Singüler ve Norm Değerleri İçin Sınırlar*

Ayşe Dilek GÜNGÖR[1], Ali SİNAN[1]

Özet: Bu çalışmada öncelikle $n \times n$ tipindeki bir kompleks A matrisinin singüler değerleri için iz ve determinant kullanılarak sınırlar elde edilmiştir. Aynı zamanda satır (sütun) Euclidean normu kullanılarak singüler değerlerinin çarpımı için sınırlar elde edilmiştir. Son olarak ise $T_n = \left[\dfrac{1}{g+(i-j)h} \right]_{i,j=0}^{n}$ Cauchy-Toeplitz matrisi ve $H_n = \left[\dfrac{1}{g+(i+j)h} \right]_{i,j=0}^{n}$ Cauchy-Hankel matrisinin Euclidean ve spektral normları için bir alt sınır bulunmuştur.

Anahtar Kelimeler: Singüler değer**,** Cauchy-Toeplitz matrisi, Cauchy-Hankel matrisi, Euclidean norm.

Bounds For Singular And Norm Values

Abstract: In this study, firstly we have obtained bounds for singular values of a complex matrix A of order $n \times n$ using the trace and determinant. In addition, we have obtained bounds for products of singular values using row (column) Frobenius (or Euclidean) norms and determinant. Consequently, we have found lower bounds for the Euclidean norms and spectral norms of Cauchy-Toeplitz matrix $T_n = \left[\dfrac{1}{g+(i-j)h} \right]_{i,j=0}^{n}$ and Cauchy-Hankel matrix $H_n = \left[\dfrac{1}{g+(i+j)h} \right]_{i,j=0}^{n}$.

Key Words: Singular value, Cauchy-Toeplitz matrix, Cauchy-Hankel matrix, Euclidean norm.

1. Giriş

A $n \times n$ kompleks bir matris ve

$$\sigma_1(A) \geq \sigma_2(A) \geq \ldots \geq \sigma_n(A)$$

A'nın singüler değerleri olsun. $\|A\|_E$ ve $\det A$, sırasıyla A'nın Eucliden normunu ve determinantını göstermek üzere

* Bu makale DoktoraTezinin bir bölümüdür.

[1] Selçuk Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 42031 Kampüs/KONYA

$$\sigma_1^2(A)+\sigma_2^2(A)+...+\sigma_n^2(A)=\|A\|_E^2 \quad (1.1)$$

ve

$$\sigma_1(A)\sigma_2(A)...\sigma_n(A)=|\det A| \quad (1.2)$$

olduğunu biliyoruz.

$r_i(A)$, A'nın i-inci satırının Euclidean normu ve $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+...+\alpha_n^2=n \quad (1.3)$$

olacak şekilde pozitif reel sayılar olmak üzere

$$D=diag\left\{\frac{\alpha_1}{r_1(A)},\frac{\alpha_2}{r_2(A)},...,\frac{\alpha_n}{r_n(A)}\right\} \quad (1.4)$$

köşegen matrisi tanımlansın.

Burada

$$B=DA \quad 1.5)$$

katsayı matrisinin Euclidean normunun $\sqrt{n}$ olduğu açıktır. Eğer $\alpha_1=\alpha_2=..=\alpha_n=1$ ise o taktirde B matrisinin her satırının Euclidean normu 1'dir. Keza aynı şekilde $c_i(A)$, A'nın i-inci sütununun Euclidean normu ve

$$D=diag\left\{\frac{\alpha_1}{c_1(A)},\frac{\alpha_2}{c_2(A)},...,\frac{\alpha_n}{c_n(A)}\right\} \quad (1.6)$$

olmak üzere

$$B=AD \quad (1.7)$$

matrisi tanımlanmıştır. Yine $\|B\|_E=\sqrt{n}$'dir. $\alpha_1=\alpha_2=..=\alpha_n=1$ ise B matrisinin her sütununun Euclidean normu 1 olur [4].

