S.Ü. Fen Edebiyat Fakültesi Fen Dergisi Sayı 24 (2004) 19-28, KONYA

Pareto I Dağılımının İlk Bozulma Sansürlü Örnekleme Planına Dayalı Parametrelerinin Tahmini ve Beklenen Test Süresi*

Coşkun KUŞ[1], Mehmet Fedai KAYA[1]

Özet: Bu çalışmada, ilk bozulma sansürlü örnekleme planı ele alınmıştır. Pareto I dağılımının parametrelerinin yeni tahmin edicileri Menon'un [8] yöntemine benzer olarak elde edilmiş ve özellikleri Monte Carlo simulasyon çalışması yapılarak incelenmiştir. Parametreler için güven aralıkları ve güven bölgeleri elde edilmiştir. Ayrıca ilk bozulma sansürlü örnekleme planına dayalı beklenen test süresi hesaplanmış ve tam örnekleme planın ki ile karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Beklenen test süresi, güven aralığı, ilk bozulma sansürlü örnekleme planı, ortak güven bölgesi, Pareto I dağılımı.

Parameter Estimation of the Pareto I Distribution and Expected Test Time based on First Failure-Censored Sampling Plan

Abstract: In this study, first failure-censored sampling plan is considered. Estimators of the parameters of Pareto I distribution are obtained paralel to Menon's [8] method and their properties are investigated via Monte Carlo simulation. Confidence intervals and joint confidence regions for the parameters are given. Also expected test time is calculated based on first failure-censored sampling plan and it is compared with expected test time of complete sampling plan.

Keywords: Expected test time, confidence interval, first failure-censored sampling plan, joint confidence region, Pareto I distribution.

Giriş

$Pareto\, I(\lambda, \beta)$ dağılımına sahip bir X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk ve dağılım fonksiyonları sırasıyla

$$f(x) = \lambda\beta^{\lambda} x^{-(\lambda+1)}, \quad x > \beta > 0,\ \lambda > 0$$

$$F(x) = 1 - \beta^{\lambda} x^{-\lambda}$$

şeklindedir. Bu dağılım gerçekte Pearson Tip-VI dağılımının özel bir halidir. Bozulma oranı fonksiyonu $h(x) = \lambda x^{-1}$ olup azalandır. Pareto I dağılımının beklenen değer ve varyansı, sırasıyla,

$$E(X) = \lambda\beta(\lambda - 1)^{-1}, \ \lambda > 1$$

$$Var(X) = \beta^2 \lambda \{(\lambda - 1)^2 (\lambda - 2)\}^{-1}, \ \lambda > 2$$

biçimindedir. Pareto I dağılımı aynı zaman da Lomax dağılımı olarak da bilinir.

Literatürde Pareto I dağılımının parametreleri ile ilgili istatistiksel sonuç çıkarımı hakkında bir çok makale ve kaynak kitap vardır . Bunlardan bazıları Vännman [11], Lawless [7] , Arnold ve Press [1] , Ouyang ve Wu [9], Balakrishnan ve Aggarwala [2], Soliman [10], Johnson ve ark. [5] ve Wu [12]'dur.

---

* Bu makale Coşkun Kuş'un doktora tezinin [6] bir kısmıdır.

1 Selçuk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi İstatistik Bölümü, 42075, Kampüs / KONYA, e-mail: coskun@selcuk.edu.tr

Menon [8], Weibull dağılımının parametreleri için tam örnekleme dayalı yeni tahmin ediciler tanımlamış ve bu tahmin edicilerin özelliklerini incelemiştir. Bu çalışmada, Balasooriya [3] tarafından öne sürülen ilk bozulma sansürlü örnekleme planı ele alınmıştır. Pareto I dağılımının parametrelerinin yeni nokta tahmin edicileri Menon'un [8] yöntemine benzer olarak elde edilmiş ve özellikleri Monte Carlo simulasyon çalışması yapılarak incelenmiştir. Ayrıca parametrelerin güven aralıkları ve güven bölgeleri elde edilmiş, ilk bozulma sansürlü örneklem planına dayalı beklenen test süresi hesaplanmış ve tam örneklem durumu ile karşılaştırılmıştır.

