

Türkiye'deki Demir Envanteri İçin Uyarlanabilir Küme Örneklemesindeki Alternatif Tahmin Edicilerin Karşılaştırılması

İsmail ONAY¹, Aslıhan ALHAN¹, A. Alptekin ESİN¹

Özet: Bu çalışmada, uyarlanabilir küme örnekleme tasarımı için Thompson (1990) tarafından geliştirilen modife edilmiş Horvitz-Thompson (HT) ve Hansen-Hurwitz (HH) tahmin edicilerinin özellikleri ile birlikte Salehi (2003) tarafından, modife edilmiş Hansen-Hurwitz (HH) tahmin edicisi kullanılarak geliştirilmiş bir diğer yansız tahmin edicinin özellikleri incelenecektir. Ayrıca, uyarlanabilir küme örneklemesinin son yıllarda farklı araştırma alanlarında uygulanmasından dolayı, burada bu tasarım kullanılarak Türkiye'deki demir envanteri verileri ile sözkonusu tahmin edicilerin varyans tahminleri karşılaştırılacaktır.

Anahtar kelimeler: uyarlanabilir küme örnekleme, modife edilmiş Horvitz-Thompson tahmin edicisi, modife edilmiş Hansen-Hurwitz tahmin edicisi, Rao-Blackwell teoremi

Comparison of Alternative Estimators in Adaptive Cluster Sampling for Iron Inventory in Turkey

Abstract: In this paper, it is examined properties of the modified Horvitz-Thompson (HT) and Hansen-Hurwitz (HH) estimators developed by Thompson (1990) for adaptive cluster sampling design and together with these, properties of another unbiased estimator developed by using the modified Hansen-Hurwitz (HH) estimator by Salehi (2003). In addition, since adaptive cluster sampling has been applied in different research areas in recent years, it is compared with variance estimations of these estimators by using this design with iron inventory data in Turkey.

Key Words: adaptive cluster sampling, the modified Horvitz-Thompson estimator, the modified Hansen-Hurwitz estimator, Rao-Blackwell theorem

Giriş

Thompson (1990), kümelenme ve nadir olma eğilimine sahip yığınların yığın toplamlarını ya da ortalamalarını tahmin etmek için uyarlanabilir küme örnekleme tasarımını önermiştir.

Ekolojik ve coğrafik araştırmalarda kullanılan geleneksel örnekleme tasarımlarının, incelenilen yığının karakteristiklerindeki bilgiyi gözardı etmesi olasılığından dolayı, bu tasarımlar kullanılarak elde edilen sonuçlar genellikle kabuledilebilir olmadığından, yığını her yönden daha iyi tanımlayabilecek ve araştırmanın etkinliğini en büyük kılacak bir örnekleme tasarımı olarak uyarlanabilir küme örnekleme tasarımı önerilebilir.

Uyarlanabilir küme örneklemesinde ilgili olduğumuz bir yığından klasik örnekleme tasarımları kullanılarak birimlerin bir başlangıç (ön) örneği seçilir. Seçilmiş bir birimin ilgili değişken değeri belirli bir koşulu sağladığında (C koşulu), bu birimin komşu birimleri örneğe dahil edilir. Eğer, bu komşu birimlerde C koşulunu sağlıyor ise, onların komşu birimleri de örneğe eklenir.

¹ Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstatistik ABD, Maltepe- Ankara, Türkiye, E-mail: ionay@nvi.gov.tr

Bu süreç, kenar birimlerinin (C koşulunu sağlamayan birimlerin) çevrelediği bir küme elde edilene kadar devam eder. Kümenin, kenar birimleri hariç diğer birimlerinden oluşan alt kümesine "network" adı verilir. Başlangıç örneğinde yer alan ancak koşulu sağlamayan bir birim, bir çaplı bir "network"ü oluşturur (3).

Uyarlanabilir küme örnekleme tasarımı, başlangıç örnek çapı, örneklemeden önce belirlenmesine rağmen, son örnek çapı belirlenemez. Örneğin, büyük kümelerle sahip yığınlar için son örnek çapı başlangıç örnek çapından oldukça büyük olabilir. Ayrıca, uyarlanabilir küme örnekleme tasarımı, koşul C ve komşuluk kavramının tanımı oldukça önemlidir. Eğer, koşul C çok küçükse, son örnek çapı oldukça büyük olacaktır (4). Dolayısıyla, son örnek çapı, ilgili yığının karakteristiklerine ve önceden belirlenen koşula bağlıdır. Brown ve Manly (1998), örnekleme başlamadan önce son örnek çapını belirlemeye izin veren, sınırlandırılmış uyarlanabilir küme örnekleme tasarımını tartışmışlardır.