$C=\left[\frac{1}{(x_i-x_j)}\right]_{i,j=1}^{n}$ $(x_i\neq x_j)$ Cauchy matrisi ve $T_n=\left[\,t_{j-i}\,\right]_{i,j=0}^{n}$ ise Teoplitz matrisi olsun. Cauchy Toeplitz matrisi, g ile h $(h\neq 0)$ herhangi iki sayı $\left(\frac{g}{h}\notin Z\right)$ olmak üzere

$$T_n=\left[\frac{1}{g+(i-j)h}\right]_{i,j=0}^{n} \quad (1.8)$$

biçiminde tanımlanır.

$C=\left[\frac{1}{(x_i-x_j)}\right]_{i,j=1}^{n}$ $(x_i\neq x_j)$ Cauchy matrisi ve $H_n=\left[\,h_{i+j}\,\right]_{i,j=0}^{n}$ ise Hankel matrisi olsun. Cauchy Hankel matrisi, g ile h $(h\neq 0)$ herhangi iki sayı $\left(\frac{g}{h}\notin Z\right)$ olmak üzere

$$H_n=\left[\frac{1}{g+(i+j)h}\right]_{i,j=0}^{n} \quad (1.9)$$

biçiminde tanımlanır.

Teorem 1.1. [5] A ve B $n \times n$ tipinde kare matrisler ve $1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n$ olsun. Bu taktirde

$$\prod_{t=1}^{k} \sigma_{i_t}(AB) \le \prod_{t=1}^{k} \sigma_{i_t}(A)\sigma_t(B) \tag{1.10}$$

ve

$$\prod_{t=1}^{k} \sigma_t(AB) \ge \prod_{t=1}^{k} \sigma_{i_t}(A)\sigma_{n-i_t+1}(B) \tag{1.11}$$

dir.

Teorem 1.2. [2] A $p \times n$ tipinde ve B $n \times m$ tipinde birer matris ve $1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n$ olsun. Bu taktirde

$$\prod_{t=1}^{k} \sigma_{i_t}(AB) \ge \prod_{t=1}^{k} \sigma_{i_t}(A)\sigma_{n-t+1}(B) \tag{1.12}$$

dir.

Bu çalışmada ilk olarak; $\sigma_1 \ldots \sigma_k$, $\sigma_{n-k+1} \ldots \sigma_n$, $\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_k^2$ ve $\sigma_{n-k+1}^2 + \ldots + \sigma_n^2$ için yalnızca $k, l, n, \|A\|_E$ ve $|\det A|$ içeren sınırlar elde edilmiştir. Bunun yanında $\sigma_1 \ldots \sigma_k$, $\sigma_k \ldots \sigma_l$ ve $\sigma_{n-k+1} \ldots \sigma_n$ için yeni sınırlar elde edildi. Aynı zamanda satır (sütun) Euclidean normu ve determinant kullanılarak herhangi bir A matrisinin singüler değerlerinin çarpımı için sınırlar elde edilmiştir. Son olarak ise herhangi bir A matrisinin Euclidean normu için bir alt sınır bulunmuştur. Ayrıca bu sınır $T_n = \left[\frac{1}{g + (i-j)h}\right]_{i,j=1}^{n}$ Cauchy-Toeplitz ve $H_n = \left[\frac{1}{g + (i+j)h}\right]_{i,j=1}^{n}$ Cauchy-Hankel matrisleri üzerinde örneklendirilmiştir [1].

