

Hata Analizi Tabanlı Adım Genişliği Stratejisi

Gülnur ÇELİK KIZILKAN¹, Kemal AYDIN¹

Özet: Bu çalışmada; ikinci mertebeden Runge- Kutta metodu için hata analizi tabanlı adım genişliği stratejisi elde edilmiştir. Verilen stratejiye bağlı olarak her bir adımda problemin yapısına göre sabit adım genişliği veya değişken adım genişliği tespit eden ve nümerik çözüm hesaplayan iki algoritma verilmiştir.

Anahtar Sözcükler: Adım genişliği, Nümerik integrasyon, Adım genişliği stratejisi, Adım genişliği kontrolü

Step Size Strategy Based On Error Analysis

Abstract: In this study; a step size strategy based on error analysis is obtained for Runge- Kutta method of order 2. Depending on this strategy two algorithms which determine constant or variable step size according to structure of problem and calculate numerical solutions in each step are given.

Key words: Step size, Numerical integration, Step size strategy, Step size control

1. Giriş

$D = \{(t, x) : t \in [t_0, T], |x - x_0| \leq b\}$ bölgesi üzerinde

$$x' = f(t, x), x(t_0) = x_0 \quad (1.1)$$

Cauchy problemini göz önüne alalım. (1.1) Cauchy probleminin nümerik integrasyonu ile elde edilen çözüm problemin tam çözümün yerine kullanılabilir kadar yakın olmayabilir. Bu nedenle nümerik integrasyonda hesaplama yapılırken adım genişliği seçimi öne çıkmaktadır. Literatür çalışmalarının çoğunda sabit adım genişliği seçilerek hesaplama yapılmıştır. Sabit adım genişliğiyle nümerik integrasyona başlamak için adım genişliğinin nasıl seçileceği sorusu önem kazanmaktadır. Ancak, *uygun adım genişliği* tespit edildiğinde bile sabit adım genişliği ile çalışmak doğal olarak işlem sayısını artıracaktır. Sabit adım genişliği ile çalışıldığında; h_i değişken adım genişliklerinin en küçüğü ile çalışılacağından verilen problemin niteliğine göre değişken adım genişliği ile çalışmak işlem sayısını azaltacağı için daha avantajlı olabilir.

(1.1) Cauchy probleminin nümerik çözümünün analitik çözüme ne kadar yakın olduğu lokal hata ile ölçülür. Dolayısıyla hata tahminine göre adım genişliği seçilerek yaklaşık çözümün tam çözümden fazla uzaklaşmaması sağlanabilir. Bazı nümerik metotlar için hata açılımlarını dikkate alarak adım genişliği tespiti yapan farklı çalışmalar mevcuttur ([1,2,3]). Bu çalışmada, (1.1) in nümerik integrasyonunda kullanılan İkinci Mertebeden Runge- Kutta Metodu için hata analizini dikkate alarak *uygun h_i adım genişliği* belirleyen farklı bir adım genişliği stratejisi elde etmek hedeflenmiştir. Diğer nümerik metotlar için de aynı incelemeler yapılabilir.

¹ Selçuk Üniversitesi Fen- Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, Kampüs/KONYA

Çalışmamızın 2. kısmında; lokal hata kavramı ve Runge- Kutta metodu hatırlatılmış, bu metodun hata analizi incelenmiştir. 3. kısımda; Runge- Kutta metodu için hata analizi tabanlı adım genişliği stratejisi verilmiştir. 4. kısımda; her bir adımda hata analizi tabanlı adım genişliği tespit eden ve nümerik çözüm hesaplayan algoritmalar verilmiştir. 5. kısımda ise, çalışmamızla ilgili nümerik örnekler verilmiştir.

2. Hata Analizi

2.1. Lokal hata

Lokal hata [4, 5] de aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım: $z(t)$, (1.1) Cauchy probleminin $[t_{i-1}, t_i]$ aralığındaki çözümü olsun:

$$z'(t) = f(t, z), z(t_{i-1}) = y_{i-1} \quad (2.1)$$

$[t_{i-1}, t_i]$ aralığındaki lokal hata, nümerik metotta elde edilen y_i çözümü ile $z(t_i)$ çözümü arasındaki farktır. Yani; $LE_i = y_i - z(t_i)$ şeklindedir.

