ISSN 2757-5543 GÜFFD 2. Cilt (1): 57-67 (2021) DOI: 10.5281/zenodo.4843418

Gazi Üniversitesi Fen Fakültesi Dergisi

http://sci-fac-j.gazi.edu.tr/

Üç Değişkenli Fibonacci Tipli Polinomlar için Doğurucu Fonksiyonlar ve Bazı Özellikleri

Zeynep Özat*, Bayram Çekim

Gazi Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, 06500, Ankara, Türkiye

Öne Çıkanlar

- Çalışmada, Fibonacci tipli polinom ailelerini içeren yeni doğurucu fonksiyonlara yer verilmiştir.
- S_j polinom ailesinin bir genellemesi elde edilmiştir.
- Bu polinom ailelerinin çeşitli özellikleri elde edilmiştir.

Makale Bilgileri

Geliş: 12.04.2021
Kabul: 05.05.2021

Özet

Bu çalışmada ilk olarak iyi bilinen bazı polinom ailelerinin ve özel sayıların tanımlarına yer verilmiştir. Daha sonra Fibonacci tipli polinom ve sayı ailelerini içeren yeni doğurucu fonksiyonlar tanıtılmıştır. Bu polinom ailelerinin açık gösterimi ve doğurucu fonksiyonlarının kısmi türevleri ile bu ailelerin rekürans bağıntıları elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler

Doğurucu fonksiyon, Fibonacci polinomları, Rekürans bağıntısı

The Generating Functions and Some Properties of Three Variable Fibonacci Type Polynomials

Highlights

- In this work, new generating functions including Fibonacci type polynomial families are included.
- A generalization of the polynomial family S_j is given.
- The various properties of these families of polynomial are obtained.

Article Info

Received: 12.04.2021
Accepted: 05.05.2021

Abstract

In this study, first of all, definitions of some well-known polynomial families and special numbers are given. Later, new generating functions including Fibonacci type polynomial and number families are introduced. Explicit representation of these polynomial families, partial derivatives of generating functions of these polynomial families and recurrence relations of these families are obtained.

Keywords

Generating function, Fibonacci polynomials, Recurrence relation

GÜFFD GAZİ ÜNİVERSİTESİ FEN FAKÜLTESİ DERGİSİ

Araştırma Makalesi

* Sorumlu Yazar/Corresponding Author: Zeynep Özat, zeynepozat95@gmail.com

1. GİRİŞ

Orta çağın en ileri gelen Avrupalı matematikçilerinden biri olan Leonardo Fibonacci, Arap sayı sistemini Avrupa'ya tanıtan ilk kişidir. Matematiğe olan katkılarıyla tanınan Fibonacci'nin en önemli eserlerinden biri ise kendi adını taşıyan "*Fibonacci Sayı Dizileri"* dir. Bu sayı dizisi her terimin kendisinden önce gelen iki terimin toplamı ile elde edilmektedir. Fibonacci sayılarının açık gösterimi Éduard Lucas tarafından tanımlanmıştır. Fibonacci dizisini tanımlamış ve ardından bu sayı dizisiyle ilişkili olan yeni bir sayı dizisini matematik dünyasına kazandırmıştır. Bu dizi ise Lucas dizisi olarak adlandırılmaktadır [1, 2].

Fibonacci sayı dizileri $F_0 = 0$ ve $F_1 = 1$ olmak üzere

$$F_{s+2} = F_{s+1} + F_s,\ s = 0,1,2,...$$

rekürans bağıntısıyla tanımlanmıştır ve bu sayı dizilerinin doğurucu fonksiyonu ise

$$\sum_{s=0}^{\infty} F_s t^s = \frac{t}{1-t-t^2}$$

olarak elde edilmiştir [1, 3]. $F_s(x)$ ile gösterilen Fibonacci polinomu olmak üzere

$$F_0(x) = 0, \quad F_1(x) = 1$$

şartları ile bu polinomlar

$$F_{s+2}(x) = xF_{s+1}(x) + F_s(x),\ s = 0,1,2,...$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanmıştır [4, 5]. Fibonacci polinomlarının doğurucu fonksiyonu

$$\sum_{s=0}^{\infty} F_s(x) t^s = \frac{t}{1-xt-t^2}$$

olarak elde edilmiştir [1].