2. İz ve Euclidean Normu Kullanılarak Singüler Değerler İçin Sınırlar

$A \in C^{nxn}$ (n≥2), özdeğerleri reel $\lambda_1 \ge \ldots \ge \lambda_n > 0$ ve singüler değerleri $\sigma_1 \ge \ldots \ge \sigma_n > 0$ olan bir kare matris olsun.Bu çalışmada; sadece $k, l, n, \|A\|_E$ ve $|\det A|$ kullanarak $\sigma_1 \ldots \sigma_k$, $\sigma_{n-k+1} \ldots \sigma_n$, $\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_k^2$ ve $\sigma_{n-k+1}^2 + \ldots + \sigma_n^2$ $(1 \le k \le n)$ için sınırlar bulacağız. Bunun için ise, J. K. Merikoski ve A. Virtanen ([3]) "Bounds for eigenvalues using the trace and determinant" isimli çalışması ile $\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2 = \|A\|_E^2$ ve $\sigma_1 \ldots \sigma_n = |\det A|$ bilinen eşitliklerinden faydalanılmıştır. Özel durumlar için $0^0 = 1$ ve x, tanımsız olmak üzere $0x = 0$ kabul edilecektir.

Teorem 2.1 $1 \le k \le n$ olsun. Bu taktirde

$$\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_k^2 \le \|A\|_E^2 - (n-k)\left[\left(\frac{k}{\|A\|_E^2}\right)^k .(\det A)^2\right]^{1/(n-k)} \tag{2.1}$$

$$(\sigma_{n-k+1} \ldots \sigma_n)^{2/k} \le (|\det A|)^{2/n} \le (\sigma_1 \ldots \sigma_k)^{2/k} \le \frac{\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_k^2}{k} \tag{2.2}$$

$$(\sigma_{n-k+1} \ldots \sigma_n)^{2/k} \le \frac{\sigma_{n-k+1}^2 + \ldots + \sigma_n^2}{k} \le \frac{\|A\|_E^2}{n} \le \frac{\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_k^2}{k} \tag{2.3}$$

ve

$$\sigma_{n-k+1}\ldots\sigma_n \ge \left(\frac{n-k}{\|A\|_E^2}\right)^{(n-k)/2} |\det A| \tag{2.4}$$

dir.

Teorem 2.2. $1 \le k \le n-2$ olsun. O zaman

$$\sigma_1\ldots\sigma_k \le \left[\frac{1}{(\det A)^2}\left(\frac{1}{n-k}\left(\frac{\|A\|_E^2}{k+1}\right)^{k+1}\right)^{n-k}\right]^{1/2(n-k-1)} \tag{2.5}$$

dir. $2 \le k \le n-1$ olsun. O zaman

$$\sigma_{n-k+1}\ldots\sigma_n \ge \left[k(\det A)^2\left(\frac{n-k+1}{\|A\|_E^2}\right)^{n-k+1}\right]^{k/2(k-1)} \tag{2.6}$$

dir.

Teorem 2.3. $1 \le k \le n$ olsun . Bu taktirde

$$\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_k^2 \le \frac{1}{(\det A)^2}\frac{(k+1)^{k+1}}{k^k}\left(\frac{\|A\|_E^2}{n+1}\right)^{n+1} \tag{2.7}$$

$$\sigma_{n-k+1}^2 + \ldots + \sigma_n^2 \ge \|A\|_E^2 - \frac{1}{(\det A)^2}\frac{(n-k+1)^{n-k+1}}{(n-k)^{n-k}}\left(\frac{\|A\|_E^2}{n+1}\right)^{n+1} \tag{2.8}$$

dir.

3. Singüler Değerlerin Çarpımları İçin Norm ve Determinant Yardımı ile Elde Edilen Sınırlar

Bu bölümde; (1.3), (1.5) ve (1.7) ifadelerini , (1.10), (1.11) ve (1.12) eşitsizliklerini ve 2. bölümdeki singüler değerlerin çarpımları için verdiğimiz sınırları kullanarak singüler değerlerin çarpımı için yeni sınırlar elde ettik.

