

İlerletilmiş Kalman Filtresi ve Sistem Belirleme Üzerine Bir Çalışma

Esin KÖKSAL¹, Levent ÖZBEK¹, Fikri ÖZTÜRK¹

Özet: Bu çalışmada İlerletilmiş Kalman Filtresi ve onun bazı düzenlemeleri tanıtılmaktadır. Bir yayın ucuna bağlı bir cismin salınımını etkileyen çevrenin sürtünme katsayısının tahmin edilmesi problemi üzerine bir simülasyon çalışması yapılmaktadır. İlerletilmiş Kalman Filtresi ve onun bir düzenlemesi ile elde edilen tahmin sonuçları grafiksel olarak karşılaştırılmaktadır.

Anahtar kelimeler: Durum-uzay modeli, Sistem belirleme, İlerletilmiş Kalman Filtresi.

A Study on The Extendet Kalman Filter and System Identification

Abstract : In this study the Extended Kalman Filter and some of it's modifications are introduced. A simulation study is carried out on the estimation of the coefficient of friction of the medium, which affects the oscillation of a body tied to the end of a spring. The estimation results obtained by the Extended Kalman Filter and the Modified Extended Kalman Filter are compared grafically.

Key words : State-space model, System identification, Extended Kalman Filter.

1. Lineer Olmayan Kesikli-Zaman Durum-Uzay Modelleri ve İlerletilmiş Kalman Filtresi

Bir sistem ile ilgili durum değişkeni n -boyutlu x rasgele vektörü ve gözlem değişkeni m -boyutlu z rasgele vektörü olsun. $f : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$ ve $h : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^m$ fonksiyonları sürekli türevlere sahip olmak üzere bu sistem için durum-uzay modeli,

$$x_k = f(x_{k-1}, k-1) + w_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$z_k = h(x_k, k) + v_k$$

ve varsayımlar

$$E(w_k) = 0, \quad E(v_k) = 0$$

$$E(w_k w_i') = \begin{cases} Q_k, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases} \quad E(v_k v_i') = \begin{cases} R_k, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$$

$$E(x_0 w_k') = 0, \quad E(x_0 v_k') = 0, \quad E(x_0) = m_0, \quad Cov(x_0) = P_0$$

¹ Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, İstatistik Bölümü, Sistem Modelleme ve Simülasyon laboratuvarı, 06100 Tandoğan/Ankara, E-mail: esinkoksal@science.ankara.edu.tr

olsun. $\{x_k\}$ bir zaman serisi olmak üzere bunun bir gerçekleşmesi sistemin durumunun bir yörüngesi olmaktadır. $x_0^{nom} = E(x_0) = m_0$ ve

$$x_k^{nom} = f(x_{k-1}^{nom}, k-1) \quad , \quad k = 1, 2, \dots$$

olmak üzere $\{x_k^{nom} : k = 0, 1, 2, \dots\}$ dizisine nominal yörünge denir.

δ , nominal yörüngeden pertürbasyonu göstermek üzere,

$$\delta x_k = x_k - x_k^{nom} \quad , \quad \delta z_k = z_k - h(x_k^{nom}, k)$$

gösterimleri altında, f fonksiyonunun x_{k-1}^{nom} noktası komşuluğundaki Taylor açılımından

$$\begin{aligned} x_k &= f(x_{k-1}, k-1) \\ &= f(x_{k-1}^{nom}, k-1) + \frac{\partial f(x, k-1)}{\partial x} \Big|_{x=x_{k-1}^{nom}} \delta x_{k-1} + \text{kalan terim} \\ &= x_k^{nom} + \frac{\partial f(x, k-1)}{\partial x} \Big|_{x=x_{k-1}^{nom}} \delta x_{k-1} + \text{kalan terim} \end{aligned}$$

olup,

$$\delta x_k = \frac{\partial f(x, k-1)}{\partial x} \Big|_{x=x_{k-1}^{nom}} \delta x_{k-1} + \text{kalan terim}$$

dır. Kalan terimin atılmasıyla

$$\delta x_k \cong \Phi(x_k^{nom}, k) \delta x_{k-1}$$

yazılabilir, burada

$$\Phi(x_k^{nom}, k) = \frac{\partial f(x, k-1)}{\partial x} \Big|_{x=x_{k-1}^{nom}}$$

dır.

