6 (6,5)	
İspat 7	Güçlü	3 (3,2)	0 (0)	0 (0)	11 (11,9)
	Zayıf	52 (56,5)	16 (17,3)	10 (10,8)	
İspat 8	Güçlü	6 (6,5)	0 (0)	0 (0)	5 (5,4)
	Zayıf	58 (63)	12 (13)	11 (11,9)	

Tablo incelendiğinde öğretmen adaylarının ispatların doğru, eksik ya da yanlış olmalarına karar verirken oluşturdukları güçlü argümanların her bir ispat için oldukça sınırlı sayıda olduğu görülmektedir. Öğretmen adaylarının İDT de yer alan ispatlara yönelik oluşturdukları güçlü argüman oranları; birinci ispatta %9,7, ikinci ispatta %7,6, üçüncü ispatta %7,6, dördüncü ispatta %5,4, beşinci ispatta %2,1, altıncı ispatta %6,5, yedinci ispatta %3,2 ve sekizinci ispatta ise %6,5 şeklinde olduğu görülmüştür. Öğretmen adaylarının genellikle ispatların doğru olduğuna karar verme oranlarının yüksek olmasına rağmen ispatların neden doğru olduklarını açıklayamadıkları ve cevaplarını yeterli argümanlarla destekleyemedikleri söylenebilir.

Tabloya göre katılımcıların doğru olduğuna en az ikna oldukları ispatın 3. ispat olduğu görülmektedir. Öğretmen adaylarının yaklaşık yarısı ispatın doğru olduğunu düşünürken diğer yarısı boş, eksik ya da yanlış kategorilerinde yer almışlardır. Bununla birlikte öğretmen adaylarının ilk kez karşılaştıkları 4. İspatın doğru olduğuna karar verme oranlarının en yüksek olduğu görülmektedir. Bu durum araştırmada elde edilen ilginç bulgular arasındadır. Çünkü adayların ön bilgilerine dayanarak hazırlanan 5 ve 6. İspatlar yerine bu ispatın doğru olduğuna daha fazla ikna olmaları şaşırtıcı bir durumdur. Ancak adayların İDT ne verdikleri yanıtlara göre ispatların doğruluğunu kendi argümanları ile yeterli derecede savunamadıkları görülmüştür.

Katılımcıların İDT de yer alan ispatlara yeterli argüman kullanarak yaptıkları açıklamalar araştırmacılar tarafından güçlü argümanlar olarak sınıflandırılmıştır. Adayların ispatları açıklamakta kullandıkları argümanlar derinlemesine incelendiğinde bu kategoride yer alan yanıtların oldukça sınırlı sayıda olduğu görülmüştür. İDT de yer alan her bir ispatın genel olarak adaylar tarafından doğru olduğu düşünülmesine rağmen açıklamaların yüzeysel olduğu söylenebilir. Aşağıda her bir ispata yönelik adayların kullandıkları güçlü argümanlar betimsel olarak sunulmuştur.

3.1. Güçlü Argümanlar

İDT'de yer alan birinci ispatta ardışık tek sayıların toplamını veren kural görsel bir şekilde karenin alanıyla ilişkilendirilerek yapılmıştır. Bu ispatın doğru olduğunu gösterebilmek için adayların ardışık tek sayılar ile birim karelerin sayıları arasındaki ilişkiyi kurdukları ve sonuçta oluşan geometrik şeklin alanının bu toplamın kuralı olduğuna vurgu yaptıkları görülmüştür. Bu ispatın eksik olduğunu güçlü argümanlarla savunan bir aday ise benzer açıklamalar yapmış ve yapılan ispatın sadece 1+3+5+7+9 dizisinin toplamını örneklediğini vurgulamıştır. Bu yüzden bu adayın yanıtı da güçlü argümanlar kategorisi içerisinde değerlendirilmiştir. Ancak aday mülakata katılmak istemediği için kendisinin görüşleri bu kısımda yer almamaktadır.

M: 1. İspatın neden doğru olduğunu açıklayınız.

Ö6: Mesela bir birimken 1^2*, sonra 2 birimken* 2^2*=4, bunun için 1+3 toplamını demek istemiş diye düşündüm. Hem de dedim n 1 için 1 tane n 2 için 3 tane şeklinde diye düşündüm. Doğru yapıldığı için doğru dedim.*

M: İspatın nasıl yapıldığını açıklayınız.

Ö6: Eklenen yeni tek sayı için hep bir kare oluşturulmuş. Mesela 3 birim kenarlı kare için 1 den 5 e kadar tek sayıların toplamı olmuş. Buradan da bu sayıların toplamı 9 çıkmış.

M: İspatın her doğal sayı için geçerliliği hakkındaki düşünceleriniz nelerdir?

Ö6: Evet geçerlidir. Tek tek denedim. Mesela buradan alacağımız her sayı için karesi alındığında oluyor.

M: Yapılmış olan ispat, ifadeyi tam olarak doğrulamakta mıdır? Neden?

Ö6: Bence göstermiş. Kareleri tamamlayarak göstermiş olduğunu düşünüyorum.

Öğretmen adayları İDT de yer alan ikinci ispatı ardışık sayıların toplamını veren kuralın Gauss Yöntemi olarak bilinen ispatı ile ilişkilendirmeleri gerekmektedir. Burada adayların ardışık tek sayı dizisinin artan ve azalan olarak iki kez yazılıp toplanması sonucunda toplam kuralına ulaşıldığını gözlemlemeleri gerekmektedir. Bu durumun farkında olarak güçlü argümanlar oluşturan adaylardan Ö1 kodlu öğretmen adayının mülakat verileri aşağıda sunulmuştur.

M: 2. İspatın neden doğru olduğunu açıklayınız.

Ö1: Verilen ifadeyi baştan ve sondan yazarak götürülme şeklinde ulaşılmış sonuca. Bu yüzden ifadeyi iki parçadan bir bütüne ulaşıldığı için doğru dedim ben buna.

M: İspatın nasıl yapıldığını açıklayınız.

Ö1: Mantığı; önce tek doğal sayıları baştan büyükten küçüğe sonra küçükten büyüğe yazmış toplamış. Yani götürme işlemi uygulamış. Amacına ulaşmış... [Düşünüyor]... Değişik bir teknik yani... [Düşünüyor]... Ne yapmaya çalışıyor? Tek bir kurala ulaşmaya 2n kuralına ulaşmaya çalışıyor. Burada 2n kuralını bulunca n×2n yapmış. Burada bir örüntü var aslında.

M: İspatın her doğal sayı için geçerliliği hakkındaki düşünceleriniz nelerdir?

Ö1: Her tek doğal sayı için geçerlidir çünkü her tek doğal sayı kullanılarak yapılan bir ispat olmuş. O yüzden geçerlidir.

M: Yapılmış olan ispat, ifadeyi tam olarak doğrulamakta mıdır? Neden?

Ö1: Tam olarak ifadeyi doğrulamaktadır. Çünkü dediğim gibi 1'den 2n-1 kadar, 2n-1 den geri 1'e kadar bunları topladığında 2n bularak tüm tek doğal sayıları kullandığı için hepsini kapsıyor. Geçerli ve doğru bir ispattır.

Üçüncü ispat ardışık tek sayılara karşılık gelecek sayıda birim karenin sıralanması ve daha sonra oluşan şeklin tam ortadan ikiye ayrılarak simetrik bir şekilde birleştirilip birinci ispatta olduğu gibi bir kare oluşturularak yapılmıştır. Bu ispatta adayların oluşan şeklin alanının ardışık tek sayılarının toplamının kuralını verdiğini fark etmeleri gerekmektedir. Adayların oluşturduğu güçlü argümanlara bir örnek aşağıda sunulmuştur.