Lucas sayıları ise $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ koşulları olmak üzere rekürans bağıntısı

$$L_{s+2} = L_{s+1} + L_s,\ s = 0,1,2,...$$

ile tanımlanmıştır [1]. Lucas sayılarının doğurucu fonksiyonu

$$\sum_{s=0}^{\infty} L_s t^s = \frac{2-t}{1-t-t^2}$$

şeklinde elde edilmiştir [1]. Başlangıç koşulları $L_0(x) = 2$ ve $L_1(x) = x$ olmak üzere Lucas polinomları ise

$$L_{s+1}(x) = xL_s(x) + L_{s-1}(x),\ s = 1,2,...$$

reküRans bağıntısıyla tanımlanmıştır [6]. Burada Lucas polinomlarının doğurucu fonksiyonu

$$\sum_{s=0}^{\infty} L_s(x)t^s = \frac{2-xt}{1-xt-t^2}$$

dır [6]. Fibonacci sayılarının bir diğer genellemesi olan Tribonacci sayıları ise başlangıç şartları $T_0 = 0$, $T_1 = 1$ ve $T_2 = 1$ olmak üzere

$$T_s = T_{s-1} + T_{s-2} + T_{s-3}, \quad s = 3,4...$$

reküRans bağıntısı ile gösterilmektedir ve Tribonacci sayılarının doğurucu fonksiyonu ise

$$\sum_{s=0}^{\infty} T_s t^s = \frac{t}{1-t-t^2-t^3} \tag{1.1}$$

şeklinde tanımlanmıştır [7, 8]. Tribonacci polinomları, $t_0(x) = 0$, $t_1(x) = 1$ ve $t_2(x) = x^2$ şartları olmak üzere reküRans bağıntısı

$$t_{s+3}(x) = x^2 t_{s+2}(x) + x t_{s+1}(x) + t_s(x), \quad s = 0,1,2,...$$

olarak elde edilmiştir [9]. Tribonacci polinomlarının doğurucu fonksiyonu

$$\sum_{s=0}^{\infty} t_s(x) z^s = \frac{z}{1-x^2 z - xz^2 - z^3}$$

şeklinde elde edilmiştir [1].

Tribonacci-Lucas sayıları, $K_0 = 3$, $K_1 = 1$ ve $K_2 = 3$ koşulları olmak üzere reküRans bağıntısı

$$K_s = K_{s-1} + K_{s-2} + K_{s-3}, \quad s = 3,4,...$$

olarak tanımlanmıştır ve Tribonacci-Lucas sayılarının sayılarının doğurucu fonksiyonu

$$\sum_{s=0}^{\infty} K_s t^s = \frac{3-2t-t^2}{1-t-t^2-t^3}$$

olarak elde edilmiştir [10]. Tribonacci-Lucas polinomu $k_0(x) = 3$, $k_1(x) = x^2$ ve $k_3(x) = x^4 + 2x$ koşulları olmak üzere reküRans bağıntısı

$$k_{s+3}(x) = x^2 k_{s+2}(x) + x k_{s+1}(x) + k_s(x), \quad s = 0,1,2...$$

şeklinde tanımlanmıştır [10]. Tribonacci-Lucas polinomlarının doğurucu fonksiyonu

$$\sum_{s=0}^{\infty} k_s(x) t^s = \frac{3-2x^2 t - xt^2}{1-x^2 t - xt^2 - t^3}$$

olarak elde edilmiştir [10].

$H_0(x,y,z)=0$, $H_1(x,y,z)=1$ ve $H_2(x,y,z)=x$ koşulları olmak üzere $H_s(x,y,z)$, s. üç değişkenli Fibonacci polinomu için rekürans bağıntısı

$$H_s(x,y,z)=xH_{s-1}(x,y,z)+yH_{s-2}(x,y,z)+zH_{s-3}(x,y,z),\ s=3,4,\ldots$$

olarak tanımlanmıştır [11]. Üç değişkenli Fibonacci polinomlarının doğurucu fonksiyonu ise

$$\sum_{s=0}^{\infty} H_s(x,y,z)t^s=\frac{1}{1-xt-yt^2-zt^3} \tag{1.2}$$

olarak elde edilmiştir [11].