Etkin bir uyarlanabilir küme örneği tasarlamak için, başlangıç ve son örnek çapları arasındaki ya da "network" içi ve ilgili istatistiğin varyansı arasındaki farkın küçük olması amaçlanmalıdır. Ama, başlangıç ve son örnek çapları arasındaki farkın küçük olması genelde küçük "network" içi varyans anlamına geldiği için amaçlar birbirini desteklemeyebilir. "network" çapı, hem C koşulunun hem de komşuluk tanımının bir fonksiyonu olduğundan, uyarlanabilir küme örnekleme tasarımının, klasik örnekleme tasarımlarına göre daha etkin olması, "network" içi varyansı çok düşük olacak şekilde çok küçük olmayan küçük "network"lerle başarılabilir (5).

Dryver (2003), uyarlanabilir küme örnekleme çok değişkenli durumu incelemiştir. İlgilenilen değişkenlerin çok değişkenli olduğu durumlarda, uyarlanabilir örnekleme etkinliğinin bir değişkenin, diğer bir değişkenle olan ilişkisine bağlı olduğunu, incelenen parametrelere ilişkin değişkenler birbirleriyle oldukça ilişkili olduğunda, uyarlanabilir küme örnekleme kümelenebilir yığınlar iyi bir performans göstereceğini belirtmiştir.

Thompson (1990), uyarlanabilir küme örnekleme tasarımı için (modife edilmiş HT ve HH) iki yansız tahmin edici geliştirmiş ve bu tahmin edicilerin minimal yeterli istatistiğin bir fonksiyonu olmadığını belirtmiştir. Dolayısıyla söz konusu tahmin edicilerin, Rao-Blackwell teoremi ile geliştirilebileceğini ifade etmiştir.

Salehi (1999), başlangıç örneğinin yerine konmaksızın basit tesadüfi örnekleme ile seçildiği durumlar için, modife edilmiş HT ve HH tahmin edicilerinin Rao-Blackwell versiyonlarına yakın analitik ifadelerini vermiştir.

Félix-Medina (2000), başlangıç örneğinin yerine konmaksızın basit tesadüfi örnekleme ya da yerine konarak eşit olasılıklı olmayan örnekleme ile seçildiği durumlar için, modife edilmiş HT ve HH tahmin edicilerinin, Rao-Blackwell versiyonlarını, bunların varyanslarını ve bu varyansların yansız Rao-Blackwell tahmin edicilerinin analitik ifadelerini vermiştir. Ayrıca başlangıç örneğinin yerine konmaksızın seçildiği durumlarda, söz konusu analitik ifadelerin çok değişkenli hipergeometrik dağılıma, yerine konarak seçildiği durumlarda ise multinomial dağılıma dayandığını belirtmiştir.

Salehi (2003), başlangıç örneğinin yerine konmaksızın basit tesadüfi örnekleme ile seçildiği durumlar için, modife edilmiş HT ve HH tahmin edicilerinin özelliklerini matematiksel ve istatistiksel olarak karşılaştırmıştır. Her iki tahmin edicinin "network"ler üzerinden ilgili değişken değerlerinin toplamını içermesinden dolayı, söz konusu tahmin edicilerin varyanslarının, "network" içi değişim tarafından etkilenmediğini, ama başlangıç örneğinin yeterli büyüklükte olduğu durumlarda, kısmi dahil olma olasılığının ilgili "network"teki birim sayısına daha duyarlı olduğunu (özellikle birim sayısı 1 den 2 ye arttığında) ve dolayısıyla modife edilmiş HT tahmin edicisinin, modife edilmiş HH tahmin edicisinden daha iyi bir performans göstereceğini belirtmiştir. Ayrıca, yeterli bir istatistik kullanarak, modife edilmiş HH tahmin edicisini geliştirmiş ve simülasyon çalışmalarından elde ettiği sonuçlarla, modife edilmiş HT tahmin edicisinin, geliştirilen tahmin ediciden ve dolayısıyla modife edilmiş HH tahmin edicisinden daha etkin olduğunu belirtmiştir.

Biz, bu çalışmada, başlangıç örneğinin yerine konmaksızın basit tesadüfi örnekleme ile seçildiği uyarlanabilir küme örnekleme tasarımı için, modife edilmiş HT ve HH tahmin edicileri ile birlikte, Salehi (2003) tarafından geliştirilmiş bir diğer yansız tahmin edicinin özelliklerini inceleyeceğiz. Ayrıca, söz konusu tahmin edicilerin, Türkiye'deki demir envanteri verileri ile varyans tahminlerini karşılaştıracacağız.