İlk Bozulma Sansürlü Örneklem

Balasooriya [3] tarafından geliştirilen ilk bozulma sansürleme modeli şu şekilde tanımlanır: n hacimli k tane bağımsız(örneklem) grup olsun. Her bir grup ilk bozulma gerçekleşinceye kadar teste tabi tutulsun. Elde edilen k hacimli örnekleme, *ilk bozulma sansürlü örneklem* denir. Bu tanım şu şekilde de verilebilir: $X_1^i, X_2^i, \ldots, X_n^i,\ \ i = 1,2,\ldots,k$, sürekli F dağılım fonksiyonuna sahip n hacimli $i.$ örneklem ve bu $i.$ örneklemin sıra istatistikleri $X_{1:n}^i < X_{2:n}^i < \ldots < X_{n:n}^i$ olmak üzere k örneklemin de birbirinden bağımsız olması koşulu altında $X_{1:n}^i,\ i = 1,2,\ldots,k$ örneklemine *ilk bozulma sansürlü örneklem* denir. Balasooriya [3], iki parametreli üstel dağılım için n hacimli k örnekleme dayalı ilk bozulma sansürlü örnekleme planını incelemiş, harcanan test zamanı bakımından ilk bozulma sansürlü örnekleme planının $k \times n$ hacimli tam örnekleme planından daha avantajlı olduğunu göstermiştir.

Pareto I Dağılımı Parametreleri İçin Yeni Tahmin Ediciler

$X_{1:n}^1, X_{1:n}^2, \ldots, X_{1:n}^k$, $Pareto\, I(\lambda,\beta)$ dağılıma sahip bir kitleden alınmış n hacimlik k örneklemin birinci sıra istatistikleri olsun. Aşağıdaki dönüşümü göz önüne alalım.

$$Z_{1:n}^i = \lambda \log\left(\beta^{-1} X_{1:n}^i\right) \quad , i = 1,2,\ldots,k$$

Kolayca görülebilir ki $Z_{1:n}^i$, her $i = 1,2,\ldots,k$ için n^{-1} ortalamalı üstel dağılıma sahip bir rasgele değişkendir. Böylece $E\left(Z_{1:n}^i\right) = n^{-1}$ ve $Var\left(Z_{1:n}^i\right) = n^{-2}$ olur. Bu durumda $Z_{1:n}^i = \lambda \log\left(\beta^{-1} X_{1:n}^i\right) \Rightarrow Var\left(Z_{1:n}^i\right) = \lambda^2 Var\left\{\log\left(X_{1:n}^i\right)\right\}$ ifadesi kullanılarak λ parametresinin ilk bozulma sansürlü örnekleme dayalı bir tahmin edicisi

$$\hat{\lambda} = \left\{\frac{n^{-2}}{\hat{V}ar\left\{\log\left(X_{1:n}^i\right)\right\}}\right\}^{1/2} = (k-1)^{1/2} n^{-1} \left\{\sum_{i=1}^{k} \left\{\log\left(X_{1:n}^i\right)\right\}^2 - k^{-1}\left\{\sum_{i=1}^{k} \log\left(X_{1:n}^i\right)\right\}^2\right\}^{-1/2} \tag{1}$$

olarak tanımlanabilir. Burada $\hat{V}ar\left\{\log\left(X_{1:n}^i\right)\right\}$, $\log\left(X_{1:n}^1\right), \log\left(X_{1:n}^2\right), \ldots, \log\left(X_{1:n}^k\right)$ örneklemi için örneklem varyansıdır. Yani

$$\hat{V}ar\left\{\log\left(X_{1:n}^i\right)\right\} = (k-1)^{-1}\left\{\sum_{i=1}^{k}\left\{\log\left(X_{1:n}^i\right)\right\}^2 - k^{-1}\left\{\sum_{i=1}^{k}\log\left(X_{1:n}^i\right)\right\}^2\right\}$$