M: 3. İspatın neden doğru olduğunu açıklayınız.

Ö8: Bu ispatı özellikle çok beğendim. Simetrik olarak döndürüldüğünde kare oluşuyor. Doğru olduğu görülüyor.

M: İspatın nasıl yapıldığını açıklayınız.

Ö8: Sayılar kat kat pasta gibi dizilmiş. Aslında bu şekil çocukların aklında daha rahat kalabilecek bir sistem. Ama bunu biraz daha ilerlettiğimizde simetrik olarak yerleştirilirse kare oluştuğu için n^2 formülü açığa çıkıyor. Kesinlikle daha akılda kalıcı olduğunu düşünüyorum.

M: İspatın her doğal sayı için geçerliliği hakkındaki düşünceleriniz nelerdir?

Ö8: Her doğal sayı için geçerlidir. Ama belli bir sayıdan sonra çok zor olabilir. Çünkü artık algılanamaz olur ve onu ters çevirmekte güçlük çekilebilir.

M: Yapılmış olan ispat, ifadeyi tam olarak doğrulamakta mıdır? Neden?

Ö8: Bu ispatta ifadeyi tam olarak doğrulamaktadır. Yine kare oluşturularak yapılmış doğru bir şekilde doğrular o yüzden.

M: Bu ispatın doğru olduğuna karar vermenizde birinci ispatın etkisi nedir? Açıklayınız.

Ö8: Evet çok fazla etkisi oldu. Daha doğrusu ben tek sayıların toplamının n^2 olduğunu biliyordum ama bu kadar ispatının olacağını hiç düşünmemiştim. 1. İspata bakıp bu soruya geçtiğimde kare oluşturulduğunda aslında bunun diğerinin geliştirilmiş hali olduğunu düşündüm.

İDT de yer alan dördüncü ispat adayların önceki bilgilerinden hareketle farklı iki ardışık sayı dizisi kullanılarak ardışık tek sayıların toplamına ulaşmayı gerektirecek şekilde cebirsel olarak oluşturulmuştur. Adayların bu ispatta kullanılan sayı dizelerinin doğruluğunu ve ardışık sayıların toplamları için kullanılan ifadelerin doğruluğunu teyit etmeleri gerekmektedir. Adayların oluşturduğu güçlü argümanlara bir örnek aşağıda sunulmuştur.

M:4. İspatın neden doğru olduğunu açıklayınız.

Ö4: İşlem basamaklarını doğru yapmış. O yüzden doğru olduğunu düşünüyorum.

M: İspatın nasıl yapıldığını açıklayınız.

Ö4: Burada 1 den n'ye kadar vermiş bunun toplamını biliyoruz demiş. Sonra 0'dan başlamış n-1 e kadar gitmiş. n yerine n-1 yazarsak n.(n-1)/2 olur. Sıfırdan başlamış çünkü tek sayıları toplayacak ya o yüzden. İki ifadeyi toplayıp işlem sonucunda n^2 yi bulmuş.

M: İspatın her doğal sayı için geçerliliği hakkındaki düşünceleriniz nelerdir?

Ö4: Her iki ifade de sonsuza gidiyorsa bütün doğal sayılar arasında geçerlidir.

M: Yapılmış olan ispat, ifadeyi tam olarak doğrulamakta mıdır? Neden?

Ö4: Evet ispatı doğru yapmış çünkü.

M: Bu ispatın doğru olduğuna karar vermenizde ikinci ispatın etkisi nedir?

Ö4: Bunların ikisi farklı şeyler. Birisi aynısı diğeri birbirinden farklı sıralanmış. Sadece aynı sayıları toplayıp 2'ye bölmek benziyor.

Adaylara İDT de beşinci ispat olarak toplam sembolünün özellikleri kullanılarak ardışık tek sayıların toplamını veren kuralın ispatı yapılmıştır. Adayların bu ispatta toplam sembolünün özelliklerine dikkat etmeleri ve özelliklerin doğru bir şekilde kullanıldığını görmeleri gerekmektedir. Adayların oluşturduğu güçlü argümanlara bir örnek aşağıda sunulmuştur.

M: 5. İspatın neden doğru olduğunu açıklayınız.

Ö4: birinci ifade doğru bir şekilde yapılıp k.(k+1) bulunmuş. İkinci ifade de k olur doğru oldu. İşlemleri yaptığımızda k^2'yi bulmuş. İşlemler doğru yapıldığı için doğru.

M: İspatın nasıl yapıldığını açıklayınız.

Ö4: n'den k'ya kadar gitmiş. Bu toplamı yazabiliriz demiş ve bu toplamı ayrı ayrı yazdığımızda parçalamış. Buradan toplam 2'yi başa atıp toplamı bulmuş. Yani ardışık sayıların toplamı ile bulmuş. Birinci ifadeyi k.(k+1) bulmuş. İkinci ifadede k olur. k.(k+1) den de k'yı çıkardığımızda k^2'yi elde etmiş.

M: İspatın her doğal sayı için geçerliliği hakkındaki düşünceleriniz nelerdir?

Ö4: Her doğal sayı için geçerli olduğunu düşünüyorum. Sonsuza gidiyor çünkü her şey sonsuza gidiyor.

M: Yapılmış olan ispat, ifadeyi tam olarak doğrulamakta mıdır? Neden?

Ö4: Evet doğruluyor çünkü doğru yapmış ispatı.

M: Bu ispatın doğru olduğuna karar vermenizde toplam sembolü ve özelliklerinin kullanılmasının etkisi nedir?

Ö4: Toplamı yaparak ispat etti ben de toplamı bildiğim için baktım doğru yapmış. Etkiliyor yani.

Öğretmen adaylarının incelemesi gereken altıncı ispat oldukça aşina oldukları tümevarım yöntemine göre yapılmıştır. Adayların bu ispatta tümevarım basamaklarının doğru bir şekilde kullanıldığını görmeleri beklenmektedir. Aşağıda ispatın doğru olduğunu güçlü argümanlar kullanarak açıklayan bir adayın yanıtı sunulmuştur.

M: 6. İspatın neden doğru olduğunu açıklayınız.

Ö7: Tümevarım özelliklerini kullanarak yapmaya çalıştım. Tümevarım da önce 1 değerini sonra k değerini, en son da k+1 değerini veriyorduk. İşlemleri yaptığımda

$(k+1)^2$ yerinde k'ya kadar olan kısma k^2 yerleştirdiğimizde sonuca ulaşmış olduk. İşlemlerin doğru yapıldığını gördüm böylece.

M: İspatın nasıl yapıldığını açıklayınız.

Ö7: Tümevarım da önce 1 değerini sonra k değerini, en son da k+1 değerini veriliyor. İşlemleri yaptığımda $(k+1)^2$ yerinde k'ya kadar olan kısma k^2 yerleştirdiğimizde sonucu bulmuş oluyoruz.

M: İspatın her doğal sayı için geçerliliği hakkındaki düşünceleriniz nelerdir?

Ö7: Her doğal sayı için geçerlidir. İşlemlerin doğru bir şekilde yapıldığını gördüm. Tümevarım da doğru bir şekilde uygulanmış. O halde her doğal sayı için de geçerli olur.

M: Yapılmış olan ispat, ifadeyi tam olarak doğrulamakta mıdır? Neden?