2.2. Runge- Kutta metodu

Farklı mertebelerde Runge-Kutta formülleri vardır. Fakat burada en çok kullanılan ikinci mertebeden Runge- Kutta formülü verilecektir. [3] te sabit adım genişliği için ikinci mertebeden Runge- Kutta metodu verilmiştir. Buna benzer olarak

$$h_i = t_i - t_{i-1}, s_1 = f(t_i, y_i), s_2 = f(t_i + h_{i+1}, y_i + s_1 h_{i+1}), i=0,1,\dots,n$$

olmak üzere değişken adım genişliği için ikinci mertebeden Runge- Kutta metodu

$$y_{i+1} = y_i + h_{i+1}(a s_1 + b s_2), i=0,1,\dots,n \quad (a, b \in \mathbb{Q}; a+b=1)$$

şeklinde tanımlanır. Literatürde genellikle $a=b=1/2$ alınmaktadır. Bu çalışmada da $a=b=1/2$ alınacaktır. Buna göre ikinci mertebeden Runge-Kutta metodu yeniden yazılacak olursa

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2} h_{i+1} (s_1 + s_2), i=0,1,\dots,n$$

şeklinde olur.

2.3. Runge- Kutta metodu için hata analizi

Sabit adım genişliği için [3] te yapılan analiz değişken adım genişliği için benzer olarak yapılırsa

$$f(t_{i-1} + h_i, y_{i-1} + h_i f(t_{i-1}, y_{i-1})) = f(t_{i-1}, y_{i-1}) + h_i (f_t + f \cdot f_x) + \frac{h_i^2}{2} (f_{tt} + 2f \cdot f_{tx} + f^2 f_{xx} + f_x f_t + f \cdot f_x^2) + O(h_i^3)$$

olduğundan

$$y_i = y_{i-1} + h_i f(t_{i-1}, y_{i-1}) + \frac{h_i^2}{2} (f_t + f \cdot f_x) + \frac{h_i^3}{4} (f_{tt} + 2f \cdot f_{tx} + f^2 f_{xx} + f_x f_t + f \cdot f_x^2) + O(h_i^4)$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca $[t_{i-1}, t_i]$ aralığında $z(t)$ fonksiyonu için üçüncü mertebeden Taylor açılımı

$$z(t_{i-1} + h_i) = y_{i-1} + h_i f(t_{i-1}, y_{i-1}) + \frac{h_i^2}{2} (f_t + f \cdot f_x)(t_{i-1}) + \frac{h_i^3}{6} (f_{tt} + 2f \cdot f_{tx} + f^2 f_{xx} + f_x f_t + f \cdot f_x^2)(t_{i-1}) + O(h_i^4)$$

dır. O halde 2.1. deki lokal hata tanımından Runge- Kutta metodu için lokal hata

$$|LE_i| = |y_i - z(t_i)|$$

$$\begin{aligned}
&= |[y_{i-1} + h_i f(t_{i-1}, y_{i-1}) + \frac{h_i^2}{2}(f_t + f \cdot f_x) + \frac{h_i^3}{4}(f_{tt} + 2f \cdot f_{tx} + f^2 f_{xx} + f_x f_t + f \cdot f_x^2)] - \\
& [y_{i-1} + h_i f(t_{i-1}, y_{i-1}) + \frac{h_i^2}{2}(f_t + f \cdot f_x) + \frac{h_i^3}{6}(f_{tt} + 2f \cdot f_{tx} + f^2 f_{xx} + f_x f_t + f \cdot f_x^2)] + O(h_i^4) | \\
&= |\frac{h_i^3}{12}(f_{tt} + 2f \cdot f_{tx} + f_x f_t + f \cdot f_x^2 + f^2 f_{xx})(t_{i-1}) + O(h_i^4)| \\
\Rightarrow |LE_i| &\leq \frac{h_i^3}{12} \max_{\tau \in [t_{i-1}, t_i]} |(f_{tt} + 2f \cdot f_{tx} + f_x f_t + f \cdot f_x^2 + f^2 f_{xx})(\tau)| \quad (2.2)
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

3. Hata Analizi Tabanlı Adım Genişliği Stratejisi

(2.2) eşitsizliğinden

$$\max_{\tau \in [t_{i-1}, t_i]} |(f_{tt} + 2f \cdot f_{tx} + f_x f_t + f \cdot f_x^2 + f^2 f_{xx})(\tau)| \leq M_{t_i}$$

olmak üzere, adım genişliği

$$h_i \leq \left(\frac{12\delta_L}{M_{t_i}}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad (i=1,2,\dots,N) \quad (3.1)$$

şeklinde seçilir.