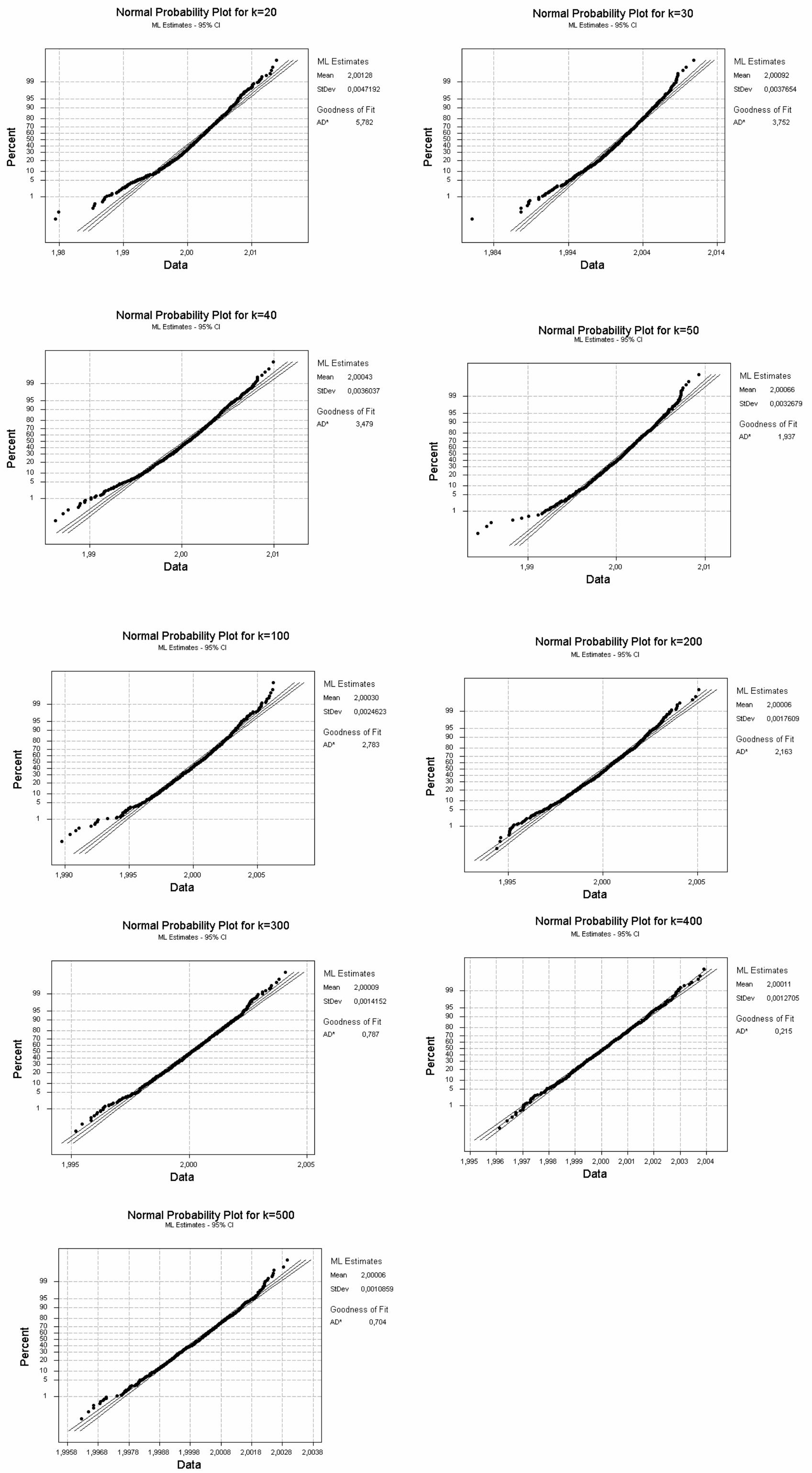
biçimindedir. Ayrıca $Z_{1:n}^i = \lambda \log\left(\beta^{-1} X_{1:n}^i\right) \Rightarrow E\left(Z_{1:n}^i\right) = \lambda\left\{E\left[\log\left(X_{1:n}^i\right)\right] - \log(\beta)\right\}$ ifadesi kullanılarak β parametresinin ilk bozulma sansürlü örnekleme dayalı bir tahmin edicisi

$$\hat{\beta} = \exp\left\{\hat{E}\left\{\log\left(X_{1:n}^i\right)\right\} - \left(n\hat{\lambda}\right)^{-1}\right\} = \exp\left\{\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\log\left(X_{1:n}^i\right) - \left(n\hat{\lambda}\right)^{-1}\right\} \tag{2}$$