Ö7: Hiçbir hata yapılmadığına göre tam olarak doğrulamıştır.

M: Bu ispatın doğru olduğuna karar vermenizde tümevarım ispat yönteminin kullanılmasının etkisi nedir?

Ö7: Tümevarımı bilmeseydim burada yapılan işlemleri yerleştirmezdim. Sonuç olarak bu açılımı elde edemezdim.

M: Tümevarım yönteminin özelliklerini açıklayınız.

Ö7: Önce 1 değerini koyuyoruz ifade de sonra k değerini daha sonra da k+1 değerini koyuyoruz. Sonra k+1'i k cinsinden yazmaya çalışıyoruz. Elde ettiğimiz şeyde yerine yazıyoruz doğru sonuca ulaşırsak ispat doğrudur diyoruz.

Adayların İDT de inceledikleri yedinci ispat ardışık tek sayılara karşılık üçgenlerin ve toplamları için ise alan modellerinden yararlanılarak hazırlanmıştır. Bu ispatta adaylar birim karelerin iki ikizkenar üçgenin birleşimden oluştuğunu fark etmeleri ve bu şekilde modellenen büyük üçgendeki ikizkenar üçgen sayısının ardışık tek sayılara, alanları toplamının ise ardışık tek sayıların toplamına karşılık geldiğini görmeleri gerekmektedir. Aşağıda ispatın doğru olduğunu güçlü argümanlar kullanarak açıklayan bir adayın yanıtı sunulmuştur.

M: 7. İspatın neden doğru olduğunu açıklayınız.

Ö9: Karenin üste katlanmış hali olarak düşündüm. Karenin simetriğini alıp katlamış gibi. Ama burada üçgenin alanı 1 birim farklı olarak. 1,3,5 şeklinde tek sayılar yazılmış. Kareye tamamladığımızda ikizkenar üçgenin iki katı oluyor. Bir kenarı a olan karenin içindeki ifadeler 2 katı olacağı için ikizkenar üçgenin $2a^2$ olur onu yarıya böleceğiz buradan da a^2 olur.

M: İspatın nasıl yapıldığını açıklayınız.

Ö9: Burada normalde alanı 1 br^2 olan kare yerine, alanı $2br^2$ olan bir kareyi 2 eş parçaya bölmüş gibi.

M: İspatın her doğal sayı için geçerliliği hakkındaki düşünceleriniz nelerdir?

Ö9: Her doğal sayı için geçerlidir. Çünkü şekil ne kadar büyütülürse büyütülsün aynı sonucu verecektir. İfademiz son terimin karesi şeklinde olur.

M: Yapılmış olan ispat, ifadeyi tam olarak doğrulamakta mıdır? Neden?

Ö9: Doğrulamaktadır. Çünkü karenin tamamen yarısı şeklinde oluyor. Aynı şekilde karedeki gibi tam doğrular.

Öğretmen adaylarının inceledikleri sekizinci ispat ardışık sayıların bir üçgen şeklinde modellenmesi ve bu şekilde oluşturulan dört üçgenin birleşiminden elde edilen bir karenin alanının dörtte biri alınarak görsel bir şekilde hazırlanmıştır. Bu ispatta her bir üçgen ardışık sayı dizisini, karenin alanı ise bu dizilerin toplamının dört katını göstermektedir. Adayların bu ispatta oluşturulan şeklin kare olmasına ve kullanılan üçgenlerin sayısına dikkat etmeleri gerekmektedir. Aşağıda ispatın doğru olduğunu güçlü argümanlar kullanarak açıklayan bir adayın yanıtı sunulmuştur.

M: 8. İspatın neden doğru olduğunu açıklayınız.

Ö3: Bir karenin içerisinde 4 tane üçgen var. Kuralda doğru yapıldığından doğru olduğunu düşündüm.

M: İspatın nasıl yapıldığını açıklayınız.

Ö3: Parçalar bir bütün kareyi oluşturmuş. Karenin her bir kenarının 2n olduğunu belirtmiş. 1/4 i olduğundan 4 e bölmüş.

M: İspatın her doğal sayı için geçerliliği hakkındaki düşünceleriniz nelerdir?

Ö3: Yine sonsuza kadar gidebilir. O halde her doğal sayı için geçerlidir.

M: Yapılmış olan ispat, ifadeyi tam olarak doğrulamakta mıdır? Neden?

Ö3: Her doğal sayı için doğru olduğuna göre tam olarak doğrular.

3.2. Zayıf Argümanlar

Adayların İDT de yer alan ispatlarda kilit noktalara vurgu yapılmayan ve ispatlarda yapılan işlemlerin doğruluğunu yeterli argümanlarla destekleyemeyen açıklamaları araştırmacılar tarafından zayıf argümanlar olarak sınıflandırılmıştır. Çalışmada elde edilen bulgulara göre adayların yanıtlarının genellikle zayıf argümanlar kategorisi içerisinde yer aldığı görülmüştür. İDT de yer alan her bir ispata yönelik adayların doğru, eksik ya da yanlış şeklinde yaptıkları sınıflamaların açıklamalarının genel olarak zayıf argümanlarla desteklendiği söylenebilir. Aşağıda her bir ispata yönelik adayların kullandıkları zayıf argümanlar betimsel olarak sunulmuştur.

Adayların birinci ispata yönelik zayıf argüman kullanımları ispatta kullanılan modeli anlayamamış olmalarından kaynaklanmaktadır. İspatta her bir birim kareler ardışık tek sayıları, alanları ise ardışık sayıların toplamına karşılık gelmektedir. Ancak bu kategoride yer alan adaylar bu durumu tam olarak anlayamadıkları için ispatın doğru, eksik ya da yanlış olmasına karar vermelerine rağmen ikna edici argümanlar oluşturamamışlardır. Aşağıda ispatın eksik olduğunu zayıf argümanlar kullanarak açıklayan bir adayın yanıtı sunulmuştur.

M: 1. İspatın neden eksik olduğunu açıklayınız.

Ö9: Şekle bir anlam veremedim açıkçası. 1, 3, 5 şeklinde şekil büyüyormuş gibi geliyor ama aslında her bir aşamada 2 kare ekleniyor aslında. Bu yüzden n yerine verdiğimiz değerlerle küçük karelerin bulunması arasında bir bağdaşma yapamadım.

M: İspatın nasıl yapıldığını açıklayınız.

Ö9: Mesela karenin alanını düşünürsek biz iki kenarının çarpımı yani bir kenarı a ise a^2 *şeklinde oluyor. Biz 1, 3, 5 şeklinde topladığımız bir ifade de kural olarak* n^2 *olabilir. Bu iki ifadeyi benzeterek yapmaya çalışmış.*

M: Eğer bu ispatı siz yapıyor olsaydınız ispatta gördüğünüz eksikliği nasıl giderirdiniz. Açıklayınız.

Ö9: Her seferinde eklenen 2 tane kareyi göstererek belki farklı renklerle gösterilebilir.

M: Bu şekilde yapılan bir ispatla verilen ifadenin her doğal sayı için doğru olduğu gösterilebilir mi? Neden

Ö9: Her doğal sayı için sağlar. Çünkü her seferinde devam eden bir sistem var. Sadece eğer 5 ile başlatırsak mesela 1 ve 3' ü çıkarmamız gerekecektir.