$K_s(x,y,z)$, üç değişkenli Lucas polinomu, $K_0(x,y,z)=3$, $K_1(x,y,z)=x$ ve $K_2(x,y,z)=x^2+2y$ koşulları olmak üzere rekürans bağıntısı

$$K_s(x,y,z)=xK_{s-1}(x,y,z)+yK_{s-2}(x,y,z)+zK_{s-3}(x,y,z),\ \ s=3,4,\ldots$$

şeklinde tanımlanmıştır [11]. Üç değişkenli Lucas polinomlarının doğurucu fonksiyonu ise

$$\sum_{s=0}^{\infty} K_s(x,y,z)t^s=\frac{3-2xt-yt^2}{1-xt-yt^2-zt^3}$$

olarak elde edilmiştir [11].

Literatürde, Fibonacci tipli polinom ailelerini inceleyen çok sayıda çalışma yapılmıştır [12-15]. Bu çalışmalarda bazı özel sayı dizileri ve polinom aileleri incelenmiş, çeşitli genellemeleri yapılarak bu polinom ailelerini içeren yeni doğurucu fonksiyonlar, doğurucu fonksiyonların kısmi türevleri ve rekürans bağıntıları elde edilmiştir.

Özdemir ve Şimşek [16, 17] iki değişkenli Fibonacci tipli polinom ailelerini kapsayan yeni bir doğurucu fonksiyon $k,m,n\in\mathbb{N}_0$ için

$$H(t;x,y;k,m,n)=\sum_{j=0}^{\infty} G_j t^j=\frac{1}{1-x^k t-y^m t^{m+n}} \tag{1.3}$$

olarak tanımlamıştır. Daha sonra Kızılateş ve arkadaşları tarafından üç değişkenli $S_j=S_j(x,y,z;k,m,n,c)$ polinom ailesini $k,m,n,c\in\mathbb{N}_0-\{0\}$ ve $\left|x^k t+y^m t^{m+n}+z^c t^{m+n+c}\right|<1$ koşulları olmak üzere

$$M:=M(t;x,y,z;k,m,n,c)=\sum_{j=0}^{\infty} S_j t^j=\frac{1}{1-x^k t-y^m t^{m+n}-z^c t^{m+n+c}} \tag{1.4}$$

olarak tanımlanmıştır [18]. Daha sonra S_j polinom ailesinin açık gösterimine, doğurucu fonksiyonun kısmi türevlerine ve rekürans bağıntılarına yer verilmiştir. Ardından diğer polinom aileleri ve özel sayılarla ilişkilerine değinilmiştir.

Bu çalışmada ise S_j polinom ailesinin daha genel formu olan $S_j^{(h)}$ polinom ailesi incelenecek ve bu ailenin özellikleri üzerinde durulacaktır.

2. $S_j^{(h)}$ POLİNOM AİLESİNİN TANIMI VE ÖZELLİKLERİ

Tanım 2.1. $S_j^{(h)} := S_j^{(h)}(x,y,z;k,m,n,c,d)$ polinom ailesi $k,m,n,c,h,d \in \mathbb{N}_0 - \{0\}$ ve $\left|x^k t + y^m t^{m+n} + z^c t^{m+n+c}\right| < d$ olmak üzere

$$M^{(h)} := M^{(h)}(t;x,y,z;k,m,n,c) = \sum_{j=0}^{\infty} S_j^{(h)} t^j = \frac{1}{\left(d - x^k t - y^m t^{m+n} - z^c t^{m+n+c}\right)^h} \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlansın. Bu eşitlikte $h = d = 1$ değerleri yazıldığı takdirde Eş. 1.4 ile verilen S_j polinom ailesi elde edilir ve çalışmada verilen özellikler ve örnekler sağlanmaktadır [18]. Eş. 2.1 de $h = d = 1$ ve $z = 0$ değerlerinin alınmasıyla Eş. 1.3 ile verilen G_j ailesi elde edilmektedir [16, 17].