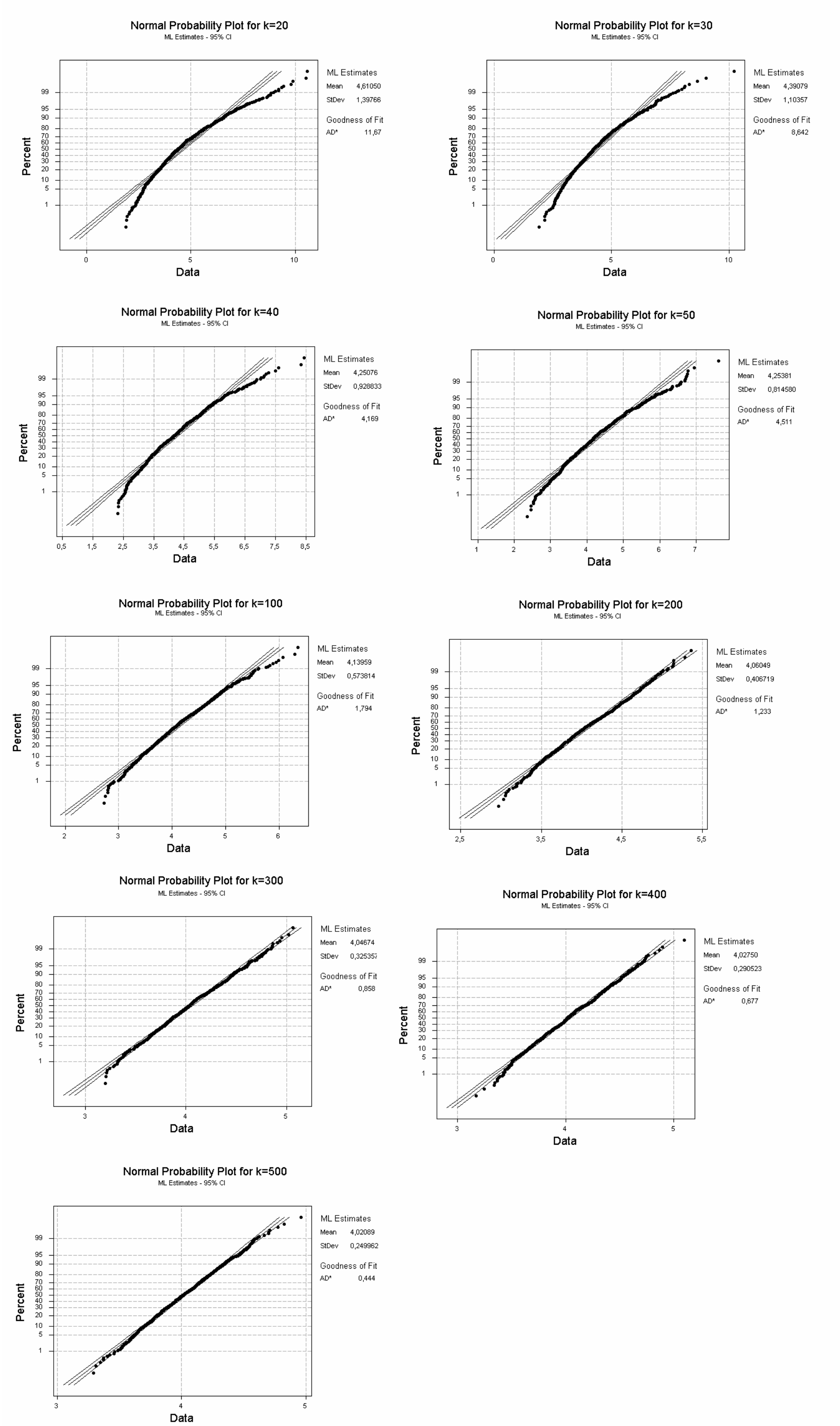
olarak elde edilir. Burada $\hat{E}\left\{\log\left(X_{1:n}^i\right)\right\} = k^{-1}\sum_{i=1}^{k}\log\left(X_{1:n}^i\right)$ biçimindedir ve $\hat{\lambda}$ (1)'de tanımlıdır.