1. Tahmin ediciler

N birimden oluşan sonlu bir yığına ele aldığımızı düşünelim (u_1, u_2, \dots, u_N) , i . birimin ilgili değişken değeri y_i olsun. İlgilenilen parametre vektörünün, $\theta = (y_1, y_2, \dots, y_N)' \in \Theta$, R^N in bir altseti olduğunu varsayalım. Bu yığından yerine konmaksızın seçilen bir basit tasadüfi (rassal) örneğin çapı n_1 olsun. İlgili koşul kullanılarak ek birimler örneğe dahil edilsin. Birimlerin son sıralanmış örneğinin, $s_0 = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ olduğunu varsayarak, yerine konmaksızın seçilen n_1 çaplı basit tasadüfi (rassal) başlangıç örneğindeki birimler farklı olmasına rağmen, eğer bir küme başlangıç örneğindeki birimlerden birden fazla içerirse, s_0 da tekrarlanan seçimler olabilir. s_0 daki birimler ve onlara karşılık gelen y değerlerinden oluşan veri vektörü, $d_0 = ((i_1, y_{i_1}), \dots, (i_n, y_{i_n})) = ((i, y_i) : i \in s_0)$ ya da $y_0 = (y_i : i \in s_0)$ olmak üzere $d_0 = (s_0, y_0)$. s_0 daki v farklı birimin sıralı olmayan indirgenmiş setinin, $s_R = \{i_1, \dots, i_v\}$ olduğunu düşünelim. s_R , s_0 dan daha az bilgi içerir. $d_R = \{(i, y_i) : i \in s_R\}$, herhangi bir uyarlanabilir örnekleme tasarımında d_0 için minimal yeterli bir istatistiktir (3).

π_i , i . birimin örneğe dahil olma olasılığı olarak alalım ve π_i nin, yığındaki her birim için sıfırdan daha büyük olduğunu varsayarak, yığın ortalaması için HT tahmin edicisi,

$$\hat{\mu}_{HT} = \frac{1}{N} \sum_{i \in s_R} \frac{y_i}{\pi_i}$$

biçiminde ifade edilir.

Uyarlanabilir küme örneklemesinde, örnekteki bütün birimler için ilgili dahil olma olasılıkları (π_i), tüm birimler için ilgili “network”teki kenar birimlerinin sayısının bilinmemesinden dolayı hesaplanamamaktadır. Bu nedenle uyarlanabilir küme örnekleme ile gerçek HT tahmin edicisini kullanmak mümkün olmadığından dolayı, modife edilmiş HT tahmin edicisi kullanılır. A_i , i birimini içeren “network” ve α_i , kısmi dahil olma olasılığı olduğunu varsayarsak,

$$\alpha_i = 1 - \frac{\binom{N - m_i}{n_1}}{\binom{N}{n_1}} \quad [1]$$

olur. Burada m_i , A_i “network”ündeki birimlerin sayısıdır, dolayısıyla kenar birimlerini kapsamamaktadır. Yığın ortalaması için modife edilmiş HT tahmin edicisi,

$$\hat{\mu} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{\kappa} \frac{y_k^*}{\alpha_k} \quad [2]$$

den hesaplanır. Buradaki y_k^* , k . “network”teki y değerlerinin toplamı, κ , örnekteki farklı “network”lerin sayısıdır. j ve k “network”lerinin kesişmesi olasılığı,

$$\alpha_{jk} = 1 - \frac{\left[\binom{N - m_j}{n_1} + \binom{N - m_k}{n_1} - \binom{N - m_j - m_k}{n_1} \right]}{\binom{N}{n_1}}, \quad [3]$$

söz konusu tahmin edicinin varyansı,

$$\text{var}[\hat{\mu}] = \frac{1}{N^2} \left[\sum_{j=1}^{\kappa} \sum_{k=1}^{\kappa} y_j^* y_k^* \left(\frac{\alpha_{jk} - \alpha_j \alpha_k}{\alpha_j \alpha_k} \right) \right], \quad [4]$$

ve varyansın yansız tahmin edicisi,

$$\text{vâr}[\hat{\mu}] = \frac{1}{N^2} \left[\sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^K \frac{y_j^* y_k^*}{\alpha_{jk}} \left(\frac{\alpha_{jk}}{\alpha_j \alpha_k} - 1 \right) \right] \quad [5]$$

biçiminde yazılabilir. K , yığındaki farklı “network”lerin toplam sayısıdır ve $\alpha_{jj} = \alpha_j$ olarak yorumlanır (3).

Klasik örnekleme tasarımları altında, yerine konarak örnekleme yapılarak n çaplı rassal bir örnek çekildiği zaman, alternatif bir tahmin edici HH tahmin edicisidir. p_i , i . birimin bir çekimde seçilme olasılığı olmak üzere, yığın ortalaması için HH tahmin edicisi,

$$\hat{\mu}_{HH} = \frac{1}{Nn} \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{p_i}.$$

biçiminde ifade edilir.