Burada genelliği bozmadan 1. bölümdeki gibi A'nın satır ve sütunlarının

$$r_1(A) \le r_2(A) \le \ldots \le r_n(A)$$
$$c_1(A) \le c_2(A) \le \ldots \le c_n(A)$$

biçiminde sıralı olduğunu kabul edelim. Ayrıca (1.3)'de tanımlanan α_i'ler için

$$0 < \alpha_n \le \ldots \le \alpha_2 \le \alpha_1$$

olsun.

Aynı zamanda aşağıda vereceğimiz teoremlerin tümü için, A $n \times n$ tipinde bir matris ve $r_i, (c_i)$, A'nın i-inci satırının(sütununun) Euclidean normu ve α_i'ler (1.3)'de tanımlandığı gibi kabul edilecektir.

Teorem 3.1. $1 < k \le n$ olsun. Bu taktirde

$$\sigma_{n-k+1}\ldots\sigma_n \le \prod_{i=n-k+1}^{n} \frac{\min(r_i, c_i)}{\alpha_i} \tag{3.1}$$

dir.

Teorem 3.2. $1 < k \le n$ olsun. Bu taktirde

$$\sigma_1 \ldots \sigma_k \ge \prod_{i=1}^{n-k} \frac{\alpha_i}{r_i} \left(\frac{n-k}{n} \right)^{(n-k)/2} \left| \det A \right| \tag{3.2}$$

dir.

Teorem 3.3. $1 < k \le n$ olsun. Bu taktirde

$$\sigma_1 \ldots \sigma_k \le \prod_{i=n-k+1}^{n} \frac{\min(r_i, c_i)}{\alpha_i} \left\{ \left(\frac{\prod_{i=1}^{n} \frac{\min(r_i, c_i)}{\alpha_i}}{\left| \det A \right|} \right)^2 \left[\frac{1}{n-k} \left(\frac{n}{k+1} \right)^{k+1} \right]^{n-k} \right\}^{1/2(n-k-1)} \tag{3.3}$$

dir.

Teorem 3.4. $1 \le k < l \le n$ olsun. Bu taktirde

$$\prod_{i=1}^{l-k+1} \frac{c_i}{\alpha_i} \left(\frac{k-1}{n} \right)^{(k-1)/2} \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{c_i} \left| \det A \right| \right)^{l/n} \le \sigma_k \ldots \sigma_l \le \prod_{i=n-l+k}^{n} \frac{c_i}{\alpha_i} \left(\frac{n}{l} \right)^{l/2} \left(\frac{\prod_{i=1}^{n} \frac{c_i}{\alpha_i}}{\left| \det A \right|} \right)^{(k-1)/n} \tag{3.4}$$

ve

$$\prod_{i=1}^{l-k+1} \frac{c_i}{\alpha_i} \left\{ \left(\frac{k-1}{n} \right)^{k-1} \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{r_i} \det A \right)^2 \right\}^{(l-k+1)/2(n-k+1)} \le \sigma_k \ldots \sigma_l$$

$$\le \prod_{i=n-l+k}^{n} \frac{c_i}{\alpha_i} \left\{ \frac{n}{l} - \left(\frac{n}{l} - 1 \right) \left[\left(\frac{l}{n} \right)^l \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{r_i} \det A \right)^2 \right]^{1/(n-l)} \right\}^{(l-k+1)/2} \tag{3.5}$$

dir.

Teorem 3.5. $1 \le k < l \le n-2$ olsun. Bu taktirde

$$\sigma_{n-l+1} \ldots \sigma_{n-k+1}$$

$$\le \prod_{i=k}^{l} \frac{r_i}{\alpha_i} \left\{ \left(\frac{\prod_{i=1}^{n} \frac{r_i}{\alpha_i}}{\det A} \right)^2 \left[\frac{1}{n-l+k-1} \left(\frac{n}{l-k+2} \right)^{l-k+2} \right]^{n-l+k-1} \right\}^{1/2(n-l+k-2)} \tag{3.6}$$

dir.