Öğretmen adaylarının inceledikleri ikinci ispatta kullanılan Gauss Yönteminde ardışık tek sayıların artan ve azalan şekilde neden iki kez yazıldığını anlayamamaları zayıf argümanlar oluşturmalarına sebep olmuştur. Aşağıda ispatın yanlış olduğunu zayıf argümanlar kullanarak açıklayan bir adayın yanıtı sunulmuştur.

M: 2. İspatın neden yanlış olduğunu açıklayınız?

Ö5: Çünkü 1+3+5 şeklinde devam ediyor bu ama en sonunda artık yine 1 koymuş. Açıkçası çok da anlayamadığım için ayrıca 1'den başlayıp sonunda da tekrar 1 olduğundan yanlış olduğunu düşündüm.

M: İspatın nasıl yapıldığını açıklayınız.

Ö5: Yukarıya zaten tek sayıların toplamını dizmişler 2n-1, 2n-3 diye devam ediyor. Sonra +1 koymuşlar bunu anlayamadım. Sonra koymuşlar 2n'leri n tane 2n şeklinde yazmışlar. Bu şekilde yapmışlar.

M: İspatın doğru olabilmesi için size göre nelerin yapılması gerektiğini açıklayınız.

Ö5: En sondaki 1 bence kaldırılmalı çünkü bence bu yanlış olduğunu düşünmeye itiyor bizi. Bende öyle oldu mesela tam ne olduğunu anlayamadığım için öyle olduğunu düşündüm.

M: Bu şekilde yapılan bir ispatla verilen ifadenin her doğal sayı için doğru olduğu gösterilebilir mi? Neden?

Ö5: Bu ifade bence her doğal sayı için doğru olabilir. Çünkü bu ifade sayısal veri ya şekiller bazen insanı yanıltabilir ama sayılar daha kalıcıdır, insanı çok yanıltmaz.

M: Eğer bu ispatı siz yapıyor olsaydınız ispatta gördüğünüz yanlışlığı nasıl giderirdiniz. Açıklayınız.

Ö5: İlk önce 1 i kaldırırdım. Daha açıklayıcı yapardım. Sayıları neden bu şekilde yazdığımı açıklardım.

İDT'de yer alan üçüncü ispatta adayların oluşturulan modeli anlayamamaları ispatı değerlendirirken zayıf argümanlar kullanmalarına sebep olduğu görülmüştür. Bu ispatta kullanılan görsel model birinci ispatta kullanılan modelin farklı bir şeklidir ancak genellikle adayların bu durumu fark edemedikleri gözlenmiştir. Aşağıda ispatın eksik olduğunu zayıf argümanlar kullanarak açıklayan bir adayın yanıtı sunulmuştur.

M:3.İspatın neden eksik olduğunu açıklayınız.

Ö3: Bunun sebebi ben ne yaptığını çok anlayamadım burada. O yüzden de ikna olamadım. Açıklamayı da baya okudum ama anlayamadım. Simetrik olarak döndürülmesini gözümde canlandıramadım.

M: İspatın nasıl yapıldığını açıklayınız.

Ö3: Bu da aslında diğerine benziyor. Yine içini doldurma şeklinde. Ama işte şu keserek simetriğini alma işlemini pek anlamadım. Gerçekten hala anlayamadım.

M: Eğer bu ispatı siz yapıyor olsaydınız ispatta gördüğünüz eksikliği nasıl giderirdiniz. Açıklayınız.

Ö3: Herhalde birazcık hayal gücüyle alakalı bir şey. Hayal gücü geliştiği zaman onu anlayabilirdim. Yani benim simetri olayını anlayamam ile ilgili bir problem.

M: Bu şekilde yapılan bir ispatla verilen ifadenin her doğal sayı için doğru olduğu gösterilebilir mi? Neden?

Ö3: Her doğal sayı için sağlanır mıydı? …(Düşünüyor)…Bence sağlamaz yine. Çünkü dediğim gibi 2'şer ritmik olarak yazılmış bir şey başka bir doğal sayı koyduğumuzda o ritim başka bir şeye çıkıyor.

Öğretmen adaylarının inceledikleri dördüncü ispatta ardışık tek sayılar iki farklı ardışık sayı dizisinin toplamı şeklinde yazılarak elde edilmiştir. Bu ispatta adayların yazılan sayı dizilerinin ve toplamları için kullanılan ifadelerin doğru olup olmadığına karar vermeleri gerekmektedir. Adaylar ispatta kullanılan ardışık sayı dizilerinin doğru olmadığına karar verdikleri için zayıf argümanlarla yanıtlarını desteklemişlerdir. Aşağıda ispatın doğru olduğunu zayıf argümanlar kullanarak açıklayan bir adayın yanıtı sunulmuştur.

M: 4. İspatın neden doğru olduğunu açıklayınız.

Ö5: Sadece birinci satırı almış n'e kadar olan kısmı, ikinci satırda aynılarının tekrarı var sanki üst kısımda n+....+n-1 e kadar giden ifadeler ya buraya baktığımda sadece n'i almış $\frac{n.2n}{2}$ *yapmış. Sanki ikinci satır yokmuş gibi geldi bana. Çünkü 1-1, 2-2, 3-3 … aynı sayıların tekrarı gibi. 2 defa var aynı sayılar.*

M: İspatın nasıl yapıldığını açıklayınız.

Ö5: Burada aynı ifadeleri iki defa kullanmış. Aslında diğer şekillerle hemen hemen aynı şeyi yapmaya çalışmış ama sadece şekil çizmeden. Mesela onlarda ikiye bölüyordu simetriğini alıyordu. Ama bu her birini iki defa kullanmış yine aynı sayıların toplamına bölmüş. Bu şekilde ulaşmaya çalışmış.

M: İspatın her doğal sayı için geçerliliği hakkındaki düşünceleriniz nelerdir?

Ö5: Her doğal sayı için geçerlidir. Yaptığım işlemlerle doğru olduğunu düşünüyorum.

M: Yapılmış olan ispat, ifadeyi tam olarak doğrulamakta mıdır? Neden?

Ö5: Evet tam olarak doğrulamaktadır. Yani bütün sayılar için geçerli olduğundan tam olarak doğrulamıştır.

M: Bu ispatın doğru olduğuna karar vermenizde ikinci ispatın etkisi nedir? Açıklayınız.

Ö5: Büyük bir etkisi vardır. Hatta bu ispatı yaparken diğerine baktım. Birbirlerine benziyorlar.

Öğretmen adaylarının inceledikleri beşinci ispatta toplam sembolünün kullanımı ve özelliklerine yönelik durumların doğruluğuna odaklanmaları gerekmektedir. Adayların toplam sembolünün özelliklerinin yanlış ya da eksik kullanımlarına yönelik düşünceleri bu ispatta zayıf argümanlar kullanarak yanıtlarını açıklamalarına sebep olmuştur. Aşağıda ispatın eksik olduğunu zayıf argümanlar kullanarak açıklayan bir adayın yanıtı sunulmuştur.

M: 5. İspatın neden eksik olduğunu açıklayınız.

Ö8: Bu da 4. İspattaki gibi $\frac{n(n+1)}{2}$ *formülünün nereden geldiği belirtilmemiş. Bu yüzden eksik olduğunu düşündüm.*

M: İspatın nasıl yapıldığını açıklayınız.

Ö8: 2n-1 aslında ardışık tek sayıların gösterimi ve bunu toplam sembolünde yazmış. Daha sonra 2n ile 1'i ayırarak toplam sembolünü kullanmış. 2n için $\frac{n(n+1)}{2}$ *formülünü kullanmış. Buradan da* n^2 *'ye ulaşılmış.*

M: Eğer bu ispatı siz yapıyor olsaydınız ispatta gördüğünüz eksikliği nasıl giderirdiniz. Açıklayınız.