Örnekteki her birim için bire-bir seçilme olasılıkları bilinmediği için, uyarlanabilir küme örnekleme ile gerçek HH tahmin edicisini kullanmak mümkün olmadığından, modife edilmiş HH tahmin edicisi kullanılacaktır. Yığın ortalaması için modife edilmiş HH tahmin edicisi,

$$\tilde{\mu} = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} w_i = \bar{w}. \quad [6]$$

biçiminde ifade edilir. Buradaki w_i , A_i “network”ündeki m_i gözlemlerinin ortalamasıdır. $\tilde{\mu}$, değerleri y_i yerine w_i olan bir yığından, n_1 büyüklüğünde bir basit tesadüfi örnek çekilerek elde edilen örnek ortalamasıdır. Basit tesadüfi örnekleme kullanımı ile tahmin edicinin varyansı,

$$\text{var}[\tilde{\mu}] = \frac{N - n_1}{N n_1 (N - 1)} \sum_{i=1}^N (w_i - \mu)^2, \quad [7]$$

ve varyansın yansız tahmin edicisi,

$$\text{vâr}[\tilde{\mu}] = \frac{N - n_1}{N n_1 (n_1 - 1)} \sum_{i=1}^{n_1} (w_i - \tilde{\mu})^2 \quad [8]$$

şeklinde (3). Modife edilmiş HT ve HH tahmin edicilerinin her ikisi de yansız tahmin edicilerdir, yani; yansızlık, yığındaki y_i değerleri hakkındaki varsayımlar yerine kullanılan tasarıma (uyarlanabilir küme örnekleme) bağlıdır.

Teorem 2.1 Rao-Blackwell teoremi. $T = T(D_0)$, $\phi = \phi(\theta)$ parametresinin herhangi bir tahmin edicisi olsun (yansız bir tahmin edici olması gerekmez) ve ayrıca θ için W yeterli bir istatistik olsun. $T_W = E[T | W]$ eşitliğinde verilen T_W bilinmeyen parametrelere bağlı olmadığı için bir tahmin edicidir. Eğer T yansız bir tahmin edici ise, $\text{var}[T_W] = \text{var}[T] - E_W\{\text{var}[T | W]\}$ biçiminde yazılabilir (3).

J_i , başlangıç örneği, u_i leri içeren “network” ile kesiştiği zaman 1, diğer durumlarda 0 değerini alan bir gösterge değişkeni olmak üzere, d_R ve J_i kullanılarak, bir $d_J = \{(i, y_i, J_i = j) : i \in S_R\}$ istatistiği tanımlansın. Minimal yeterli istatistik d_R , d_J nin bir fonksiyonu, $d_R = g(d_J)$, olarak ifade edilebileceği için d_J istatistiği yeterlidir. d_J yeterli istatistiği verildiğinde, $\tilde{\mu}$ nin koşullu beklenen değeri alınarak, elde edilen bir diğer tahmin edici,

$$\tilde{\mu}_{HH} = E[\tilde{\mu} | d_J] = \frac{1}{n_1 \xi} \sum_{k=1}^K y_k^* \eta_k. \quad [9]$$

biçiminde yazılabilir. [9] eşitliği ile verilen $\tilde{\mu}_{HH}$ (yeterli istatistik d_J verildiğinde, $\tilde{\mu}$ nin koşullu beklenen değeri), “ d_J ile uyumlu” tüm başlangıç örnekleri üzerinden $\tilde{\mu}$ nin değerlerinin ortalamasıdır. Burada, “ d_J ile uyumlu” ifadesi, başlangıç örneğinin, d_J deki farklı “network”lerin

her birinden en az bir birim içermesi anlamındadır. ξ , d_J ile uyumlu mümkün başlangıç örneklerinin sayısını gösterir.

$$\xi = \binom{m.}{n_1} - \sum_{g=1}^{\kappa} \binom{m. - m_g}{n_1} + \sum_{g,h} \binom{m. - m_g - m_h}{n_1} + \dots + (-1)^{\kappa} \binom{m. - \sum m_g}{n_1}$$

ξ_i , d_J ile uyumlu i birimini içeren başlangıç örneklerinin sayısını gösterir.

$$\xi_i = \begin{cases} \xi & ; i, 1 \text{ çaplı network} \\ \binom{m. - 1}{n_1 - 1} - \sum_{g \neq k} \binom{m. - 1 - m_g}{n_1 - 1} + \sum_{g,h \neq k} \binom{m. - 1 - m_g - m_h}{n_1 - 1} \\ \quad + \dots + (-1)^{\kappa} \binom{m. - 1 - \sum_{g \neq k} m_g}{n_1 - 1} & ; aksi takdirde \end{cases}$$

$m. = \sum_{k=1}^{\kappa} m_k$ ve k "network"ündeki tüm m_k birim için ξ_i ler η_k 'ya eşittir. [9] eşitliği ile

verilen, $\tilde{\mu}_{HH}$ 'nin tahmin edicinin varyansı,

$$\text{var}[\tilde{\mu}_{HH}] = \text{var}[\tilde{\mu}] - E(\text{var}[\tilde{\mu} | d_J]) \quad [10]$$

olarak elde edilir. Bu varyansın yansız tahmin edicisi;

$$\begin{aligned} \hat{\text{var}}[\tilde{\mu}_{HH}] &= \frac{N - n_1}{N n_1 (n_1 - 1)} \sum_{i=1}^{n_1} (w_i - \tilde{\mu})^2 \\ &\quad - \frac{1}{n_1^2 \xi^2} \left(\sum_{i=1}^m w_i^2 (\xi \xi_i - \xi_i^2) + 2 \sum_{i=1}^m \sum_{j < i} w_i w_j (\xi_{ij} \xi - \xi_i \xi_j) \right). \end{aligned} \quad [11]$$

olarak ifade edilir. Eşitlikteki;