Gözlem denklemindeki h fonksiyonunun nominal yörüngeye göre lineerleştirilmesi,

$$h(x_k, k) = h(x_k^{nom}, k) = \frac{\partial h(x, k)}{\partial x} \Big|_{x=x_k^{nom}} \delta x_k + \text{kalan terim}$$

olup, kalan terimin atılmasıyla

$$\delta z_k \cong H(x_k^{nom}, k) \delta x_k$$

yazılabilir, burada

$$H(x_k^{nom}, k) = \frac{\partial h(x, k)}{\partial x} \Big|_{x=x_k^{nom}}$$

dır. Böylece pertürbasyonlar için

$$\delta x_k \cong \Phi(x_k^{nom}, k) \delta x_{k-1} + w_{k-1}$$

$$\delta z_k \cong H(x_k^{nom}, k) \delta x_k + v_k$$

lineer durum-uzay modeline ulaşılır. Bu model için Kalman Filtresinin işletilmesi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} \hat{\delta x}_k(-) &= \Phi(x_{k-1}^{nom}, k-1) \hat{\delta x}_{k-1}(+) \quad , \quad k = 1, 2, \dots \\ \hat{\delta x}_k(+) &= \hat{\delta x}_k(-) + K_k \left[z_k - h(x_k^{nom}, k) - H(x_k^{nom}, k) \hat{\delta x}_k(-) \right] \\ P_k(-) &= \Phi(x_{k-1}^{nom}, k-1) P_{k-1}(+) \Phi'(x_{k-1}^{nom}, k-1) + Q_{k-1} \\ K_k &= P_k(-) H(x_k^{nom}, k) \left[H(x_k^{nom}, k) P_k(-) H'(x_k^{nom}, k) + R_k \right]^{-1} \\ P_k(+) &= \left[I - K_k H(x_k^{nom}, k) \right] P_k(-) \end{aligned}$$

Buradaki K_k Kalman Kazanç Matrisi ile P_k matrislerinin hesaplanmasında kullanılan x_k^{nom} değerleri bir x_0^{nom} değerine bağlı olarak

$$x_k^{nom} = f(x_{k-1}^{nom}, k-1) \quad , \quad k = 1, 2, \dots$$

bağıntısından hesaplandığından, K_k ile P_k matrisleri $\hat{\delta x}_k$ durum kestirimlerinden ayrı olarak kendi içinde hesaplanabilir.

Yukarıdaki Kalman Filtresinde x_k^{nom} , $k = 1, 2, \dots$ değerleri yerine $\hat{x}_k(-)$, $k = 1, 2, \dots$ yazılması ve $\delta x_k = x_k - \hat{x}_k$ olduğu göz önünde tutulmasıyla,

$$\hat{x}_0 = E(x_0) \quad , \quad P_0 = \text{cov}(x_0)$$

başlangıç değerlerine bağlı olarak

$$P_{k|k-1} = \left[\frac{\partial f_{k-1}}{\partial x_{k-1}}(\hat{x}_{k-1}) \right] P_{k-1} \left[\frac{\partial f_{k-1}}{\partial x_{k-1}}(\hat{x}_{k-1}) \right]' + Q_{k-1}$$

$$\hat{x}_{k|k-1} = f_{k-1}(\hat{x}_{k-1})$$

$$K_k = P_{k|k-1} \left[\frac{\partial h_k}{\partial x_k}(\hat{x}_{k|k-1}) \right]' \left[\frac{\partial h_k}{\partial x_k}(\hat{x}_{k|k-1}) \right] P_{k|k-1} \left[\frac{\partial h_k}{\partial x_k}(\hat{x}_{k|k-1}) \right]' + R_k \right]^{-1}$$

$$P_k = \left[I - K_k \left[\frac{\partial h_k}{\partial x_k}(\hat{x}_{k|k-1}) \right] \right] P_{k|k-1}$$

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_k = \hat{x}_{k|k-1} + K_k \left[z_k - h_k(\hat{x}_{k|k-1}) \right] \quad , \quad k = 1, 2, \dots$$

alışılmış gösterimdeki İlerletilmiş Kalman Filtresi elde edilir (Grewal ve Andrews 1993, Chen 1993). Buna, Standart İlerletilmiş Kalman Filtresi de denmektedir.

İlerletilmiş Kalman Filtresi birçok lineer olmayan modelde kullanım alanına sahiptir (Chui ve Chen 1991, Reif ve Unbehauen 1999, Bacchetta ve Gerlach 1997, Özbek ve Efe 2003, Şenol ve diğerleri 2003).