Teorem 3.6. $1 \le k < l \le n$ olsun. Bu taktirde

$$\sigma_1 \ldots \sigma_{l-k+1} \ge \prod_{i=k}^{l} \frac{r_i}{\alpha_i} \left(\frac{k-1}{n} \right)^{(k-1)/2} \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{r_i} \left| \det A \right| \right)^{l/n} \tag{3.7}$$

dir.

Teorem 3.7. $1 \le k < l \le n$ olsun. Bu taktirde

$$\sigma_{n-l+k} \ldots \sigma_n(A) \le \prod_{i=k}^{l} \frac{r_i}{\alpha_i} \left(\frac{n}{l}\right)^{l/2} \left(\frac{\prod_{i=1}^{n} \frac{r_i}{\alpha_i}}{|\det A|} \right)^{(k-1)/n} \tag{3.8}$$

ve

$$\sigma_{n-l+k} \ldots \sigma_n \le \prod_{i=k}^{l} \frac{r_i}{\alpha_i} \left\{ \frac{n}{l} - \left(\frac{n}{l} - 1\right) \left[\left(\frac{l}{n}\right)^l \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{r_i} |\det A| \right)^2 \right]^{1/(n-l)} \right\}^{(l-k+1)/2} \tag{3.9}$$

dir.

Teorem 3.8. $1 \le k < l \le n-2$ olsun. Bu taktirde

$$\sigma_{n-l+k} \ldots \sigma_n \le \prod_{i=k}^{l} \frac{r_i}{\alpha_i} \left\{ \left(\frac{\prod_{i=1}^{n} \frac{r_i}{\alpha_i}}{|\det A|} \right)^{2[(n-l)k+l-k+1]/n} \left[\frac{1}{n-l} \left(\frac{n}{l+1} \right)^{l+1} \right]^{n-l} \right\}^{1/2(n-l-1)} \tag{3.10}$$

dir.

Teorem 3.9. $1 \le k < l \le n-2$ olsun. Bu taktirde

$$\sigma_k \ldots \sigma_l \le \prod_{i=n-l+1}^{n-k+1} \frac{c_i}{\alpha_i} \left\{ \left(\frac{\prod_{i=1}^{n} \frac{c_i}{\alpha_i}}{|\det A|} \right)^2 \left[\frac{1}{n-l+k-1} \left(\frac{n}{l-k+2} \right)^{l-k+2} \right]^{n-l+k-1} \right\}^{1/2(n-l+k-2)} \tag{3.11}$$

dir.

Teorem 3.10. $2 \le k \le n$ olsun. Bu taktirde

$$\sigma_{n-k+1} \ldots \sigma_n \ge \prod_{i=k+1}^{n} \frac{\alpha_i}{c_i} \left(\frac{n-k}{n} \right)^{n-k/2} |\det A| \tag{3.12}$$

dir.

$B = DA$ ve $B = AD$ matrislerinden elde edilebilen $A = D^{-1}B$ ve $A = BD^{-1}$ matrisleri için de benzer şekilde eşitsizlikler elde edilebilir. Yalnız burada singüler değerlerin sıralı olması gerektiğinden, yine genelliği bozmadan A'nın satır ve sütunlarının

$$r_1(A) \ge r_2(A) \ge \ldots \ge r_n(A)$$

$$c_1(A) \ge c_2(A) \ge \ldots \ge c_n(A)$$

biçiminde sıralı olduğu kabul edilecektir. Ayrıca

$$0 < \alpha_1 \le \alpha_2 \le \ldots \le \alpha_n$$

şeklinde alınacaktır.

Teorem 3.11. $1 < k \le n$ olsun. Bu taktirde

$$\sigma_{n-k+1}...\sigma_n \ge \prod_{i=1}^{n-k} \frac{\alpha_i}{\min(r_i, c_i)} \left(\frac{n-k}{n} \right)^{(n-k)/2} |\det A| \tag{3.13}$$

dir.