ξ_{ij} , i ve j birimlerini içeren mümkün başlangıç örneklerinin sayısıdır.

$$\xi_{ij} = \begin{cases} \xi & ; i \text{ ve } j, 1 \text{ çaplı network} \\ \binom{m. - 1}{n_1 - 1} - \sum_{g \neq k} \binom{m. - m_g - 1}{n_1 - 1} + \sum_{g,h \neq k} \binom{m. - m_g - m_h - 1}{n_1 - 1} \\ \quad + \dots + (-1)^{\kappa} \binom{m. - \sum m_g - 1}{n_1 - 1} & ; j, 1 \text{ çaplı network ve } i \in k \\ \binom{m. - 2}{n_1 - 2} - \sum_{g \neq k} \binom{m. - m_g - 2}{n_1 - 2} + \sum_{g,h \neq k} \binom{m. - m_g - m_h - 2}{n_1 - 2} \\ \quad + \dots + (-1)^{\kappa} \binom{m. - \sum m_g - 2}{n_1 - 2} & ; i, j \in k \\ \binom{m. - 2}{n_1 - 2} - \sum_{g \neq k, l} \binom{m. - m_g - 2}{n_1 - 2} + \sum_{g,h \neq k, l} \binom{m. - m_g - m_h - 2}{n_1 - 2} \\ \quad + \dots + (-1)^{\kappa} \binom{m. - \sum m_g - 2}{n_1 - 2} & ; i \in k, j \in l, k \neq l \end{cases}$$

[10] eşitliğinden, $\tilde{\mu}_{HH}$ nin varyansının, $\tilde{\mu}$ nin varyansından, $E(\text{var}[\tilde{\mu} | d_J])$ kadar daha küçük olduğu görülmektedir. Ayrıca, $\text{var}[\tilde{\mu}]$ nin daha küçük varyanslı bir diğer yansız tahmin edicisi, Rao-Blackwell teoremi kullanılarak,

$$\hat{\text{var}}_{RB}[\tilde{\mu}] = E[\hat{\text{var}}[\tilde{\mu} | d_J]] = \frac{1}{\xi} \sum_{g=1}^{\xi} \hat{\text{var}}_g[\tilde{\mu}] \quad [12]$$

biçiminde yazılabilir (2). Buradaki, $\hat{\text{var}}_{RB}[\tilde{\mu}]$ (yeterli istatistik d_J verildiğinde, $\hat{\text{var}}[\tilde{\mu}]$ nin koşullu beklenen değeri) d_J ile uyumlu tüm başlangıç örnekleri üzerinden $\hat{\text{var}}[\tilde{\mu}]$ nin değerlerinin

ortalamasıdır. O halde [11] eşitliğinde, $\text{vâr}[\tilde{\mu}_{HH}] = \frac{N - n_1}{N n_1 (n_1 - 1)} \sum_{i=1}^{n_1} (w_i - \tilde{\mu})^2$ yerine $\text{vâr}_{RB}[\tilde{\mu}]$

kullanılarak elde edilen bir diğer yansız tahmin edici,

$$\text{vâr}_{RB}[\tilde{\mu}_{HH}] = \frac{1}{\xi} \sum_{g=1}^{\xi} \text{vâr}_g[\tilde{\mu}] - \frac{1}{n_1^2 \xi^2} \left(\sum_{i=1}^m w_i^2 (\xi \xi_i - \xi_i^2) + 2 \sum_{i=1}^m \sum_{j < i} w_i w_j (\xi_{ij} \xi - \xi_i \xi_j) \right). \quad [13]$$

biçiminde ifade edilir.

2. Uygulama

Bu bölümde, uyarlanabilir küme örnekleme tasarımı ve bu tasarımda kullanılan tahmin edicilerle ilgili hesaplamaları göstermek için, Türkiye'deki demir envanteri verileri ile ilgilenilecektir. Ek-1'de gösterildiği gibi Türkiye 1:100000'lik 397 paftaya ayrılmıştır. Ek-2'de ise bu 397 paftanın herbiri için, o paftada çıkartılan toplam demir rezervi milyon ton cinsinden verilmiştir. Ek-1'de, kalın çizgilerle gösterilen paftalar, $N = 397$ paftadan yerine konmaksızın basit tesadüfi örnekleme kullanılarak seçilmiş, $n_1 = 10$ çaplı başlangıç örneğinin birimlerini gösterir. Burada bir paftanın komşuluğu, paftanın kendisi ve ortak bir sınır çizgisini paylaşan 4 bitişik paftadan oluşur. İlgili koşul ise 0.1 milyon ton olarak belirlenmiştir ($C := \{y : y > 0.1\}$). Başlangıç örneğinin bir birimi (I17 paftası), $y_1^* = 24.357259$ olan $m_1 = 6$ çaplı bir "network"ü, iki birimi (K37 ve N36 paftası), $y_2^* = 72.858473$ olan $m_2 = 9$ çaplı bir diğer "network"ü, geriye kalan 7 birimi (L44,E36,G23,M32,F25,K52,G50 paftaları) ise, $y_i = 0$ olan bir çaplı "network"leri oluşturur.