Eş. 2.1' de $h = h_1 + h_2$ $\left(h_1, h_2 \in \mathbb{N}_0 - \{0\}\right)$ olsun. O halde

$$\sum_{j=0}^{\infty} S_j^{(h_1+h_2)} t^j = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{j} S_{j-l}^{(h_1)} S_l^{(h_2)} t^j$$

elde edilir. Ardından t^j lerin katsayıları eşitlendiği takdirde

$$S_j^{(h_1+h_2)} = \sum_{l=0}^{j} S_{j-l}^{(h_1)} S_l^{(h_2)} \tag{2.2}$$

eşitliği elde edilir. Örneğin Eş. 2.2' de $h_1 = h_2 = 1$ değerleri yazılarak

$$S_j^{(2)}(x,y,z;k,m,n,c,d) = \sum_{l=0}^{j} S_{j-l}^{(1)} S_l^{(1)}$$

elde edilir. Burada $S_j^{(1)}$ in $d = 1$ durumunda S_j olduğuna dikkat edilmelidir. Eş.2.1'de binom açılımının kullanılmasıyla

$$S_j^{(h)} = \sum_{s=0}^{\left[\frac{j}{n+m}\right]} \sum_{u=0}^{\left[\frac{j-(m+n)s}{n+m+c}\right]} \binom{h+j-(m+n-1)s-(m+n+c-1)u-1}{h-1} \binom{j-(n+m-1)s-(n+m+c-1)u}{s+u}$$

$$\times\binom{s+u}{u}d^{-(h+j-(m+n-1)s-(m+n+c-1)u)}(x^k)^{j-(n+m)(s+u)-cu}y^{ms}z^{cu}$$

eşitliği ile verilen bu polinom ailesinin açık gösterimi elde edilmiş olur.

Örnekler

1) [16, 17] deki çalışmalara benzer olarak $S_j^{(h)}$ polinom ailesinde x yerine ax , y yerine -1, d , k , m yerine 1, n yerine $a-1$ ve z yerine 0 değerleri yazılırsa ve [19] daki Humbert polinomunun doğurucu fonksiyonu kullanılırsa

$$\sum_{j=0}^{\infty}S_j^{(h)}(ax,-1,0;1,1,a-1,1)t^j = \frac{1}{\left(1-axt+t^a\right)^h} = \sum_{j=0}^{\infty}\prod\nolimits_{j,a}^{h}(x)t^j$$

eşitliğine ulaşılır. Daha sonra t^j lerin katsayıları eşitlenerek

$$S_j^{(h)}(ax,-1,0;1,1,a-1,1) = \prod\nolimits_{j,a}^{h}(x)$$

elde edilir.

2) [16-18] deki çalışmalara benzer olarak Eş.2.1 de x yerine $2x$, y yerine -1, z yerine 0 ve $h=d=k=m=n=1$ değerleri yazılırsa ve [20] deki Legendre polinomunun doğurucu fonksiyonu kullanılırsa

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty}S_j^{(1)}(2x,-1,0;1,1,1,c,1)t^j &= \frac{1}{1-2xt+t^2}\\ &= \frac{1}{(1-2xt+t^2)^{1/2}}\cdot\frac{1}{(1-2xt+t^2)^{1/2}}\\ &= \left(\sum_{j=0}^{\infty}P_j(x)t^j\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty}P_r(x)t^r\right)\\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}P_j(x)P_r(x)t^{j+r}\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $p\in\mathbb{N}_0-\{0\}$ için [21] deki $\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}A(r,t)=\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{[t/p]}A(r,t-pr)$ eşitliğin kullanılmasıyla

$$\sum_{j=0}^{\infty}S_j^{(1)}(2x,-1,0;1,1,1,c,1)t^j = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{j}P_{j-r}(x)P_r(x)t^j$$

olarak bulunur. Daha sonra t^j lerin katsayılarının eşitlenmesi ile $P_r(x)$ Legendre polinomu olmak üzere

$$S_j^{(1)}(2x,-1,0;1,1,1,c,1)=\sum_{r=0}^{j}P_{j-r}(x)P_r(x)$$

eşitliği elde edilir.