Eğer burada $[t_0, T]$ aralığında

$$\max_{\tau \in [t_0, T]} |(f_{tt} + 2f \cdot f_{tx} + f_x f_t + f \cdot f_x^2 + f^2 f_{xx})(\tau)| \leq M; M \geq \max_i \{M_{t_i}\}$$

olacak şekildeki M sayısı alınırsa o zaman (3.1) adım genişliği

$$h_i \leq \left(\frac{12\delta_L}{M}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (3.2)$$

eşitsizliğine dönüşür. Bu eşitsizlikten elde edilen adım genişliklerinin sabit adımlar olacağı açıktır.

4. Algoritmalar

(3.1) veya (3.2) eşitsizliklerinden elde edilen adım genişlikleri büyük değerler olarak bulunabileceği gibi küçük adım genişlikleri de elde edilebilir. Bu durumda adım genişliği tespit edilirken keyfi bir h^* parametresi belirler ve bu parametreden daha küçük olan adım genişliğini "0" (sıfır) olarak alınır. Belirlenen bu h^* parametresi, istenildiği kadar küçük seçilebilen bir parametredir ve $h_i < h^*$ olduğu zaman hesaplama işlemi sona erer. Burada h^* *pratik adım genişliği parametresi* olarak adlandırılır [6].

4.2 ve 4.3 kısmında vereceğimiz adım genişliği tespiti yapan ve nümerik çözüm hesaplayan algoritmaların çalışmasını kontrol eden adım genişliği kontrol algoritmasını aşağıda verelim. 4.2 ve 4.3 te verilen algoritmalarda hesaplama işlemini adım genişliği kontrol algoritması sonlandırmaktadır.

4.1. Algoritma 1: Adım genişliği kontrol algoritması

k ; adım sayısı, T ; D bölgesindeki T sayısı, \hat{h}_k ; hesaplanan adım genişliği ve h^* , pratik adım genişliği olmak üzere;

$$\mathbf{K:} \quad 1. \quad t_0 + \sum_{i=1}^{k-1} h_i + \hat{h}_k \leq T \text{ ise;}$$

$$1.1. \quad \hat{h}_k > h^* \text{ ise } h_k = \hat{h}_k \text{ alınır.}$$

- 1.2. $\hat{h}_k < h^*$ ise $h_k = 0$ alınır ve işlem sona erer.
2. $t_0 + \sum_{i=1}^{k-1} h_i + \hat{h}_k > T$ ise $\hat{h}_k = T - t_0 - \sum_{i=1}^{k-1} h_i$ alınır.
 - 2.1. $\hat{h}_k > h^*$ ise $h_k = \hat{h}_k$ alınır.
 - 2.2. $\hat{h}_k < h^*$ ise $h_k = 0$ alınır ve işlem sona erer.

Buradaki K- algoritması [6] daki K- algoritmasının (1.1) problemine uyarlanmasıdır.

4.2. Algoritma 2: Hata analizi tabanlı değişken adım genişliği tespiti yapan ve nümerik çözüm hesaplayan algoritma

0. Adım (Giriş Elemanları): t_0, x_0, T, b, h^* ve δ_L sayıları girilir.

1. Adım: M_{t_1} hesaplanır.

1.1. $\hat{h}_1 \leq \left(\frac{12\delta_L}{M_{t_1}}\right)^{\frac{1}{3}}$ olacak şekilde \hat{h}_1 hesaplanır.

1.2. K- kontrolü yapılır.

1.3. $t_1 = t_0 + h_1$ hesaplanır.

1.4. $s_{1,1} = f(t_0, y_0)$, $s_{1,2} = f(t_0 + h_1, y_0 + s_{1,1}h_1)$ ve $y_1 = y_0 + \frac{1}{2}h_1(s_{1,1} + s_{1,2})$ hesaplanır.