Teorem 3.12. $2 \le k \le n-2$ olsun. Bu taktirde

$$\sigma_1...\sigma_k \le \prod_{i=1}^{k} \frac{\min(r_i, c_i)}{\alpha_i} \left\{ \left(\frac{\prod_{i=1}^{n} \frac{\min(r_i, c_i)}{\alpha_i}}{\det A} \right)^2 \left[\frac{1}{n-k} \left(\frac{n}{k+1} \right)^{k+1} \right]^{n-k} \right\}^{1/2(n-k-1)} \tag{3.14}$$

dir.

Teorem 3.13. $2 \le k \le n$ olsun. Bu taktirde

$$\sigma_1...\sigma_k \ge \prod_{i=k+1}^{n} \frac{\alpha_i}{\min(r_i, c_i)} \left(\frac{n-k}{n} \right)^{(n-k)/2} |\det A| \tag{3.15}$$

dir.

Teorem 3.14. $2 \le k \le n-2$ olsun. Bu taktirde

$$\prod_{i=n-k+1}^{n} \frac{r_i}{\alpha_i} \left\{ k \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{r_i} |\det A| \right)^2 \left(\frac{n-k+1}{n} \right)^{n-k+1} \right\}^{k/2(k-1)} \le \sigma_{n-k+1}...\sigma_n$$

$$\le \prod_{i=n-k+1}^{n} \frac{r_i}{\alpha_i} \left\{ \left(\frac{\prod_{i=1}^{n} \frac{r_i}{\alpha_i}}{\det A} \right)^2 \left[\frac{1}{n-k} \left(\frac{n}{k+1} \right)^{k+1} \right]^{n-k} \right\}^{1/2(n-k-1)} \tag{3.16}$$

dir.

Teorem 3.15. $1 \le k < l \le n$ olsun. Bu taktirde

$$\prod_{i=n-l+k}^{n} \frac{c_i}{\alpha_i} \left(\frac{k-1}{n} \right)^{(k-1)/2} \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{c_i} |\det A| \right)^{l/n} \le \sigma_k...\sigma_l \le \prod_{i=1}^{l-k+1} \frac{c_i}{\alpha_i} \left(\frac{n}{l} \right)^{l/2} \left(\frac{\prod_{i=1}^{n} \frac{c_i}{\alpha_i}}{|\det A|} \right)^{(k-1)/n} \tag{3.17}$$

ve

$$\prod_{i=n-l+k}^{n} \frac{c_i}{\alpha_i} \left\{ \left(\frac{k-1}{n} \right)^{k-1} \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{r_i} |\det A| \right)^2 \right\}^{(l-k+1)/2(n-k+1)} \le \sigma_k...\sigma_l$$

$$\le \prod_{i=1}^{l-k+1} \frac{c_i}{\alpha_i} \left\{ \frac{n}{l} - \left(\frac{n}{l} - 1 \right) \left[\left(\frac{l}{n} \right)^l \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{r_i} |\det A| \right)^2 \right]^{1/(n-l)} \right\}^{(l-k+1)/2} \tag{3.18}$$

dir.

Teorem 3.16. $1 \le k < l \le n$ olsun. Bu taktirde

$$\sigma_1 ... \sigma_{l-k+1} \ge \prod_{i=n-l+1}^{n-k+1} \frac{c_i}{\alpha_i} \left(\frac{k-1}{n} \right)^{(k-1)/2} \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{c_i} |\det A| \right)^{1/n} \quad (3.19)$$

dir.

Teorem 3.17. $1 \le k < l \le n-2$ olsun. Bu taktirde

$$\sigma_k ... \sigma_l \le \prod_{i=k}^{l} \frac{r_i}{\alpha_i} \left\{ \left(\frac{\prod_{i=1}^{n} \frac{r_i}{\alpha_i}}{\det A} \right)^2 \left[\frac{1}{n-l+k-1} \left(\frac{n}{l-k+2} \right)^{l-k+2} \right]^{n-l+k-1} \right\}^{1/2(n-l+k-2)} \quad (3.20)$$

dir.