$$m_1 = 6 \text{ çaplı "network" için; } \alpha_1 = 1 - \left[\frac{\binom{391}{10}}{\binom{397}{10}} \right] = 0.142775 \text{ ve } y \text{ değerlerinin toplamı;}$$

$$y_1^* = 0.214 + 0.20214 + 0.36995 + 17.6768 + 5.755369 + 0.139 = 24.357259 .$$

$$m_2 = 9 \text{ çaplı "network" için; } \alpha_2 = 1 - \left[\frac{\binom{388}{10}}{\binom{397}{10}} \right] = 0.20704 \text{ ve } y \text{ değerlerinin toplamı;}$$

$$y_2^* = 13.592102 + 0.394625 + 0.5758 + 0.117905 + 0.1 + 3.6268 + 50.114195 + 3.1868 + 1.150246 = 72.858473$$

bir çaplı "network"ler için olasılık, $\alpha_k = 10/397 = 0.025188$. O halde [2] eşitliğinden;

$$\hat{\mu} = \frac{1}{397} \left(\frac{24.357259}{0.142775} + \frac{72.858473}{0.20704} + \frac{0}{0.025188} + \frac{0}{0.025188} + \dots + \frac{0}{0.025188} \right) = 1.316133.$$

$$\alpha_{12} = 1 - \frac{\left[\binom{391}{10} + \binom{388}{10} - \binom{382}{10} \right]}{\binom{397}{10}} = 0.027087.$$

$m_1 = 6$ ve $m_2 = 9$ çaplı "network"lerinin kesişmesi olasılığı α_{12} , [5] eşitliğinde kullanılarak,

$$\text{vâr}[\hat{\mu}] = \frac{1}{397^2} \left[\frac{(24.357259)^2}{0.142775} \left(\frac{1}{0.142775} - 1 \right) + 2 \frac{(24.357259)(72.858473)}{0.027087} \left(\frac{0.027087}{(0.142775)(0.20704)} - 1 \right) + \frac{(72.858473)^2}{0.20704} \left(\frac{1}{0.20704} - 1 \right) \right] = 0.7677377 .$$

$$m_1 = 6 \text{ çaplı "network" için ; } w_1 = \frac{24.357259}{6} = 4.059543$$

$$m_2 = 9 \text{ çaplı "network" için; } w_2 = \frac{72.858473}{9} = 8.095386$$

1 çaplı "network"ler için; $w_i = 0$. Ohalde [6] eşitliğinden,

$$\tilde{\mu} = \frac{1}{10}(4.059543 + 8.095386 + 8.095386 + 0 + \dots + 0) = 2.02503149$$

bulunur ve [8] eşitliği kullanılırsa,

$$\hat{\text{vâr}}[\tilde{\mu}] = \frac{397-10}{397(10)(10-1)} \left[(4.059543 - 2.02503149)^2 + 2(8.095386 - 2.02503149)^2 + 7(0 - 2.02503149)^2 \right] = 1.15399122.$$

ξ, ξ_i ve ξ_{ij} , örnekteki bir çaplı "network"lerin sayısı nisbeten fazla olduğundan, çapı birden büyük olan "network"ler dikkate alınarak hesaplanmıştır. Dolayısıyla, ξ, ξ_i ve ξ_{ij} için $m^* = 9 + 6 = 15$, $n_1^* = 1 + 2 = 3$, $\kappa^* = 2$ kullanılmıştır.

$$\xi = \binom{15}{3} - \binom{9}{3} - \binom{6}{3} = 351 \quad \xi_1 = \binom{14}{2} - \binom{5}{2} = 81 \quad \xi_2 = \binom{14}{2} - \binom{8}{2} = 63$$

$$[9] \text{ eşitliğinden, } \tilde{\mu}_{HH} = \frac{1}{10(351)} [(24.357259)81 + (72.858473)63] = 1.86980677.$$

i ve j "network" 1'de iseler; $\xi_{ij} = \binom{13}{1} - \binom{4}{1} = 9$, i ve j "network" 2'de iseler;

$\xi_{ij} = \binom{13}{1} - \binom{7}{1} = 6$, i ve j farklı "network"te iseler; $\xi_{ij} = \binom{13}{1} = 13$. $E(\text{var}[\tilde{\mu} | d_J])$ 'nin yansız

tahmin edicisi,

$$\begin{aligned} E(\text{var}[\tilde{\mu} | d_J]) &= \frac{1}{(10)^2 (351)^2} \left\{ 6(4.05954317)^2 [351(81) - 81^2] + 9(8.09538589)^2 [351(63) - 63^2] \right. \\ &+ 2 \left[\frac{(6-1)6}{2} (4.05954317)^2 [9(351) - 81^2] + 6(9)(4.05954317)(8.09538589)[13(351) - 81(63)] \right. \\ &\left. \left. + \frac{(9-1)9}{2} (8.09538589)^2 [6(351) - 63^2] \right] \right\} = 0.03855154 \end{aligned}$$