Tanım 2.2. $k,m,n,c,d,h\in\mathbb{N}_0-\{0\}$ ve $\left|x^k t+y^m t^{m+n}+z^c t^{m+n+c}\right|<d$ koşulları olmak üzere $W_j^{(h)}(x,y,z;k,m,n,c,d)$ polinom ailesi

$$M^{(h)}(t;x,y,z;k,m,n,c,d)t^n=\frac{t^n}{\left(d-x^k t-y^m t^{m+n}-z^c t^{m+n+c}\right)^h}$$
$$=\sum_{j=0}^{\infty}W_j^{(h)}t^j \tag{2.3}$$

doğurucu fonksiyonu ile tanımlansın. Eş. 2.3' de tanımlanan polinom ailesinde $h=k=m=n=c=d=1$ değerlerinin yazılmasıyla

$$\sum_{j=0}^{\infty}W_j^{(1)}(x,y,z;1,1,1,1,1)t^j=\frac{t}{1-xt-yt^2-zt^3}$$

eşitliği bulunur. O halde $W_j^{(1)}(x,y,z;1,1,1,1,1)=H_j(x,y,z)$ eşitliği elde edilir.

Başka bir örnek verecek olursak eğer Eş. 2.3 de x yerine x^2, y yerine x, z yerine 1 değerlerinin yazılması ile

$$\sum_{j=0}^{\infty}W_j^{(1)}(x,x^2,1;1,1,1,1,1)t^j=\frac{t}{1-x^2t-xt^2-t^3}$$

eşitliği sağlanır. Burada $W_j^{(1)}(x,x^2,1;1,1,1,1,1)=T_j(x)$ elde edilir. $S_j^{(h)}$ polinomunda $h=d=1$ değerleri alınarak Kızılateş ve arkadaşları [18] tarafından verilen örnekler ile polinom aileleri ve sayı aileleri elde edilebilir.

3. KISMİ TÜREVLER VE REKÜRANS BAĞINTILARI

Burada $S_j^{(h)}$ polinomunun $M^{(h)}$ doğurucu fonksiyonuna göre x,y,z değişkenlerine göre kısmi türevleri sırasıyla aşağıda verilmiştir:

$$\frac{\partial}{\partial x}M^{(h)}=hkx^{k-1}tM^{(1)}M^{(h)},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}M^{(h)}=hmy^{m-1}t^{n+m}M^{(1)}M^{(h)},$$

$$\frac{\partial}{\partial z}M^{(h)}=hcz^{c-1}t^{m+n+c}M^{(1)}M^{(h)}.$$

Bu kısmi türevlerin kullanılmasıyla aşağıdaki rekürans bağıntıları elde edilmiştir.

Teorem 2.1.

$j \geq 1$ doğal sayıları için

$$\frac{\partial}{\partial x} S_j^{(h)} = kx^{k-1} \sum_{l=0}^{j-1} S_{j-l-1}^{(h)} S_l^{(1)}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. Eş 2.1' in her iki tarafının x 'e göre türevlerinin alınmasıyla

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} S_j^{(h)} t^j &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\left(d - x^k t - y^m t^{m+n} - z^c t^{m+n+c}\right)^h} \\
&= hkx^{k-1} \frac{t}{\left(d - x^k t - y^m t^{m+n} - z^c t^{m+n+c}\right)^h} \cdot \frac{1}{\left(d - x^k t - y^m t^{m+n} - z^c t^{m+n+c}\right)} \\
&= hkx^{k-1} \left(\sum_{j=0}^{\infty} S_j^{(h)} t^{j+1} \right) \left(\sum_{l=0}^{\infty} S_l^{(1)} t^l \right) \\
&= hkx^{k-1} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} S_j^{(h)} S_l^{(1)} t^{j+l+1} \\
&= hkx^{k-1} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{j-1} S_{j-l-1}^{(h)} S_l^{(1)} t^j
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $j < 1$ için $S_j^{(h)}$ polinomu $\frac{\partial}{\partial x} S_0^{(h)} = 0$ olup $j \geq 1$ durumu için t^j 'lerin katsayıları eşitlendiği takdirde

$$\frac{\partial}{\partial x} S_j^{(h)} = hkx^{k-1} \sum_{l=0}^{j-1} S_{j-l-1}^{(h)} S_l^{(1)}$$

eşitliği sağlanır.