2. İlerletilmiş Kalman Filtresinin Bir Düzenlemesi

Lineer olmayan durum-uzay modeli,

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_k(y_k) x_k \\ G_k(x_k, y_k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi_k^1 \\ \xi_k^2 \end{bmatrix}$$

$$z_k = \begin{bmatrix} H_k(x_k, y_k) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} + \eta_k$$

biçiminde olsun. Burada, f_k , g_k ve h_k fonksiyonları türevlenebilir, durum başlangıç vektörü hata terimlerinden ilişkisiz ,

$$E \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_0^1 \\ m_0^2 \end{bmatrix} \quad , \quad \text{Cov} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = P_0$$

ve iki denklemdaki hata terimleri aralarında ilişkisiz, sıfır ortalamalı

$$\text{Cov}\left(\begin{bmatrix} \xi_k^1 \\ \xi_k^2 \\ \xi_k \end{bmatrix}\right) = Q_k \quad , \quad \text{Cov}(\eta_k) = R_k$$

varyans-kovaryans matrisleri ile beyaz gürültü sürecidir.

Buradaki model için İlerletilmiş Kalman Filtresinin Chui ve Chen (1991) tarafından verilen bir düzenlemesi iki algorithmandan oluşmaktadır. Birinci algoritma, değişik bir nominal yörünge kullanarak, bu model üzerinde birinci kısımda verilen İlerletilmiş Kalman Filtresinin kendisidir. İkinci algoritma,

$$x_{k+1} = F_k(\hat{y}_k)x_k + \xi_k^1$$

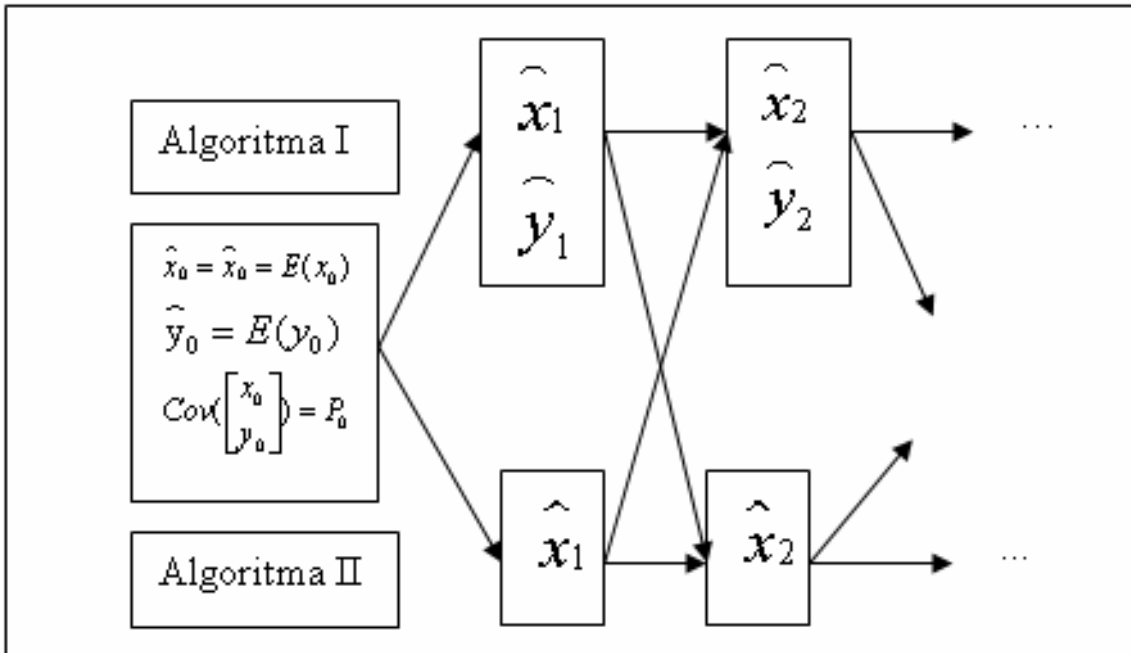
$$z_k = H_k(\hat{x}_k, \hat{y}_k)x_k + \eta_k$$

lineer durum-uzay modelinde işletilen Kalman Filtresidir. Buradaki \hat{x}_k, \hat{y}_k değerleri birinci algorithmandan elde edilen tahminlerdir. Bu ikinci algorithmandan elde edilen \hat{x}_{k-1} durum tahminleri birinci algorithmadaki Taylor açılımlarında nominal yörünge değerleri olarak kullanılmaktadır. Her iki algoritma aynı,

$$\hat{x}_0 = \hat{x}_0 = E(x_0) \quad , \quad \hat{y}_0 = E(y_0)$$

$$\text{Cov}\left(\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}\right) = P_0$$

başlangıç değerleri ile başlayıp, her adımda birbirine değerler aktarıp Şekil-1 deki gibi paralel biçimde işlemektedirler.