Teorem 3.18. $1 \le k < l \le n$ olsun. Bu taktirde

$$\sigma_k ... \sigma_l \ge \prod_{i=k}^{l} \frac{r_i}{\alpha_i} \left(\frac{n-l+k-1}{n} \right)^{n-l+k-1/2} \prod_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{r_i} |\det A| \quad (3.21)$$

dir.

Aynı zamanda hemen belirtelim ki; bu bölümdeki sınırlar $\alpha_1 = \alpha_2 = .. = \alpha_n = 1$ için de sağlanmaktadır.

4. Bir Matrisin Euclidean Normu İçin Alt Sınır

A $n \times n$ kompleks bir matris olsun. B matrisi (1.5) ve (1.7)'deki gibi ve α_i'ler (1.3)'deki gibi tanımlansın. Bu bölümde öncelikle A matrisinin Euclidean normu için bir alt sınır elde edildi. Daha sonra ise Cauchy-Toeplitz ve Cauchy-Hankel matrislerinin Euclidean normu ve spektral normu için B matrisini kullanarak ve $g = 1/2$ ve $h = 1$ alarak alt sınırlar elde edildi.

Öncelikle B matrisi için

$$\|B\|_E \le \|D\|_E \|A\|_E \quad (4.1)$$

eşitsizliği yazılabilir. Ayrıca yine bilindiği üzere bu B matrisi için $\|B\|_E = \sqrt{n}$'dir. O halde buradan aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.1. A $n \times n$ kompleks bir matris olsun. α_i'ler (1.3)'de tanımlandığı gibi ve r_i,(c_i), A'nın i-inci satırının (sütununun) Euclidean normu olsun. Bu taktirde

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\alpha_i}{\max(r_i, c_i} \right)^2} \le \|A\|_E^2 \quad (4.2)$$

dir.

Şimdi Cauchy-Toeplitz ve Cauchy-Hankel matrislerinin normları için alt sınırları incelenirse: (1.8) ile tanımlanan Cauchy-Toeplitz matrisinde $g = 1/2$ ve $h = 1$ alınırsa

$$T_n = \left[\frac{2}{1+2(i-j)} \right]_{i,j=1}^{n} \quad (4.3)$$

olur.

Teorem 4.2. (4.3)'deki T_n matrisi ve (1.3)'de tanımlanan α_i'ler verilmiş olsun. Bu taktirde

$$\left[n\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i^2}{-\Psi\left(1,n+\frac{1}{2}-i\right)+\Psi\left(1,\frac{1}{2}-i\right)}\right)^{-1}\right]^{1/2}\leq\|T_n\|_E \qquad (4.4)$$

ve buradan

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i^2}{-\Psi\left(1,n+\frac{1}{2}-i\right)+\Psi\left(1,\frac{1}{2}-i\right)}\right)^{-1/2}\leq\|T_n\|_2 \qquad (4.5)$$

dir.
Benzer şekilde (1.9)' daki Cauchy-Hankel matrisinde $g=1/2 \quad ve \quad h=1$ alınması halinde

$$H_n=\left[\frac{2}{1+2(i+j)}\right]_{i,j=1}^{n} \qquad (4.6)$$

olur.

Teorem 4.3. (4.6)'deki H_n matrisi ve (1.3)'de tanımlanan α_i'ler verilmiş olsun. Bu taktirde

$$\left[n\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i^2}{-\Psi\left(1,n+\frac{3}{2}+i\right)+\Psi\left(1,\frac{3}{2}+i\right)}\right)^{-1}\right]^{1/2}\leq\|H_n\|_E \qquad (4.7)$$

ve buradan

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i^2}{-\Psi\left(1,n+\frac{3}{2}+i\right)+\Psi\left(1,\frac{3}{2}+i\right)}\right)^{-1/2}\leq\|H_n\|_2 \qquad (4.8)$$

elde edilir.