2.2. Teorem

$j \geq m+n$ doğal sayıları için

$$\frac{\partial}{\partial y} S_j^{(h)} = hmy^{m-1} \sum_{l=0}^{j-m-n} S_{j-m-n-l}^{(h)} S_l^{(1)}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. Eş 2.1' in her iki tarafının y 'ye göre türevlerinin alınmasıyla

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\partial}{\partial y}S_j^{(h)}t^j &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\left(d-x^k t-y^m t^{m+n}-z^c t^{m+n+c}\right)^h} \\
&= hmy^{m-1}\frac{t^{m+n}}{\left(d-x^k t-y^m t^{m+n}-z^c t^{m+n+c}\right)^h}\cdot\frac{1}{\left(d-x^k t-y^m t^{m+n}-z^c t^{m+n+c}\right)} \\
&= hmy^{m-1}\left(\sum_{j=0}^{\infty}S_j^{(h)}t^{j+m+n}\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty}S_l^{(1)}t^l\right) \\
&= hmy^{m-1}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}S_j^{(h)}S_l^{(1)}t^{j+m+n+l} \\
&= hmy^{m-1}\sum_{j=m+n}^{\infty}\sum_{l=0}^{j-m-n}S_{j-l-1}^{(h)}S_l^{(1)}t^j
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $j<m+n$ için $S_j^{(h)}$ polinomu $\frac{\partial}{\partial y}S_j^{(h)}=0$ olup, $j\geq m+n$ durumu için t^j lerin katsayıları eşitlendiği takdirde

$$\frac{\partial}{\partial y}S_j^{(h)} = hmy^{m-1}\sum_{l=0}^{j-m-n}S_{j-m-n-l}^{(h)}S_l^{(1)}$$

eşitliği elde edilir.

2.3. Teorem

$j\geq m+n+c$ doğal sayıları için

$$\frac{\partial}{\partial z}S_j^{(h)} = hcz^{c-1}\sum_{l=0}^{j-m-n-c}S_{j-m-n-c-l}^{(h)}S_l^{(1)}$$

bağıntısı elde edilir.

İspat. Eş 2.1' in her iki tarafının z 'ye göre türevlerinin alınmasıyla

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\partial}{\partial z}S_j^{(h)}t^j &= \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\left(d-x^k t-y^m t^{m+n}-z^c t^{m+n+c}\right)^h} \\
&= hcz^{c-1}\frac{t^{m+n+c}}{\left(d-x^k t-y^m t^{m+n}-z^c t^{m+n+c}\right)^h}\cdot\frac{1}{\left(d-x^k t-y^m t^{m+n}-z^c t^{m+n+c}\right)}
\end{aligned}$$

$$= hcz^{c-1}\left(\sum_{j=0}^{\infty} S_j^{(h)} t^{j+m+n+c}\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} S_l^{(1)} t^{l}\right)$$

$$= hcz^{c-1}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} S_j^{(h)} S_l^{(1)} t^{j+m+n+c+l}$$

$$= hcz^{c-1}\sum_{j=m+n+c}^{\infty}\sum_{l=0}^{j-m-n-c} S_{j-m-n-c-l}^{(h)} S_l^{(1)} t^{j}$$

elde edilir. Burada $j < m+n+c$ durumu için $S_j^{(h)}$ polinomu $\frac{\partial}{\partial z} S_j^{(h)} = 0$ olup, $j \geq m+n+c$ durumu için t^j lerin katsayıları eşitlendiği takdirde

$$\frac{\partial}{\partial z} S_j^{(h)} = hcz^{c-1}\sum_{l=0}^{j-m-n-c} S_{j-m-n-c-l}^{(h)} S_l^{(1)}$$

eşitliği sağlanır.

ÇIKAR ÇATIŞMASI/ÇAKIŞMASI BİLDİRİMİ

Yazarlar arasında çıkar çatışması/çakışması bulunmamaktadır.