Şekil 1.

Algoritma I :

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_0 \\ \hat{y}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_0^1 \\ m_0^2 \end{bmatrix}, \quad \text{Cov} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = P_0$$

$$P_{k|k-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \begin{bmatrix} x_{k-1} \\ y_{k-1} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} F_{k-1}(\hat{y}_{k-1})\hat{x}_{k-1} \\ G_{k-1}(\hat{x}_{k-1}, \hat{y}_{k-1}) \end{bmatrix} \end{bmatrix} P_{k-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \begin{bmatrix} x_{k-1} \\ y_{k-1} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} F_{k-1}(\hat{y}_{k-1})\hat{x}_{k-1} \\ F_{k-1}(\hat{x}_{k-1}, \hat{y}_{k-1}) \end{bmatrix} \end{bmatrix}' + Q_{k-1}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{k|k-1} \\ \hat{y}_{k|k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{k-1}(\hat{y}_{k-1})\hat{x}_{k-1} \\ G_{k-1}(\hat{x}_{k-1}, \hat{y}_{k-1}) \end{bmatrix}$$

$$K_k = P_{k|k-1} \left[\frac{\partial}{\partial \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}} H_k(\hat{x}_{k|k-1}, \hat{y}_{k|k-1}) \right]' \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}} H_k(\hat{x}_{k|k-1}, \hat{y}_{k|k-1}) \right] P_{k|k-1} \left[\frac{\partial}{\partial \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}} H_k(\hat{x}_{k|k-1}, \hat{y}_{k|k-1}) \right]' + R_k \right\}^{-1}$$

$$P_k = \left\{ I - K_k \left[\frac{\partial}{\partial \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}} H_k(\hat{x}_{k|k-1}, \hat{y}_{k|k-1}) \right] \right\} P_{k|k-1}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_k \\ \hat{y}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{k|k-1} \\ \hat{y}_{k|k-1} \end{bmatrix} + K_k \left\{ z_k - \left[H_k(\hat{x}_{k|k-1}, \hat{y}_{k|k-1}) \right] \hat{x}_{k|k-1} \right\}, \quad k=1,2,\dots$$

Algoritma II :

$$\hat{x}_0 = E(x_0), \quad P_0 = \text{cov}(x_0)$$

$$P_{k|k-1} = \left[F_{k-1}(\hat{y}_{k-1}) \right] P_{k-1} \left[F_{k-1}(\hat{y}_{k-1}) \right]' + Q_{k-1}$$

$$\hat{x}_{k|k-1} = F_{k-1}(\hat{y}_{k-1})\hat{x}_{k-1}$$

$$K_k = P_{k|k-1} \left[H_k(\hat{x}_{k|k-1}, \hat{y}_{k|k-1}) \right]' \left\{ \left[H_k(\hat{x}_{k|k-1}, \hat{y}_{k|k-1}) \right] P_{k|k-1} \left[H_k(\hat{x}_{k|k-1}, \hat{y}_{k|k-1}) \right]' + R_k \right\}^{-1}$$

$$P_k = \left\{ I - K_k \left[H_k(\hat{x}_{k|k-1}, \hat{y}_{k|k-1}) \right] \right\} P_{k|k-1}$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k|k-1} + K_k \left\{ z_k - \left[H_k(\hat{x}_{k|k-1}, \hat{y}_{k|k-1}) \right] \hat{x}_{k|k-1} \right\}, \quad k=1,2,\dots$$