⋮

k. Adım: M_{t_k} sayısı hesaplanır.

k.1. $\hat{h}_k \leq \left(\frac{12\delta_L}{M_{t_k}}\right)^{\frac{1}{3}}$ olacak şekilde \hat{h}_k sayısı hesaplanır.

k.2. K- kontrolü yapılır.

k.3. $t_k = t_{k-1} + h_k$ hesaplanır.

k.4. $s_{k,1} = f(t_{k-1}, y_{k-1})$, $s_{k,2} = f(t_{k-1} + h_k, y_{k-1} + s_{k,1}h_k)$ ve $y_k = y_{k-1} + \frac{1}{2}h_k(s_{k,1} + s_{k,2})$

hesaplanır.

4.3. Algoritma 3: Hata analizi tabanlı adım genişliği tespiti yapan ve nümerik çözüm hesaplayan algoritma

Adım Genişliği (3.2) eşitsizliğindeki gibi seçilirse 4.2 kısmında verilen algoritma aşağıdaki şekilde olur.

0. Adım (Giriş Elemanları): t_0, x_0, T, b, h^* ve δ_L sayıları girilir.

1. Adım: M hesaplanır.

1.1. $\hat{h} \leq \left(\frac{12\delta_L}{M}\right)^{\frac{1}{3}}$ olacak şekilde \hat{h} hesaplanır.

1.2.1. $t_0 + \hat{h} \leq T$ ise;

1.2.1.1. $\hat{h} > h^*$ ise $h = \hat{h}$ alınır.

1.2.1.2. $\hat{h} < h^*$ ise $h = 0$ alınır ve işlem sona erer.

1.2.2. $t_0 + \hat{h} > T$ ise $\hat{h} = T - t_0 - \hat{h}$ alınır.

1.2.2.1. $\hat{h} > h^*$ ise $h = \hat{h}$ alınır.

1.2.2.2. $\hat{h} < h^*$ ise $h = 0$ alınır ve işlem sona erer.

1.3. $t_1 = t_0 + h$ hesaplanır.

1.4. $s_{1,1} = f(t_0, y_0)$, $s_{1,2} = f(t_0 + h, y_0 + s_{1,1}h)$ ve $y_1 = y_0 + \frac{1}{2}h(s_{1,1} + s_{1,2})$ hesaplanır.

⋮

k. Adım:

k.1. $t_0 + kh \leq T$ ise

k.1.1. $t_k = t_0 + kh$ hesaplanır.

k.1.2. $s_{k,1} = f(t_{k-1}, y_{k-1})$, $s_{k,2} = f(t_{k-1} + h, y_{k-1} + s_{k,1}h)$ ve $y_k = y_{k-1} + \frac{1}{2}h(s_{k,1} + s_{k,2})$

hesaplanır.

k.2. $t_0 + kh > T$ ise $\hat{h} = T - t_0 - (k-1)h$ alınır.

k.2.1. $\hat{h} < h^*$ ise işlem sona erer.

k.2.2. $t_k = t_0 + (k-1)h + \hat{h}$ hesaplanır.

k.2.3. $s_{k,1} = f(t_{k-1}, y_{k-1})$, $s_{k,2} = f(t_{k-1} + \hat{h}, y_{k-1} + s_{k,1}\hat{h})$ ve $y_k = y_{k-1} + \frac{1}{2}\hat{h}(s_{k,1} + s_{k,2})$

hesaplanır ve işlem sona erer.

5. Nümerik Örnekler

Örnek 1. $D = \{(t, x) : t \in [1, 5], |x - 1| \leq 2\}$ bölgesi üzerinde

$$x' = \frac{-1}{t^2}, \quad x(1) = 1 \quad (5.1)$$

Cauchy problemini ele alalım. Burada $f(t, x) = \frac{-1}{t^2}$ dir. Algoritma 2 yi kullanarak (5.1)

Cauchy probleminin nümerik çözümünü hesaplayalım.