Ö8: Yine bir önceki ispatta olduğu gibi $\frac{n(n+1)}{2}$ *formülünün nerden geldiğini açıklardım. Sonra bu formülü kullanırdım.*

M: Bu şekilde yapılan bir ispatla verilen ifadenin her doğal sayı için doğru olduğu gösterilebilir mi? Neden

Ö8: Her doğal sayı için doğrudur. Zaten toplam sembolünde toplama yapıldığından burada da sonsuza kadar giden sayılar olduğu için her doğal sayı için geçerli olur.

İDT'de yer alan altıncı ispatta öğretmen adaylarının tümevarım basamaklarına odaklanmaları ve bu basamakların doğruluğunu görmeleri gerekmektedir. Ancak adayların ispatta tümevarım basamaklarında eksiklik ya da hata yapıldığına yönelik düşüncelerinden kaynaklanan zayıf argümanlar ürettikleri görülmüştür. Aşağıda ispatın eksik olduğunu zayıf argümanlar kullanarak açıklayan bir adayın yanıtı sunulmuştur.

M: 6. İspatın neden eksik olduğunu açıklayınız.

Ö4: Sonsuz sayıyı denememiz gerekir k+1 e kadar deneyip hepsinin doğru olduğunu söyleyemeyiz. Açıklama yapmamış ayrıca. Direk k^2 *yi kabul etmiş. Yukarda hiç açıklama yapmamış. Diğerlerinde hep* n^2 *olduğunu kabul etmeden buldular. Ama burada hemen n için* n^2 *kabul etmiş. Eksik olmuş.*

M: İspatın nasıl yapıldığını açıklayınız.

Ö4: n=1 için doğru olsun demiş. Sonra n=k için doğru olsun demiş. Daha sonra n=k+1 için doğruluğunu göstermeliyiz demiş. Yani ben bunu pek anlayamadım ya!

M: Eğer bu ispatı siz yapıyor olsaydınız ispatta gördüğünüz eksikliği nasıl giderirdiniz. Açıklayınız.

Ö4: Doğru düzgün bir açıklama yapılması gerekti.

M: Bu şekilde yapılan bir ispatla verilen ifadenin her doğal sayı için doğru olduğu gösterilebilir mi? Neden?

Ö4: Her doğal sayı için geçerli değildir. İspatı kabul etmedim sonuçta.

M: Tümevarım yönteminin özelliklerini açıklayınız.

Ö4: Derste görmüştük. Bir değer veriyorduk. Sonra o değeri kabul ediyorduk. Sonra başka bir değer verdiğimizde bu da doğru oluyordu. Böyle yapıyorduk aslında ama nedense bu ispat bana eksik geldi.

Adayların İDT'de yer alan yedinci ispatta üçgen modelini anlamlandırmaları gerekmektedir. Adayların büyük üçgen içerisindeki her bir ikizkenar üçgenin ardışık tek sayıları ve alanları toplamının ise ardışık sayıların toplamını ifade ettiğini anlayamamaları ispatı zayıf argümanlarla açıklamalarına sebep olmuştur. Aşağıda ispatın eksik olduğunu zayıf argümanlar kullanarak açıklayan bir adayın yanıtı sunulmuştur.

M: 7. İspatın neden eksik olduğunu açıklayınız.

Ö1:Çünkü n=1 için önce ikizkenar sonra n=2,3 ve devamı için ikizkenar yamuk şekilleri belirtilmediği için eksik dedim o yüzden. Oluşan üçgenlerin ikizkenar olup olmadığıyla ilgili bir şey söyleyemiyoruz.

M: İspatın nasıl yapıldığını açıklayınız.

Ö1: Bu şekilde de geometrik bilgiden yararlanarak yapılmaya çalışılmış. Bir dik üçgenden ya da ikizkenar üçgenden yararlanılmaya çalışılmış. Ama tam olarak belirtilmediği için eksik bir ispat olmuş.

M: Eğer bu ispatı siz yapıyor olsaydınız ispatta gördüğünüz eksikliği nasıl giderirdiniz? Açıklayınız.

Ö1: Daha çok geometrik bilgi verirdim. Bu ikizkenar ya da açılarını falan bile verebilirdim belki. Orda kullanılan tüm üçgenlerin özelliklerini verirdim doğrulaması için.

M: Bu şekilde yapılan bir ispatla verilen ifadenin her doğal sayı için doğru olduğu gösterilebilir mi? Açıklayınız.

Ö1: Eğer doğru bir şekilde gerekli materyaller verilseydi doğrulardı. Tüm tek doğal sayılar için bu ifadeyi doğrulardı.

Öğretmen adaylarının inceledikleri sekizinci ispatta karenin alanını ve kareyi oluşturan dört üçgeni anlamlandırmaları gerekmektedir. Ancak adayların karenin alanının ardışık tek sayıların toplamını ve üçgenlerin ise ardışık sayıları modellediğini fark edememeleri ya da yanlış yorumlamaları zayıf argümanlarla ispatı değerlendirmelerine sebep olduğu görülmüştür. Aşağıda ispatın yanlış olduğunu zayıf argümanlar kullanarak açıklayan bir adayın yanıtı sunulmuştur.

M: 8. İspatın neden yanlış olduğunu açıklayınız?

Ö2: Burada verdiği 2n-1 tamam uzunluğuna 2n-1 demiş. Ben burada 2n-1 i 7 ye eşitledim. 7 birim dedim dolayısıyla n'i 4 buldum. Sonra burada 2n demiş, n yerine 4 *yazdığımızda 8 çıkıyor. 8 ile 8 i çarptığımızda 64 çıkıyor. Ama burada n yerine 4 yazdığımızda 16 çıkıyor. 16 ile 64 birbirine eşit değil.*

M: İspatın nasıl yapıldığını açıklayınız.

Ö2: Şekli 4 e bölmüş şeklin 4'te 1'ini almış ve yerleştirmiş. Hani bu 2n-1 tane olduğu için n=4 buldum. Mesela bu 7 tane ama burada n yerine 4 yazdığımız zaman 8 çıkıyor bu sefer. Halbuki n'yi 4 bulmuştuk.

M: İspatın doğru olabilmesi için size göre nelerin yapılması gerektiğini açıklayınız.

Ö2: Doğru olması için her kenarı 7 tane yapmalıydık. O zaman sağlardı.

M: Bu şekilde yapılan bir ispatla verilen ifadenin her doğal sayı için doğru olduğu gösterilebilir mi? Neden?

Ö2: Doğal sayılar 1 den başlıyor. Negatif çıkmadığı için sağlardı bence.

M: Eğer bu ispatı siz yapıyor olsaydınız ispatta gördüğünüz yanlışlığı nasıl giderirdiniz. Açıklayınız.

Ö2: Ben olsaydım şekli böyle çizmezdim. Yani burası madem n 4 çıkıyor. 7 tane var burada. Buralara da 7 tane yapardım. Yani madem bunun 4'te 1'i olarak olacak her birine 7 tane 7 tane koyardım. Kenarları 7 birim olurdu 8 birim olmazdı.