[11] eşitliğinden, $\hat{\text{vâr}}[\tilde{\mu}_{HH}] = 1.15399122 - 0.03855154 = 1.11543968$ bulunur. Ayrıca, [13] eşitliğinde verilen $\hat{\text{vâr}}_{RB}[\tilde{\mu}_{HH}]$ tahmin edicisini bulabilmek için, $\text{var}[\tilde{\mu}]$ 'nin [12] eşitliğinde verilen Rao-Blackwell tahmin edicisinin bulunması gerekir. Dolayısıyla, d_J ile uyumlu mümkün başlangıç örneklerinin herbiri için $\hat{\text{vâr}}[\tilde{\mu}]$ değerleri elde edilmelidir. d_J ile uyumlu mümkün başlangıç örneklerinin $\binom{6}{1}\binom{9}{2}$ tanesi için $\hat{\text{vâr}}[\tilde{\mu}] = 1.15399122$ ve $\binom{6}{2}\binom{9}{1}$ tanesi için $\hat{\text{vâr}}[\tilde{\mu}] = 0.782059989$ bulunmuştur. O halde, [12] eşitliğinden,

$$\hat{\text{vâr}}_{RB}[\tilde{\mu}] = \frac{1}{351} \left[\binom{6}{1}\binom{9}{2} 1.15399122 + \binom{6}{2}\binom{9}{1} 0.782059989 \right] = 1.01094075$$

ve dolayısıyla [13] eşitliğinden, $\hat{\text{vâr}}_{RB}[\tilde{\mu}_{HH}] = 1.01094075 - 0.03855154 = 0.9723892$ elde edilir.

Tablo1 de, $\hat{\mu}$, $\tilde{\mu}$ ve $\tilde{\mu}_{HH}$ için hesaplanan varyans tahminleri verilmiştir.

Tablo 1. Tahmin Edicilerin Varyans Tahminleri

$\hat{\text{vâr}}[\hat{\mu}]$	$\hat{\text{vâr}}[\tilde{\mu}]$	$\hat{\text{vâr}}[\tilde{\mu}_{HH}]$	$\hat{\text{vâr}}_{RB}[\tilde{\mu}_{HH}]$
0.7677377	1.15399122	1.11543968	0.9723892

3. Tartışma ve Sonuç

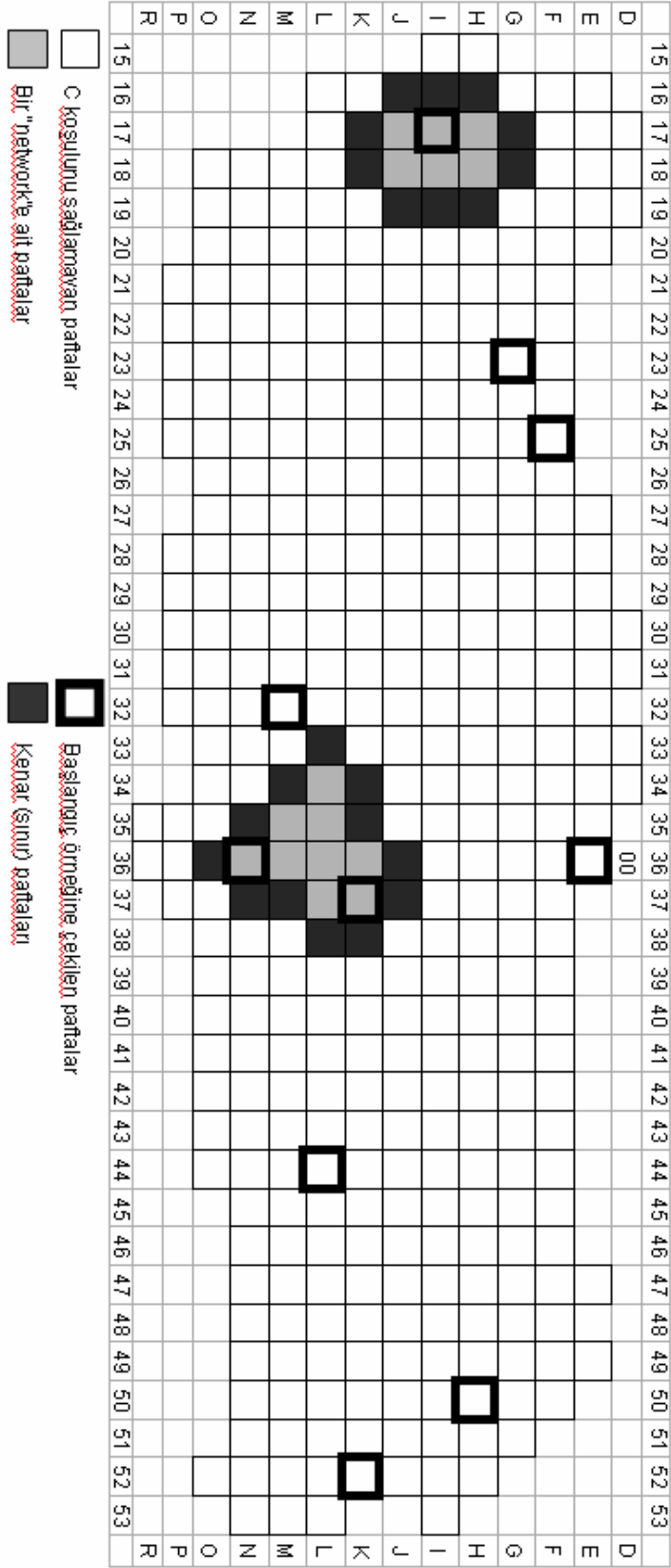
Çalışmamızda, Türkiye'deki demir envanteri verileri kullanılarak uyarlanabilir küme örnekleme için ilgili tahmin edicilerin tahmin edilen varyans değerleri karşılaştırılmıştır. Elde edilen sonuçlar Tablo 1'de gösterilmiştir. Uyarlanabilir küme örnekleminin literatüründeki önceki çalışmaların sonucundan da beklenildiği üzere, Tablo 1'den modife edilmiş HT ($\hat{\mu}$) tahmin edicisinin [0.7677377], yeterli istatistik verildiğinde HH tahmin edicisinin koşullu beklenen değeri ile bulunan $\tilde{\mu}_{HH}$ tahmin edicisinden [1.11543968] ve dolayısıyla bulunan modife edilmiş HH ($\tilde{\mu}$) tahmin edicisinden [1.15399122] daha etkin (effective) (daha küçük varyansa sahip) olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Kaynaklar