Bu iki algoritmanın paralel işlemesi olarak düzenlenen İlerletilmiş Kalman Filtresi, bilinmeyen ve zamanla değişen sistem parametresi bulunduran lineer durum-uzay modellerinde sistem belirlenmesi açısından elverişli bir algoritmadır. Bilinmeyen sistem parametresi içeren,

$$x_{k+1} = A_k(\theta_k)x_k + \xi_k$$

$$z_k = B_k(\theta_k)x_k + \eta_k$$

gibi, durum vektörüne göre lineer bir durum-uzay modeli,

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ \theta_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_k(\theta_k)x_k \\ \theta_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi_k \\ \zeta_k \end{bmatrix}$$

$$z_k = \begin{bmatrix} B_k(\theta_k) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ \theta_k \end{bmatrix} + \eta_k$$

biçiminde yazılıp,

$$E\left(\begin{bmatrix} x_0 \\ \theta_0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} m_0 \\ \theta_0 \end{bmatrix}, \quad P_0 = \begin{bmatrix} Cov(x_0) & 0 \\ 0 & S_0 \end{bmatrix}$$

gibi bir başlangıç ve

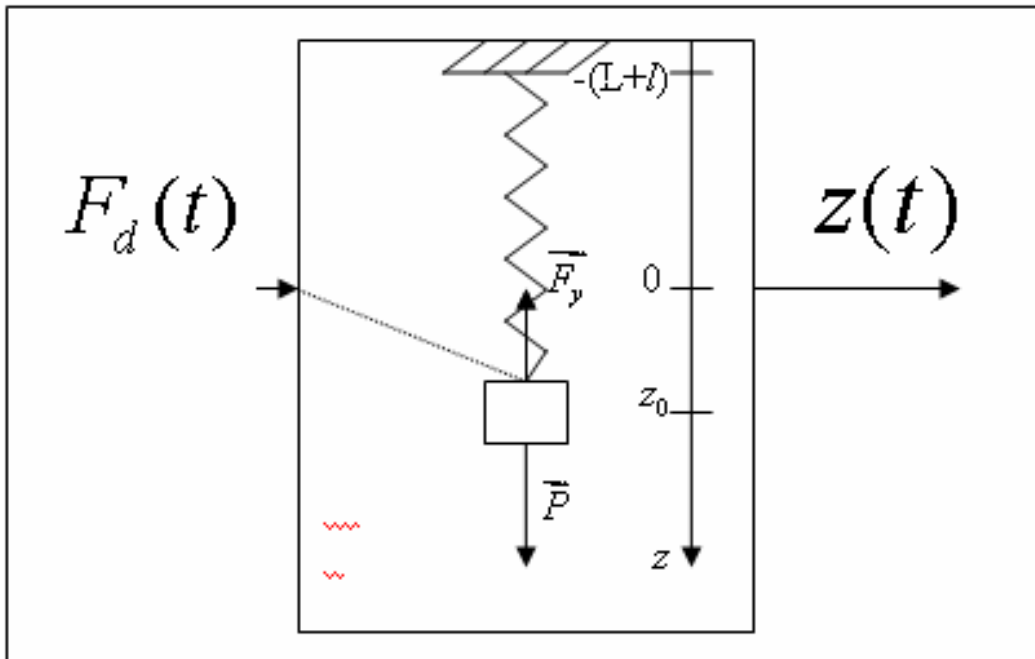
$$Cov\left(\begin{bmatrix} \xi_k \\ \zeta_k \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} Cov(\xi_k) & 0 \\ 0 & Cov(\zeta_k) \end{bmatrix} = Q_k$$

$$Cov(\eta_k) = R_k$$

varyans-kovaryans matrisleri ile bir lineer olmayan durum-uzay modeli olarak ele alınabilir. Bu model için yukarıda düzenlenen İlerletilmiş Kalman Filtresi ile indirgemeli tahmin yapılabilir. Bir lineer olmayan durum-uzay modeli olan bu modelde İlerletilmiş Kalman Filtresinin kendisi de kullanılabilir. Sonraki kısımda bununla ilgili bir uygulama yapılacaktır.

3. Bir Yayın Ucuna Bağlı Bir Cismin Salınımı

Hook kanununa göre bir yayın uzunluğundaki küçük değişimler için değişme miktarı etki eden kuvvetin büyüklüğü ile orantılıdır. Orantı katsayısına yay sabiti denmektedir. m kütleli bir cisim bir ucu sabitleştirilmiş düşey halde olan L uzunluklu bir yayın diğer ucuna asılmış ve



Şekil 2.

yay l kadar uzamış olsun. Tecrübelerimizden bildiğimiz gibi cisim biraz çekilip bırakıldığında salınım (titreşim) yapmaktadır. Çevredeki ortam (hava, su) ile sürtünme ve cisme zaman içinde etki eden kuvvetler olabilir. $t = 0$ anında $L + l$ uzunlukta olan yay z_0 kadar çekilip bırakıldığında salınımına başlamaktadır. Salınım çevre ile sürtünme ve dış kuvvetlere bağlı olarak devam etmektedir.