4. Tartışma, Sonuç ve Öneriler

Öğretmen adaylarının ispat değerlendirme süreçlerinin incelenmesi kapsamında matematiksel bir önermenin doğruluğuna ya da yanlışlığına nasıl ikna oldukları ve doğru, eksik ya da yanlış olduğunu düşündükleri matematiksel iddialarını nasıl savunduklarına yönelik elde edilen sonuç, tartışma ve öneriler bu bölümde sunulmuştur. Araştırmada öğretmen adaylarının ardışık tek sayıların toplamını veren kuralın ispatının doğruluğunu değerlendirme becerilerini ortaya çıkarabilmek için sekiz farklı doğru ispattan oluşan İDT uygulanmıştır. Araştırmada adayların İDT'ye verdikleri yanıtlardan elde edilen bulgulara göre ispat değerlendirme becerilerinin oldukça zayıf olduğu görülmektedir. Adayların İDT'de yer alan ispatların genellikle doğru olduğu yönünde yanıtlar vermelerine rağmen ispatların neden doğru olduğuna yönelik oluşturdukları argümanların oldukça zayıf olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Çalışmadan elde edilen bu sonuç öğretmen adaylarının doğru önermeleri belirleme becerilerinin yüksek ancak neden doğru olduğunu açıklama becerilerinin düşük olduğu şeklindeki araştırma sonuçları ile tutarlıdır (Ko, 2010; Ko & Knuth, 2009). Uygan, Tanışlı & Köse (2014) öğretmen adaylarının aksiyomatik yapıyı bozan gerekçeleri değerlendirmekte hata yaptıklarına vurgulamışlardır. Bu araştırmada elde edilen sonuçların da bu durumu desteklediği görülmüştür. Ayrıca öğretmen adayların ispatlardaki anahtar düşünceleri kaçırdıkları ve bu yüzden zayıf argümanlar ürettikleri gözlenmiştir. Benzer sonuçlara Doruk & Kaplan (2013) tarafından yapılan çalışmada da ulaşılmıştır. Bu durumun sebebi olarak ise öğrencilerin ispatlardaki anahtar düşüncelerin farkında olmadan ispatları ezberleme yoluna gitmeleri ve bu şekilde dersleri başarı ile geçmeleri gösterilmiştir (Doruk & Kaplan, 2013).

Öğretmen adayları ile yapılan mülakat bulgularının İDT'ye verilen yanıtları desteklediği görülmüştür. Adayların İDT'de yer alan sözel, cebirsel ve görsel ispatlarda genellikle yapılan işlemlere odaklandıklarını ifade ettikleri belirlenmiştir. Bununla birlikte adayların ispatların yöntemini ve mantığını anlamakta güçlük çektikleri gözlenmiştir. Ayrıca yapılan mülakatların sonuçlarına göre adayların İDT'ye verdikleri yanıtlar ile mülakatlarda verdikleri yanıtların tutarlı olduğu söylenebilir. Bununla birlikte öğretmen adaylarının yapılan mülakatlarda farklı ispat değerlendirme kategorilerinde yer alan yanıtlarının doğruluğundan emin oldukları gözlenmiştir. Araştırmada elde edilen bu durum Harel & Sowder (1998) tarafından yapılan çalışmanın sonuçları ile tutarlıdır. Çünkü Harel & Sowder (1998) aynı öğrencilerin her zaman tek bir ispat şemasına sahip olmadığını bazı durumlarda aynı anda farklı ispat şemalarını kullanabileceğini belirtmektedir. Ayrıca öğrencilerin yaptıkları ispatlar bazen aynı gibi görünse de ispat yapmak için kullandıkları akıl yürütme süreçleri birbirinden farklı olabilmektedir (Raman, 2003).

Bu araştırmanın bulguları İDT'de yer alan 8 ispatın değerlendirilmesi ve yapılan mülakatlar ile sınırlıdır. Dolayısıyla öğretmen adaylarının farklı ispat yöntemlerine yönelik oluşturulan testler yardımıyla ispat değerlendirme durumlarının incelenmesi önerilebilir. Ayrıca öğretmen adaylarının çoğunlukla ispatların doğru olduğuna karar verebildikleri ancak yeterli argümanlar kullanarak yanıtlarını savunamadıkları gözlenmiştir. Bu yüzden öğretmen adaylarına sunulan matematiksel ispatların doğruluğu üzerinde düşünebilecekleri etkinliklerin ileri seviye matematik derslerinde kullanılması önerilmektedir. Özellikle ileri seviye matematik derslerinde genellikle doğru önermelerin irdelenmesi ve sonrasında da ispatlanması öğretmen adaylarının İDT'de yer alan ispatların doğru olduğuna karar vermelerinde etkili olduğu düşünülmektedir. Çünkü bu şekilde yapılan öğretimin sonucunda öğretmen adayları herhangi bir ispatla karşılaştıklarında sorgulamadan doğru olarak görme ve inanma eğiliminde olduklarını vurgulanmaktadır (Smith, 2006). Bu yüzden öğretmen adaylarının kendilerine sunulan matematiksel ifadeleri değerlendirebilmeleri için özellikle ileri seviye matematik derslerinde sadece doğru önermelerin ispatlanması yerine eksik bırakılan ya da bazı noktalarında hataların olduğu ispatları inceleyebilecekleri etkinliklerin yapılması gerekmektedir.

Kaynakça

Almeida, D. (2003). Engendering proof attitudes: Can the genesis of mathematical knowledge teach us anything? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 34*(4), 479-488.

Aylar, E. & Şahiner, Y. (2014). A study on teaching proof to 7th grade students. *Procedia - Social and Behavioral Sciences, 116,* 3427-3431.

Bayazıt, N. (2009). *Prospective mathematics teachers' use of mathematical definitions in doing proof.* Unpublished doctoral dissertation. Florida State University, Florida.

Dede, Y. & Karakuş, F. (2014). A pedagogical perspective concerning the concept of mathematical proof: A theoretical study. *Adıyaman University Journal of Educational Sciences, 4* (2), 47-71.

Doruk, M. & Kaplan, A. (2015). Prospective mathematics teachers' difficulties in doing proofs and causes of their struggle with proofs. *Bayburt Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 10*(2), 315-328.

Doruk, M. & Kaplan, A. (2013). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının dizilerin yakınsaklığı kavramı üzerine ispat değerlendirme becerileri. *Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi, 2*(1), 241-252.

Dreyfus, T. (1990). Advanced mathematical thinking. In P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 113-134). Great Britain: Cambridge University Press.

Güler, G. (2013). *Matematik öğretmeni adaylarının cebir öğrenme alanındaki ispat süreçlerinin incelenmesi*. Yayımlanmamış doktora tezi. Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

Güler, G., Özdemir, E., ve Dikici, R. (2012). Öğretmen adaylarının matematiksel tümevarım yoluyla ispat becerileri ve matematiksel ispat hakkındaki görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi, 20*(1), 219–236.

Güler, G., ve Temizyürek, A. (2015). Matematik öğretmeni adaylarının ardışık tek sayıların toplamının ispatına yönelik model oluşturma becerilerinin incelenmesi. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi, 6(3),* 446-462.

Hanna, G. (1991). Mathematical proof. In: D. Tall (Ed.). *Advanced mathematical thinking*, Kluwer, Dordrecht.

Hanna, G. & Barbeau, E. (2008). Proofs as bearers of mathematical knowledge. *ZDM Mathematics Education, 40,* 345–353.

Harel, G. & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In E. Dubinsky, A. Schoenfeld, and J. Kaput (Eds.), *Research on Collegiate Mathematics Education*, III (pp. 234-283). AMS.

Harel, G. & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 805–842). Charlotte, NC: Information Age.

Kitcher, P. (1984). *The Nature of Mathematical Knowledge*. New York: Oxford University Press.