0. Adım (Giriş Elemanları): $t_0 = 1, x_0 = 1, T = 5, b = 2, h^* = 10^{-9}$ ve $\delta_L = 10^{-2}$

1. Adım:

$$\max_{\tau \in [t_0, t_1]} |(f_u + 2f \cdot f_{tx} + f_x \cdot f_t + f \cdot f_x^2 + f^2 f_{xx})(\tau)| = \max_{\tau \in [t_0, t_1]} \left| \frac{-6}{\tau^4} \right| = \frac{6}{t_0^4} \leq M_{t_1} = 6$$

$$1.1. \hat{h}_1 \leq \left(\frac{12\delta_L}{M_{t_1}} \right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{12 \times 10^{-2}}{6} \right)^{\frac{1}{3}} = 0.271442 \Rightarrow \hat{h}_1 = 0.27$$

$$1.2. t_0 + \hat{h}_1 \leq 5 ; \hat{h}_1 > h^* \Rightarrow h_1 = \hat{h}_1$$

$$1.3. t_1 = t_0 + h_1 = 1.27$$

$$1.4. s_{1,1}=f(t_0, y_0)=-1, s_{1,2}=f(t_0 + h_1, y_0 + s_{1,1}h_1)=-0.620001$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2} h_1 (s_{1,1} + s_{1,2})=0.78123$$

⋮

$$6. \text{ Adım: } \max_{\tau \in [t_5, t_6]} \left| \frac{-6}{\tau^4} \right| = \frac{6}{t_5^4} \leq M_{t_6} = 0.022747$$

$$6.1. \hat{h}_6 \leq \left(\frac{12\delta_L}{M_{t_6}} \right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{12 \cdot 10^{-2}}{0.022747} \right)^{\frac{1}{3}} = 1.740805 \Rightarrow \hat{h}_6 = 1.74$$

$$6.2. t_0 + \sum_{i=1}^5 h_i + \hat{h}_6 > 5; \Rightarrow h_6 = 5 - t_0 - \sum_{i=1}^5 h_i = 0.97$$

$$6.3. t_6 = t_5 + h_6 = 5$$

$$6.4. s_{6,1}=f(t_5, y_5)=-0.061573, s_{6,2}=f(t_5 + h_6, y_5 + s_{6,1}h_6)=-0.04,$$

$$y_6 = y_5 + \frac{1}{2} h_6 (s_{6,1} + s_{6,2}) = 0.170817 \text{ olup işlem sona erer.}$$

(5.1) Cauchy problemi için elde edilen adım genişliği, her bir adım da elde edilen nümerik çözümü, $z(t_i)$ ve $|LE_i|$ değerleri Tablo 5.1 de verilmiştir.

Tablo 5.1

i	h	t_i	y_i	$z(t_i)$	$ LE_i $
0		1	1	1	0
1	0.27	1.27	0.78123	0.787401	0.006171
2	0.37	1.64	0.597746	0.603585	0.005839
3	0.52	2.16	0.44535	0.450953	0.00563
4	0.75	2.91	0.320691	0.326029	0.005339
5	1.12	4.03	0.22008	0.225187	0.005107
6	0.97	5	0.170817	0.171941	0.001124

Örnek 2. $D = \{(t, x) : t \in [0, 5], |x - 1| \leq 2\}$ bölgesi üzerinde

$$x' = -x(t), x(0) = 1 \quad (5.2)$$

Cauchy problemini ele alalım. Burada $f(t, x) = -x(t)$ dir. Algoritma 3 ü kullanarak (5.2) Cauchy probleminin nümerik çözümünü hesaplayalım.

0. Adım (Giriş Elemanları): $t_0 = 0, x_0 = 1, T = 5, b=2, h^* = 10^{-9}$ ve $\delta_L = 10^{-2}$

1. Adım:

$$\max_{\tau \in [0, 5]} |(f_{tt} + 2f_{tx} + f_{xx} + f_x f_t + f \cdot f_x^2 + f^2 f_{xx})(\tau)| = 5 \max_{\tau \in [0, 5]} |x(\tau)| = 5(2+1) = 15 = M$$

$$1.1. \hat{h} \leq \left(\frac{12\delta_L}{M} \right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{12 \times 10^{-2}}{15} \right)^{\frac{1}{3}} = 0.2 \Rightarrow \hat{h} = 0.2$$

$$1.2.1. t_0 + \hat{h} = 0 + 0.2 \leq T = 5$$

$$1.2.1.1. \hat{h} = 0.2 > h^* = 10^{-9} \Rightarrow h = 0.2$$

$$1.3. t_1 = t_0 + h = 0.2$$

$$1.4. s_{1,1} = f(t_0, y_0) = -1, s_{1,2} = f(t_0 + h, y_0 + s_{1,1}h) = -0.8, y_1 = y_0 + \frac{1}{2}h(s_{1,1} + s_{1,2}) = 0.82$$