Sürtünme kuvvetinin büyüklüğünün hız ile orantılı, yani $F_s = s.v(t)$ olduğu varsayalım.

Belli bir t anında cisme etki eden kuvvetler için,

$$\vec{F} = \vec{P} + \vec{F}_y + \vec{F}_s + \vec{F}_d$$

yazılabilir. \vec{P} cisme etki eden yerçekimi kuvveti, \vec{F}_y yayın cisme etki ettiği kuvvet, \vec{F}_s sürtünme kuvveti ve \vec{F}_d cisme etki eden dış kuvvettir. \vec{F}_y ile \vec{F}_s kuvvetlerinin yönünün hareket yönünün ters yönünde olduğu göz önüne alınır, başlangıç noktası asılı kütlelerin bulunduğu nokta ve yönü ile doğrultusu yerçekimi kuvveti ile aynı olan bir z - ekseninde bu kuvvetlerin büyüklükleri için,

$$mz''(t) = mg - k(l + z(t)) - sz'(t) + F_d(t)$$

diferansiyel denklemi oluşturulabilir. $F_y = P$ olduğu göz önüne alınır,

$$mz''(t) + sz'(t) + kz(t) = F_d(t)$$

$$z(0) = z_0, \quad z'(0) = v_0$$

modeline ulaşılır. Burada s ortam ile ilgili sürtünme katsayısı, k yay sabiti, \vec{F}_d cisme etki eden dış kuvvet, z_0 başlangıç anındaki cismin konumu ve v_0 başlangıç anındaki cismin hızının büyüklüğüdür. Diferansiyel denklem şeklindeki model,

$$z''(t) + \frac{s}{m}z'(t) + \frac{k}{m}z(t) = \frac{1}{m}F_d(t)$$

$$z(0) = z_0, \quad z'(0) = v_0$$

olmak üzere,

$$\begin{cases} x_1(t) = z(t) \\ x_2(t) = \dot{x}_1(t) + \frac{s}{m}z(t) = \dot{x}_1(t) + \frac{s}{m}z(t) = z'(t) + \frac{s}{m}z(t) \end{cases}$$

değişken değiştirmesi sonucu,

$$\dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{s}{m} & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} F_d(t)$$

$$z(t) = [1 \ 0] \underline{x}(t)$$

$$\underline{x}(0) = \begin{bmatrix} y_0 \\ v_0 + \frac{s}{m}z_0 \end{bmatrix}$$

durum-uzay modeli elde edilir (Özbek ve Öztürk 2003).

Bir sistemle ilgili olarak amacımız gözlenen çıktıya bağlı olarak, sistemin parametreleri bilinmiyorsa sistem parametrelerini belirlemek, uygun girdiyi vererek sistemi kontrol etmek, sistemin gelecekteki davranışını öngörmek olabilir. Yaya bağlı cisim ile ilgili, s sürtünme katsayısı bilinmesin ve tahmin edilmek istensin. MKS ölçü sisteminde, $m = 1, k = 1$, dış kuvvet $F_d(t) = 0$, $t \geq 0$ olsun.

Cismin hareketini anlatan sürekli zaman Durum-uzay modeli,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$z(t) = x_1(t)$$

olmak üzere, $\Delta t = 0.1$ için elde edilen kesikli zaman Durum-uzay modeli,

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.1s & 0.1 \\ -0.1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

$$z(k) = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

dir. s sürtünme katsayısı, üçüncü durum değişkeni olarak ele alınıp, durum değişkenleri ve gözlem değişkeni için gürültülerin de söz konusu olduğu,

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-0.1x_3(k) & 0.1 & 0 \\ -0.1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + w_k$$

$$z(k) = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \eta_k, \quad w_k \sim N(0, Q_k), \quad \eta_k \sim N(0, R_k)$$

modeli göz önüne alınsın. Bu modeldeki durum denklemi, durum değişkenlerine göre lineer olmayan bir denklemdir. Salınan kütle için $z(k)$ konumunu gözleyerek sürtünme katsayısı İlerletilmiş Kalman Filtresi ile tahmin edilebilir.