Simulasyon Çalışması

Delphi 5 programlama dili kullanılarak, $n = 20$, $k = 20,30,40,50,100,200$,$300,400$ ve 500 durumları için 1000'er kez $Pareto\, I(4,2)$ dağılımdan örneklemler üretildi ve bu örneklemlere dayalı olarak



Şekil 1. Pareto I dağılımının β parametresinin ilk bozulma sansürlü örnekleme dayalı $\hat{\beta}$ tahmin edicisinin $n = 20$ durumunda 1000 deneme sonucu aldığı değerlerin Normal P-P çizitleri



Şekil 2. Pareto I dağılımının λ parametresinin ilk bozulma sansürlü örnekleme dayalı λ tahmin edicisinin $n = 20$ durumunda 1000 deneme sonucu aldığı değerlerin Normal P-P çizitleri

$\hat{\lambda}$ ve $\hat{\beta}$ tahmin edicilerinin aldığı değerlerin histogramları ve Normal P-P çizitleri Minitab 13.1 paket programı vasıtasıyla çizdirildi. Şekil 1 ve Şekil 2,'de görüldüğü gibi k değeri arttıkça, $\hat{\lambda}$ ve $\hat{\beta}$ tahmin edicilerinin aldığı değerlerin ortalaması sırasıyla 4'e ve 2'ye yaklaşmakta, standart sapması ve Anderson-Darling (AD) istatistiğinin aldığı değer küçülmektedir. Simulasyon sonucu olarak $\hat{\lambda}$ ve $\hat{\beta}$ tahmin edicilerin asimptotik yansızlık, tutarlık ve asimptotik normallik özelliklerine sahip olduğu söylenebilir. Bu özelliklerin teorik olarak gösterilmesi problemi halen açıktır.

Yeni Güven Aralığı ve Güven Bölgesi

$X_{1:n}^{1}, X_{1:n}^{2}, \ldots, X_{1:n}^{k}$ bağımsız ve aynı $Pareto\, I(\lambda, \beta)$ dağılımından alınmış ilk bozulma sansürlü örneklem ve $X_{1:n}^{(1)} < X_{1:n}^{(2)} < \cdots < X_{1:n}^{(k)}$, bu örneklemin sıra istatistikleri olsun. $X_{1:n}^{1}, X_{1:n}^{2}, \ldots, X_{1:n}^{k}$ bağımsız ve aynı $Pareto\, I(n\lambda, \beta)$ dağılımından alınmış k birimlik tam örneklem gibi görülebileceğinden Pareto I dağılımının parametrelerinin ilk bozulma sansürlü örnekleme dayalı güven aralıkları ve güven bölgeleri aşağıdaki gibi elde edilebilir. Aşağıdaki dönüşüm göz önüne alınsın.

$$Y_{1:n}^{(i)} = n\lambda \log\left\{\beta^{-1} X_{1:n}^{(i)}\right\}, \qquad i = 1, 2, \ldots, k$$

Gösterilebilir ki $Y_{1:n}^{(1)} < Y_{1:n}^{(2)} < \cdots < Y_{1:n}^{(k)}$, 1 ortalamalı üstel dağılıma sahip bir kitleden alınmış sıra istatistikleridir.

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= kY_{1:n}^{(1)} \\ \Delta_2 &= (k-1)\left(Y_{1:n}^{(2)} - Y_{1:n}^{(1)}\right) \\ &\vdots \\ \Delta_k &= \left(Y_{1:n}^{(k)} - Y_{1:n}^{(k-1)}\right) \end{aligned} \tag{3}$$

dönüşümü göz önüne alınsın. Δ_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ bağımsız ve 1 ortalamalı üstel dağılıma sahiptir. Böylece

$$\kappa = 2\Delta_1 = 2kY_{1:n}^{(1)} \sim \chi_{(2)}^{2}$$

ve

$$\varepsilon = 2\sum_{i=2}^{k} \Delta_i = 2\sum_{i=1}^{k} \left(Y_{1:n}^{(i)} - Y_{1:n}^{(1)}\right) \sim \chi_{(2k-2)}^{2}$$

dir. Aynı zamanda açıktır ki ε ve κ bağımsız rasgele değişkenlerdir. ξ ve η rasgele değişkenleri aşağıdaki gibi tanımlansın

$$\xi = \frac{\varepsilon}{(k-1)\kappa} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \left(Y_{1:n}^{(i)} - Y_{1:n}^{(1)}\right)}{k(k-1)Y_{1:n}^{(1)}}$$

$$\eta = \varepsilon + \kappa = 2\sum_{i=1}^{k} Y_{1:n}^{(i)}$$

Lemma 1. *ξ, $F_{2k-2,2}$ dağılımına ve η, $\chi_{(2k)}^{2}$ dağılımına sahiptir. Aynı zamanda ξ ve η bağımsızdır (Johnson ve ark.[4]).*

$F_\alpha(\delta_1,\delta_2)$, α sağ-kuyruk olasılıklı ve δ_1 ve δ_2 serbestlik dereceli F dağılımının yüzdeliği ve $\mathbf{X_{1:n}} = \left(X_{1:n}^{(1)}, X_{1:n}^{(2)}, \ldots, X_{1:n}^{(k)}\right)$ olsun.