Örnek 4.1. $\alpha_1=\alpha_2=..=\alpha_n=1$,

$$a=\left[n\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{-\Psi\left(1,n+\frac{1}{2}-i\right)+\Psi\left(1,\frac{1}{2}-i\right)}\right)^{-1}\right]^{1/2}$$

ve

$$b=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{-\Psi\left(1,n+\frac{1}{2}-i\right)+\Psi\left(1,\frac{1}{2}-i\right)}\right)^{-1/2}$$

olsun. T_n matrisinin Euclidean normu ve spektral normu için aşağıdaki tabloları elde ederiz.

n	a	$\lVert T_n \rVert_E$
1	2	2
5	2.74731933	6.340772176
10	2.91164444	9.389605038
20	3.01166644	13.61887703
50	3.08248181	21.902721

n	b	$\lVert T_n \rVert_2$
1	2	2
5	1.22863855	2.221440394
10	0.92074281	2.221441469
20	0.67342908	2.221441469
50	0.43592875	2.221441469

Örnek 4.2. $\alpha_1=\alpha_2=..=\alpha_n=1$,

$$c=\left[n\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{-\Psi\left(1,n+\frac{3}{2}+i\right)+\Psi\left(1,\frac{3}{2}+i\right)}\right)^{-1}\right]^{1/2}$$

ve

$$d=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{-\Psi\left(1,n+\frac{3}{2}+i\right)+\Psi\left(1,\frac{3}{2}+i\right)}\right)^{-1/2}$$

olsun. H_n matrisinin Euclidean normu ve spektral normu için tablolar ise aşağıdadır:

n	c	$\lVert H_n \rVert_E$
1	0.4	0.4
5	0.36124	0.865852616
10	0.29378712	1.379025097
20	0.22475864	1.972031112
50	0.02236153	2.824466286

n	d	$\lVert H_n \rVert_2$
2	0.29146708	0.372648022
5	0.16155143	0.4935672
10	0.09290364	0.611593782
20	0.05025756	0.718764117
50	0.00211478	0.840784149

Burada $\alpha_1=\alpha_2=..=\alpha_n=1$ için sınırların $\alpha_1^2+\alpha_2^2+...+\alpha_n^2=n$ olacak şekildeki α_i'ler için bulunan sınırlardan daha iyi olduğu görülmüştür. Örneğin, $\alpha_1=0.5$, $\alpha_2=0.9$, $\alpha_3=1.1$, $\alpha_4=1.3$ ve $\alpha_5=\sqrt{1.04}$ olsun. Böylece bu değerler için a, b, c ve d sınırları sırasıyla; $2.618174275 \leq \|T_n\|_E$, $1.170883131 \leq \|T_n\|_2$, $0.3269170099 \leq \|H_n\|_E$ ve $0.1462017314 \leq \|H_n\|_2$ biçimindedir.

Kaynaklar

[1] Güngör A. D., **Singüler ve Norm Değerleri İçin Sınırlar**, Doktora Tezi, Selçuk Üniversitesi, Konya, (2004).

[2] Marshall, A. W., Olkin, I., **Inequalities**, Theory of Majorization and its Applications, Academic, New York, (1979).

[3] Merikoski, J. K., Virtanen, A., **Bounds for eigenvalues using the trace and determinant**, Linear Algebra and its Applications 264, 101-108(1997) .

[4] Rojo Oscar, **Further bounds for the smallest singular values and the spectral condition numbers,** Computers and Mathematics with Applications, Vol. 38, No. 7-8 : 215-228 (1999).

[5] Wang B., Zhang F., **Some Inequalities for the Eigenvalues of the Product of Positive Semidefinite Hermitian Matrices**, Linear Algebra and Its Applications 160: 113-118 (1992).