Knuth, E. J. (2002). Teachers' conceptions of proof in the context of secondary school mathematics. *Journal of Mathematics Teachers Education, 5,* 61 – 88.

Ko, Y.Y., & Knuth, E. (2009). Undergraduate mathematics majors' writing performance producing proofs and counterexamples about continuous functions. *The Journal of Mathematical Behavior, 28*(1), 68-77.

Ko, Y-Y. (2010). Mathematics teachers' conceptions of proof: implications for educational research. *International Journal of Science and Mathematics Education, 8,* 1109-1129.

Moore, R.C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics, 27,* 249-266.

National Council of Teacher of Mathematics (2000). *Principles and standard for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teacher of Mathematics.

Nelsen, R. B. (1993). *Proofs without words: Exercises in visual thinking*. The Mathematical Association of America.

Polya, G. (1981). *Mathematical discovery: On understanding, learning and teaching problem solving*. New York: Wiley.

Powers, R. A., Craviotto, C. & Grassl, R. M. (2010). Impact of proof validation on proof writing in abstract algebra, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 41*(4), 501-514.

Raman, M. (2003). Key ideas: What are they and how can they help us understand how people view proof? *Educational Studies in Mathematics, 52,* 319-325.

Rav, Y. (1999). Why do we prove theorems?, *Philosophia Mathematica, 7*(1), 5–41.

Schoenfeld, A. (1994). What do we know about mathematics curricula? *Journal of Mathematical Behavior, 13*(1), 55-80.

Smith, J.C. (2006). A sense-making approach to proof: Strategies of students in traditional and problem-based number theory courses. *Journal of Mathematical Behavior, 25*(1), 73-90.

Stylianou, D. A., Blanton, M. L. & Rotou, O. (2015). Undergraduate students' understanding of proof: Relationships between proof conceptions, beliefs and classroom experiences with learning proof. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 1*(1), 91-134.

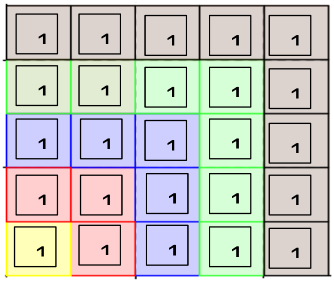
Uygan, C., Tanışlı, D. & Köse, N. Y. (2014). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının kanıt bağlamındaki inançlarının, kanıtlama süreçlerinin ve örnek kanıtları değerlendirme süreçlerinin incelenmesi. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi, 5*(2), 137-157.

Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proofs: The need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics, 48,* 101–119.

Ek-1. İspat Değerlendirme Testi

Aşağıda $1+3+5+\cdots+2n-1=n^2$ ifadesi ile ilgili 8 farklı ispat yer almaktadır. Bu ispatları değerlendirerek size göre hangisi ya da hangilerinin bu ifadeyi tam olarak ispatladığını belirleyiniz.

İspat1.



Şekildeki gibi içten dışa doğru 1, 3, 5… şeklinde birim karelerden oluşan bir kare çizildiğinde;

$n=1$ için 1 tane, $n=2$ için 3 tane, n=3 için 5 tane ve $n=4$ için 7 kare ve $n=5$ için 9 kare birbiri etrafına çizilerek büyük bir kare elde edilebilir. Buradan da $n=5$ olduğu için kenar uzunluğu 5 olur. Buradan da küçük karelerin sayısı $n^2=5^2=25$ elde edilir…

İspat doğrudur, Çünkü…

İspat eksiktir, Çünkü…

İspat yanlıştır, Çünkü…

İspat2. Verilen ifadeyi baştan sona ve sondan başa doğru düzenleyip toplarsak;

$$\begin{array}{c} 1+3+5+\cdots+(2n-1) \\ +(2n-1)+(2n-3)+(2n-5)+\cdots+1 \\ \hline 2n+2n+2n+\cdots+2n=n.2n \end{array}$$

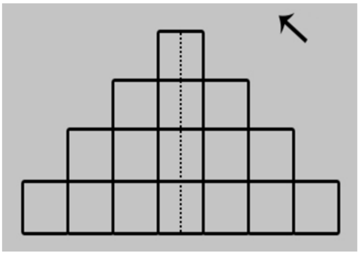
olur. Bu ifade elde etmek istediğimiz toplamın iki katı olduğu için $1+3+5+\cdots+(2n-1)=\frac{n.2n}{2}=n^2$ olur.

İspat doğrudur, Çünkü…

İspat eksiktir, Çünkü…

İspat yanlıştır, Çünkü…

İspat3.



Alt alta 1, 3, 5… şeklinde birim kareler çizilerek yapılabilir… Bu şekilde kareleri çizdiğimizde toplamın n^2 olduğunu gösterebilmek için oluşan şekli tam ortasından keserek simetriğine yapıştırdığımızda kenar uzunluğu n olan bir kare elde ederiz. Bu şekilde de ardışık tek sayıların toplamını n^2 olarak buluruz.

İspat doğrudur, Çünkü…

İspat eksiktir, Çünkü…

İspat yanlıştır, Çünkü…

İspat4. Ardışık tek sayıları parçalayıp sonra da ardışık sayıların toplam kuralını kullanarak ispatı oluşturabiliriz.

$$\begin{array}{c} 1+2+3+4+\cdots+n \\ 0+1+2+3 \ldots+(n-1) \\ \hline 1+3+5+7+\cdots+(2n-1) \end{array}$$

Şimdi ilk iki satırı ayrı ayrı ispat edip topladığımızda $1+3+5+7+\cdots+(2n-1)=n^2$ olması gerekiyor. Ardışık sayıların toplamının kuralını zaten biliyoruz… Yani birinci ifade $\frac{n.(n+1)}{2}$ dir ve ikinci ifade de yine $\frac{n.(n-1)}{2}$ olur. Bu iki ifadeyi topladığımızda;

$\frac{n.(n+1)}{2}+\frac{n.(n-1)}{2}=\frac{n}{2}(n+1+n-1)=\frac{n.2n}{2}=n^2$ olur.

İspat doğrudur, Çünkü…

İspat eksiktir, Çünkü…

İspat yanlıştır, Çünkü…

İspat5: Toplam sembolünü kullanarak da bir ispat yapılabilir…

$\sum_{n=1}^{k}(2n-1)=1+3+5+\cdots+(2k-1)$ şeklinde ardışık tek sayıların toplamını yazabiliriz. Şimdi bu toplamı ayrı ayrı yazdığımızda… $\sum_{n=1}^{k}2n-\sum_{n=1}^{k}1$ şeklinde yazılabilir… Buradan $2\sum_{n=1}^{k}n-\sum_{n=1}^{k}1$ olur. Buradaki ilk toplam 1 den n ye kadar olan sayıların toplamıdır. Yani, ardışık sayıların toplamını veren kurala göre ilk ifade, $2.\frac{k.(k+1)}{2}=k.(k+1)$ olur. İkinci ifade de değişkenimiz n olduğuna göre ve k ya kadar değer alabileceğine göre, $\sum_{n=1}^{k}1=k.1=k$ olur. Dolayısıyla toplam, $k(k+1)-k=k^2+k-k=k^2$ olur.

İspat doğrudur, Çünkü…

İspat eksiktir, Çünkü…

İspat yanlıştır, Çünkü…

İspat6: Tümevarım yöntemi kullanılarak yapılabilir…

$n=1$ için ifade doğrudur. Çünkü $P(1)=1^2=1$ olur.