Durum-uzay modeli,

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-0.1x_3(k) & 0.1 \\ -0.1 & 1 \\ x_3(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + w_k$$

$$z(k) = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} + \eta_k$$

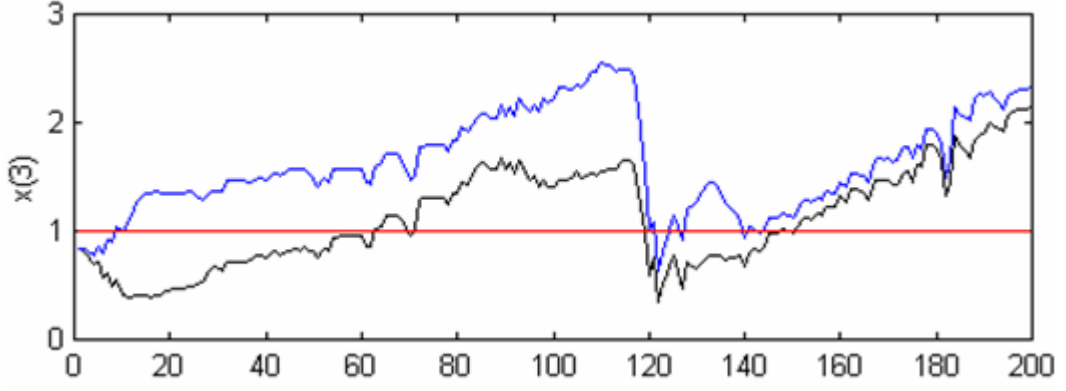
biçiminde yazılıp, sürtünme katsayısı yukarıdaki gibi düzenlenen İlerletilmiş Kalman Filtresi ile de tahmin edilebilir.

Tahminleri değerlendirmek amacıyla sürtünme katsayısının:

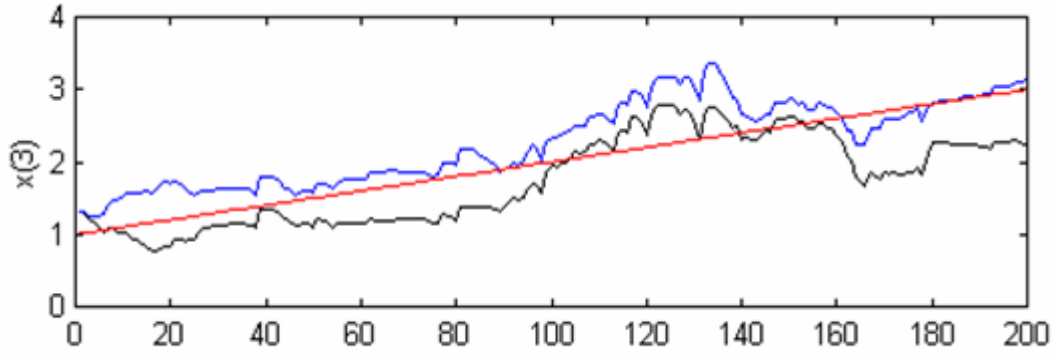
- $x_3(k) = 1$, $k = 1, 2, \dots$ ($s = 1$, zaman içinde sabit)
- $x_3(k) = 1 + 0.1k/10$, $k = 1, 2, \dots$ ($s(t) = 1 + t/10$, $t \geq 0$)
- $x_3(k) = \begin{cases} 1 & , \quad k = 1, 2, \dots, 49 \\ 0.5 & , \quad k = 50, 51, \dots, 99 \\ 0.2 & , \quad k = 100, 101, \dots \end{cases}$ ($s(t) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \leq t < 5 \\ 0.5 & , \quad 5 \leq t < 10 \\ 0.1 & , \quad 10 \leq t \end{cases}$)

durumları için simülasyon yapılsın. Sistem çıktısı olarak gözlenen $z(k)$ değişkeni, birinci durum değişkeninin gürültü eklenmiş bir toplamıdır. Sistemin bilinmeyen parametresi olan sürtünme katsayısı, modelde üçüncü durum değişkeni olarak yer almış olup İlerletilmiş Kalman Filtresi ile elde edilen tahminler: a) için Şekil-3, b) için Şekil-4, c) için Şekil-5 deki gibidir. Şekillerdeki kırmızı çizgiler parametrenin gerçek değerlerini, maviler İlerletilmiş Kalman Filtresi ile elde edilen tahminleri ve siyahlar İlerletilmiş Kalman Filtresinin düzenlenmesi ile elde edilen tahminleri göstermektedir. Grafiklerden görüldüğü gibi siyah çizgilerin, gerçek değerlere mavilerden daha yakın olduğu, yani paralel işleyen iki algoritmanın bir düzenlemesi biçiminde olan İlerletilmiş Kalman Filtresinden elde