BİLDİRİM

Bu çalışma Zeynep ÖZAT´ın "Üç Değişkenli Bir Polinom Ailesi ve Genelleştirmeleri" başlıklı Yüksek Lisans tezinden üretilmiş ve 28-29 Haziran 2019 tarihinde yapılan 14. Ankara Matematik Günleri´nde sunulmuştur.

KAYNAKLAR

[1] Koshy, T. (2001). *Fibonacci and Lucas Numbers with Aplications.* Pure and Applied Mathematics, Canada: John Wiley and Sons, Interscience, 1-500.

[2] Grigas, A. (2013). *The Fibonacci Sequence, Its history, significance and manifestations in Nature*. A Senior Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements for Graduation in the Honors Program, Liberty University, 1-35.

[3] Posamentier, A.S. and I. Lehmann (2007). *The (fabulaus) Fibonacci numbers.* Amherst, New York: Prometheus Books, 299-305.

[4] Catalani, M. (2004). Some formula for bivariate Fibonacci and Lucas polynomials. ArXiv: Math/0406323v1 [Math. CO].

[5] Hoggatt, V.E. Jr. and Bicknell M. (1972). Convolution Triangles. *The Fibonacci Quarterly,* 10(6), 599-608.

[6] Lupas, A. (1999). A guide of Fibonacci and Lucas polynomials. *Octagon Mathematics Magazine,* 7(1), 2-12.

[7] Feinberg, M. (1963). Fibonacci-Tribonacci. *The Fibonacci Quarterly*, (3), 70-74. [6] Lupas, A. (1999). A guide of Fibonacci and Lucas polynomials. *Octagon Mathematics Magazine,* 7(1), 2-12.

[8] Hoggatt, V.E. Jr. and Bicknell M. (1972). Convolution Triangles. *The Fibonacci Quarterly,* 10(6), 599-608.

[9] Hoggatt, V.E. Jr. and M. Bicknell (1973). Generalized Fibonacci polynomials. *Fibonacci Quarterly*, 11(5), 457-465.

[10] Elia, M. (2001). Derived sequences, the Tribonacci recurrence and cubic forms. *The Fibonacci Quarterly,* 39(2), 107-109.

[11] Kocer, E. G. and Gedikce, H. (2016). Trivariate Fibonacci and Lucas polynomials. *Konuralp Journal of Mathematics*, 4(2), 247-254.

[12] Erkuş-Duman, E. And Tuğlu, N. (2015). Generating functions for the generalized bivariate Fibonacci and Lucas polynomials. *Journal of Computational Analysis and Aplications,* 18(5), 815-821
[13] Kızılateş, C. and Çekim, B. (2018). New families of generating functions for q-Fibonacci and the related polynomials. *Ars Combinatoria,* 136, 397-404.
[14] Kızılateş, C. and Tuğlu, N. (2017). A new generalization of convolved (p, q)-Fibonacci and (p, q)- Lucas polynomials. *Journal of Mathematics and Computer Science.* 7(6), 995-1005.
[15] Tuğlu, N., E.G., Koçer and Stakhov, A. (2011). Bivariate Fibonacci like p-polynomials. *Applied Mathematics and Computation,* 217(24), 10239-10246.
[16] Ozdemir, G. and Simsek, Y. (2016). Generating functions for two-variable polynomials related to a family of Fibonacci type polynomials and numbers. *Filomat,* 30(4), 969-975.
[17] Ozdemir, G. (2017). Çok Değişkenli Fibonacci Tipli Polinomlar İçin Üreteç Fonksiyonları ve Uygulamaları, Doktora Tezi, Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Antalya, 52-67.
[18] Kızılateş, C., Çekim, B., Tuğlu, Naim., Kim, T. (2019). New families of three-variable polynomials coupled with well-known polynomials and numbers. *Symmetry,* 11(2), 264.
[19] Humbert, P. (1920). Some Extensions of Pincherle's Polynomials. *Proceedings of the Edinburg Mathematical Society,* 39, 21-24.
[20] Bell, W.W. (1968). *Special Function for Scientist and Engineer*. London: D. Van Nostrand Company Ltd., 247p.
[21] Srivastava, H.M. and Manocha, H.L. (1984). *A Treatise on Generating Functions*. New York, USA: Ellis Harwood Limited.