$n=k$ için ifade doğru olsun. Yani, $1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$ olsun.

$n=k+1$ için ifadenin doğru olduğunu göstermeliyiz.

Yani, $1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1)=(k+1)^2$ olmalıdır. Buradan;

$$\underline{\overset{n=k \text{ için bu kısım } k^2 \text{ olur}}{1+3+5+\cdots+(2k-1)}}+(2k+1)=(k+1)^2$$

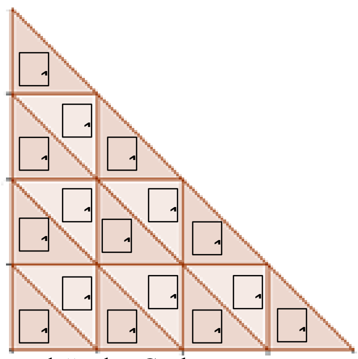
O halde; $k^2 + (2k+1) = (k+1)^2$ eşitliğinin doğru olduğu görülür ve böylece ispat tamamlanmış olur.

İspat doğrudur, Çünkü…

İspat eksiktir, Çünkü…

İspat yanlıştır, Çünkü…

İspat7.



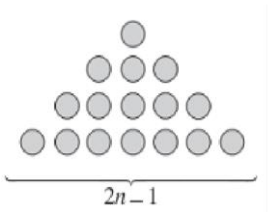
Alanı 1 birim kare olan bir ikizkenar dik üçgen alalım… Daha sonra ikizkenarları kenar kabul eden bir kare ve yine aynı ikizkenar üçgeni bu üçgenin altına çizelim… Yani 3 tane aynı üçgenden elde ederiz… Daha sonra iki kare ve yine aynı üçgeni alta çizdiğimizde beş tane aynı üçgenden elde edilir… Bu şekilde devam edilirse, 1, 3, 5,…, şeklinde tek sayılar elde edilir. Şimdi bunların toplamını bulmak için alanları toplamamız yeterli olacaktır. Yani, $1+3+5+\cdots+(2n-1)$ ifadesinde n terim olacağı için $1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$ olduğu görülür.

İspat doğrudur, Çünkü…

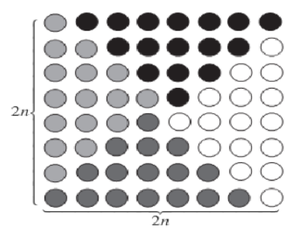
İspat eksiktir, Çünkü…

İspat yanlıştır, Çünkü…

İspat8. 1 den 2n-1 e kadar olan pozitif tamsayıları temsilen aşağıdaki şekli oluşturalım.



Bu şeklin 4 kopyasını kullanarak diğer şekli elde edelim.



İstediğimiz toplam bir kenarı 2n birim karedeki nokta sayısının $\frac{1}{4}$ ü olacaktır. O halde;

$1+3+5+\cdots+(2n-1) = \frac{(2n)^2}{4} = n^2$ olur.

İspat doğrudur, Çünkü…

İspat eksiktir, Çünkü…

İspat yanlıştır, Çünkü…

Extended Abstract

One of the most important objectives of mathematics education is to ensure that students can receive reasonable answers from the questions of why and for what purpose regarding the concepts they will learn (Güler & Temizyürek, 2015). Mathematical proofs are demonstrated to show the accuracy of a result on different grounds, to inform and persuade others about this topic and to place the result achieved into a system (Hanna, 1991), therefore, they have a key role for mathematics education to achieve this objective. Because proofs are important in terms of providing new mathematical methods, tools, strategies and concepts as well as showing the accuracy of the results (Hanna & Barbeau, 2008). When the literature regarding the mathematical proof is analyzed, it is seen that bringing the ability to show mathematical proofs is the most important objective especially in mathematics-weighted branches and in the departments of mathematics teaching (Stylianou, Blanton & Rotou, 2015). Besides, it is emphasized that ability to evaluate a proof is a really necessary capability for the applications and educations of future teachers and academicians (Powers, Craviotto & Grassl, 2010). Therefore, it is necessary to examine in detail whether prospective elementary mathematics teachers who will be elementary mathematics teachers in the future have the skills in question. In this study, it was aimed to examine the evaluation processes of eight different proofs which were prepared for proving the rule that gives the sum of successive odd numbers, of prospective teachers studying in the first grade of elementary mathematics teaching. Within the context of this aim, prospective teachers' status of evaluating the proof and the arguments they produced in this process were analyzed descriptively.

The study was carried out with 92 first-grade students studying in the departments of elementary mathematics teaching in two state universities located in the Central Anatolia and Black Sea regions during the spring semester of the 2015-2016 academic year. Furthermore, the criterion sampling method within the purposeful sampling methods was used in the selection of participants as a data collection tool. Receiving General Mathematics I course was determined to be a criterion in the selection of participants since students are provided to have sufficient information about showing proof by induction within the scope of this course. Each student participating in the study was given a code name by the researchers in the form of S1, S2,…,S92 to keep their names confidential. In this study, the Proof Evaluation Test (PET) which was formed by the researchers and consisted of eight proofs was used. Eight different proofs found in the literature (Güler & Temizyürek, 2015; Nelsen, 1993) were used in the PET for proving the rule that gives the sum of successive odd numbers. The generated test includes options in the form of the proof is right, because ..., the proof is lacking, because ... and the proof is wrong, because ... for each proof to be evaluated by prospective teachers.

The data collection process of the study was conducted in two stages. Firstly, the PET was applied to 92 first-grade students studying in the departments of elementary

mathematics teaching in two different state universities within a course hour. In the second stage, semi-structured interviews were conducted with 9 students who produced strong and weak arguments for eight different proofs for the rule that gives the sum of successive odd numbers during the proof evaluation process. In the process of analyzing the data obtained in the study, students' responses to the PET were firstly analyzed according to the percentage and frequency by the categories of accurate, incomplete and inaccurate. The semi-structured interview data were analyzed descriptively and presented in the form of direct quotations to support the strong and weak arguments formed by prospective teachers.

The ratios of strong arguments formed by prospective teachers for the proofs in the PET were 9,7% in the first proof, 7,6% in the second proof, 7,6% in the third proof, 5,4% in the fourth proof, 2,1% in the fifth proof, 6,5% in the sixth proof, 3,2% in the seventh proof and 6,5% in the eighth proof. It was seen that prospective teachers could not explain why the proofs were correct and could not support their answers with enough arguments although their ratio of deciding that the proofs were correct was generally high. It was seen that the interview findings obtained from prospective teachers supported the answers given to the PET. It was determined that prospective teachers stated that they generally focused on the operations performed in verbal, algebraic and visual proofs in the PET. In addition, it was observed that prospective teachers had difficulty in understanding the methodology and logic of the proofs. Furthermore, according to the results of the interviews, it can be said that the prospective teachers' answers to the PET were consistent with their answers in interviews. However, it was observed that prospective teachers were sure about the accuracy of the answers in different proof evaluation categories in the interviews conducted. Therefore, it is suggested to use the activities that could be thought on the accuracy of the mathematical proofs offered to prospective teachers at the advanced level of mathematics courses.

The findings of this study are limited to the evaluation of 8 proofs in the PET and the interviews conducted. Therefore, it can be suggested that prospective teachers' proof evaluation situations can be examined by means of the tests formed for different proof methods. Similarly, it is necessary to perform activities in which prospective teachers can analyze the proofs which are left incomplete or have some errors instead of proving just correct propositions especially at the advanced level of mathematics courses to evaluate the mathematical expressions presented to them.