2. Adım:

$$2.1. t_0 + 2h \leq 5$$

$$2.1.1. t_2 = t_0 + 2h = 0.4$$

$$2.1.2. s_{2,1} = f(t_1, y_1) = -0.82, s_{2,2} = f(t_1 + h, y_1 + s_{2,1}h) = -$$

$$0.656, y_2 = y_1 + \frac{1}{2}h(s_{2,1} + s_{2,2}) = 0.6724$$

⋮

25. Adım:

$$25.1. t_0 + 25h \leq 5$$

$$25.1.1. t_{25} = t_0 + 25h = 5$$

$$25.1.2. s_{25,1} = f(t_{24}, y_{24}) = -0.0122498, s_{25,2} = f(t_{24} + h, y_{24} + s_{25,1}h) = -0.00979981,$$

$$y_{25} = y_{24} + \frac{1}{2}h(s_{25,1} + s_{25,2}) = 0.0100448$$

26. Adım:

$$26.1. t_0 + 26h > 5 \quad \hat{h} = 5 - 0 - 25 \times (0.2) = 0$$

26.2. $\hat{h} < h^*$ olup işlem sona erer.

(5.2) Cauchy probleminin her bir adımda elde edilen adım genişliği, nümerik çözümü, $z(t_i)$ ve $|LE_i|$ değerleri Tablo 5.2 de verilmiştir.

Tablo 5.2

i	h	t_i	y_i	$z(t_i)$	$ LE_i $
0	0.2	0	1	1	0
1	0.2	0.2	0.82	0.818731	0.001269
2	0.2	0.4	0.6724	0.671359	0.00104078
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
24	0.2	4.8	0.0122498	0.00852825	1.3221e-05
25	0.2	5	0.0100448	0.00699316	1.08412e-05

6. Sonuçlar

Bu çalışmada, (1.1) Cauchy probleminin nümerik integrasyonunda adım genişliğinin nasıl seçileceği sorusundan yola çıkılmış ve nümerik metotların hata analizi dikkate alınarak, tam çözüme istenildiği kadar yakın bir nümerik çözüm elde edilebilecek şekilde adım genişliği stratejisi verilmiştir. Bu strateji; verilen problemin yapısına göre eğer lokal hatanın üst sınırı noktaya bağlı şekilde bulunuyorsa değişken adım genişliği, noktadan bağımsız şekilde bulunuyorsa sabit adım genişliği tespit etmektedir. Daha sonra verilen stratejiye uygun olarak her bir adımda adım genişliği tespit eden ve nümerik çözüm hesaplayan iki algoritma verilmiştir. Bu algoritmalarından birisi sabit adım genişliği diğeri ise değişken adım genişliği tespit ederek nümerik çözüm hesaplamaktadır. Verdiğimiz algoritmalar kesinlikle bilgisayarın kilitlenmesine neden olmamaktadır. K- adım genişliği kontrol algoritması her adımda tespit edilen adım genişliğini kontrol ederek gerektiğinde hesaplama işlemini sonlandırmaktadır.

Kaynaklar

- [1] Conte, S. D., de Boor Carl, Elementary Numerical Analysis, Mc Graw-Hill, Singapore, (1981)
- [2] Wille, D. R., Experiments in Stepsize Control for Adams Linear Multistep Methods, Advances in Computational Mathematics, 8: 335-344 (1998)
- [3] Usman, A., Hall, G., Equilibrium States for Predictor- Corrector Methods, Journal of Computational and Applied Mathematics, 89:275, 308 (1998)
- [4] Aydın, K., Bulgak, A., Bulgak, H. Chumakova, N.A., Global Error Estimation in Numerical Integration of Ordinary Differential Equations, Report No.4/2001, Konya (2001)
- [5] Heath, M.T., Scientific Computing an Introductory Survey, Second edition, McGraw- Hill, New York, (2002)
- [6] Çelik Kızıllıkan, G., Başlangıç Değer Problemlerinin Nümerik İntegrasyonunda Adım Genişliği Tespiti, Yüksek Lisans Tezi, S. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya (2004)