- [1] Thompson, S.K., "Adaptive cluster sampling", **Journal of the American Statistical Association**, 85: 1050-1059 (1990).
- [2] Salehi, M.M., "Comparison between Hansen-Hurwitz and Horvitz-Thompson estimators for adaptive cluster sampling", **Environmental and Ecological Statistics**, 10: 115-127 (2003).
- [3] Thompson, S.K. and Seber, G.A.F., "Adaptive Sampling", **Wiley**, New York, (1996).
- [4] Brown, J.A. and Manly, B.J.F., "Restricted adaptive cluster sampling", **Environmental and Ecological Statistics**, 5: 49-63 (1998).
- [5] Brown, J.A., "Designing an efficient adaptive cluster sample", **Environmental and Ecological Statistics**, 10: 95-105 (2003).
- [6] Dryver, A.L., "Performance of adaptive cluster sampling estimators in a multivariate setting", **Environmental and Ecological Statistics**, 10: 107-113 (2003).
- [7] Salehi, M.M., "Rao-Blackwell versions of the Horvitz-Thompson and Hansen-Hurwitz in adaptive cluster sampling", **Environmental and Ecological Statistics**, 6: 183-195 (1999).
- [8] Félix-Medina, M.H., "Analytical expressions for Rao-Blackwell estimators in adaptive cluster sampling", **Journal of Statistical Planning and Inference**, 84: 221-236 (2000).
- [9] Maden Tetkik ve Arama Genel Müdürlüğü: Türkiye Demir Envanteri, **MTA**, Ankara, (1994).

EK-1

1:100000 Ölçekli Türkiye Pafta Taksimatı Şeması



EK-2 :

1:100000 PAFTALARA GÖRE TOPLAM DEMİR REZERV MİKTARLARI

Pafta No	Miktar (Milyon Ton)
E18	0.41
E19	9.8
F33	0.04236
F45	0.4
F46	3.6
G25	110.547
G40	1.11
G41	0.244
G42	0.5
H17	0.214
H18	0.20214
H20	0.012665
I16	0.002
I17	0.36995
I18	17.6768
I19	0.05
I21	0.009
I26	2.15
I34	98.45116
I35	8.5
J17	5.755369
J18	0.139
J22	5.9255
J30	13.823454
J31	2.18741
J32	1.844268
J39	135.916525
J40	101.759354
J41	0.3413
J52	0.63
K19	0.7
K20	72.5
K22	0.00783

Pafta No	Miktar (Milyon Ton)
K23	0.0765
K25	0.6665
K36	0.1
K37	3.6268
K39	685
K41	0.538152
K44	361.254423
L18	2.152
L34	13.592102
L35	0.394625
L36	0.5758
L37	0.117905
L40	69.2684545
L48	3.152
L49	0.439725
M19	13.96862
M33	0.489167
M34	0.0005
M35	50.114195
M36	3.1868
M39	1.215
N19	2.26
N35	0.005425
N36	1.094556
N38	0.2689
O31	2.777475
O35	0.077664
O36	0.021388
O37	0.1035
P29	0.0903
P30	6.91869
P31	0.54985
P36	3.036087

(9).