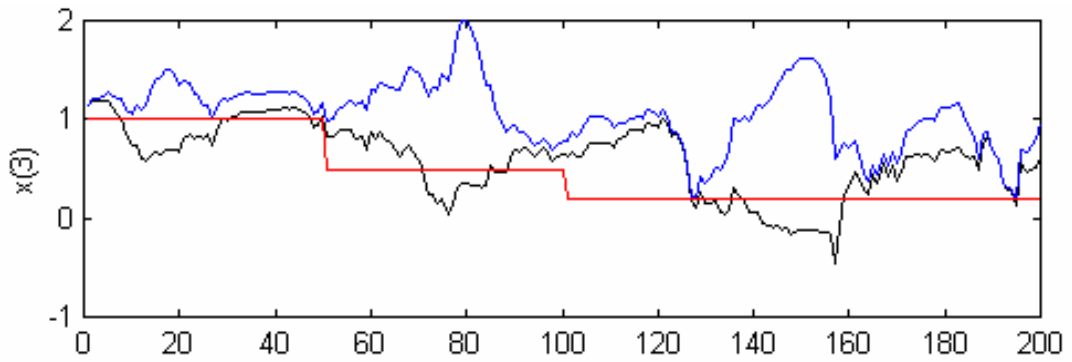
edilen tahminlerin, standart ilerletilmiş Kalman Filtresinden elde edilen tahminlerden daha iyi olduğu söylenebilir.



Şekil 3.



Şekil 4.



Şekil 5.

Sonuç

Uzay araçları ve hareketli hedeflerin konumunu izleme ve kontrol etme gibi uygulamalar için geliştirilen durum-uzay modelleri, fiziksel, kimyasal, iktisadi ve sosyal süreçlerin modellenmesi gibi pek çok uygulama alanına sahiptir. Lineer durum-uzay modellerinde indirgemeli bir tahmin algoritması olan Kalman Filtresi, lineer filtre teorisinde çok önemli bir yere sahip olduğu gibi, lineer olmayan durum-uzay modellerinde de aynı derecede önemlidir. Lineer olmayan modellerin uygun lineerleştirmeler sonucu, Kalman Filtresi için uygun hale getirilmesi ve bunlar için geliştirilen İlerletilmiş Kalman Filtreleri son onbeş yıldır üzerinde çok çalışılan konular haline gelmiştir. Bu çalışmada, özel yapıda olan bazı lineer olmayan durum-uzay modelleri ve özellikle lineer durum-uzay modellerinde sistem belirleme için kullanışlı olan İlerletilmiş Kalman Filtresinin bir düzenlemesi ele alınmış ve standart İlerletilmiş Kalman Filtresinden nispeten daha iyi sonuçlar verdiği simülasyon ile görülmüştür.

Kaynaklar

- [1] **Bacchetta, P. and S. Gerlach (1997)**, "Consumption and Credit Constraints: International Evidence", *Journal of Monetary Economics*, October 1997, 40(2): 207-238.
- [2] **Chen, G. 1993**. "Approximate Kalman Filtering", World Scientific.
- [3] **Chui, C. K. and Chen, G. 1991**. "Kalman Filtering with Real-time Applications", Springer Verlag.
- [4] **Grewal, .S. and Andrews, A.P. (1993)**, "Kalman Filtering Theory and Practice", Prentice Hall.
- [5] **Özbek, L and Efe, M., (2003)**. "An Adaptive Extended Kalman Filter with Application to Compartment Models", *Communication in Statistics-Simulation and Computation*, 3,145-158.
- [6] **Özbek, L. ve Öztürk, F. (2003)**. "Lineer Olmayan Kesikli-Zaman Durum-Uzay Modelleri ve İlerletilmiş Kalman Filtresi Üzerine Bir Çalışma", *VI. Ulusal Ekonometri ve İstatistik Sempozyumu, Mayıs 2003, Gazi Üniversitesi, Ankara*.
- [7] **Reif K. and Unbehauen, R. (1999)**. "The Extended Kalman Filter as an Exponential Observer for Nonlinear Systems", *IEEE Trans. Signal Processing*, 47(8): 2324-2328.
- [8] **Şenol, C., Kırışkan, A., Özbek, L., Öztürk, F. (2003)**, "Etkileşimli İki Tür Canlı Topluluğu İçin Çoğalma Modeli", *3. İstatistik Kongresi, 16-20 Nisan, Antalya, Bildiriler Kitabı, Sayfa 104-107*.