Teorem 1. *$X_{1:n}^{(1)} < X_{1:n}^{(2)} < \ldots < X_{1:n}^{(k)}$, $Pareto\, I(\lambda,\beta)$ dağılımına sahip bir kitleden alınmış ilk bozulma sansürlü örneklemin sıra istatistikleri olsun. Bu durumda verilen $0<\alpha<1$ için β parametresinin $100(1-\alpha)\%$ lık bir güven aralığı,*

$$\left(\varphi\left(\mathbf{X_{1:n}}, F_{1-\frac{\alpha}{2}(2k-2,2)}\right), \varphi\left(\mathbf{X_{1:n}}, F_{\frac{\alpha}{2}(2k-2,2)}\right)\right)$$

şeklindedir. Burada

$$\varphi(\mathbf{X_{1:n}}, t) = \exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^{k}\log\left(X_{1:n}^{(\mathbf{i})}\right) - k\log\left(X_{1:n}^{(\mathbf{1})}\right)[(k-1)t+1]}{k(k-1)t}\right\}$$

şeklinde tanımlıdır.

İspat. Lemma 1'den pivot

$$\xi = \frac{\sum_{i=1}^{k}\left(Y_{1:n}^{(i)} - Y_{1:n}^{(1)}\right)}{k(k-1)Y_{1:n}^{(1)}} = \frac{\sum_{i=1}^{k}\log\left\{\beta^{-1}X_{1:n}^{(i)}\right\} - k\log\left\{\beta^{-1}X_{1:n}^{(i)}\right\}}{k(k-1)\log\left\{\beta^{-1}X_{1:n}^{(i)}\right\}}$$

$F_{2k-2,2}$ dağılımına sahiptir. $0<\alpha<1$ için

$$F_{1-\frac{\alpha}{2}(2k-2,2)} < \frac{\sum_{i=1}^{k}\log\left\{\beta^{-1}X_{1:n}^{(i)}\right\} - k\log\left\{\beta^{-1}X_{1:n}^{(i)}\right\}}{k(k-1)\log\left\{\beta^{-1}X_{1:n}^{(i)}\right\}} < F_{\frac{\alpha}{2}(2k-2,2)}$$

olayı

$$\varphi\left(\mathbf{X_{1:n}}, F_{1-\frac{\alpha}{2}(2k-2,2)}\right) < \beta < \varphi\left(\mathbf{X_{1:n}}, F_{\frac{\alpha}{2}(2k-2,2)}\right)$$

olayına denktir. Bu da ispatı tamamlar. □

Bir başka seçenekte, β'nın üst $100(1-\alpha)\%$ lık güven limiti ul bulunabilir. O zaman β'nın üst $100(1-\alpha)\%$ lık güven aralığı $(0,ul)$ olur.

Sonuç 1. *$X_{1:n}^{(1)} < X_{1:n}^{(2)} < \ldots < X_{1:n}^{(k)}$, $Pareto\, I(\lambda,\beta)$ dağılımına sahip bir kitleden alınmış ilk bozulma sansürlü örneklemin sıra istatistikleri olsun. Bu durumda verilen $0<\alpha<1$ için β parametresinin $100(1-\alpha)\%$ lık üst güven limiti,*

$$\varphi\left(\mathbf{X_{1:n}}, F_{\alpha(2k-2,2)}\right)$$

şeklindedir. Burada, $\varphi(\mathbf{X_{1:n}}, t)$ Teorem 1'deki gibi tanımlıdır.

$\chi^2_{\alpha(\delta)}$, α sağ-kuyruk(right-tail) olasılıklı ve δ serbestlik dereceli Ki-kare dağılımının yüzdeliği olsun. β ve λ parametrelerinin $100(1-\alpha)\%$ lık güven bölgesi aşağıdaki teoremle verilmiştir.

Teorem 2. $X_{1:n}^{(1)} < X_{1:n}^{(2)} < \Lambda < X_{1:n}^{(k)}$, $Pareto\, I(\lambda,\beta)$ *dağılımına sahip bir kitleden alınmış ilk bozulma sansürlü örneklemin sıra istatistikleri olsun. Bu durumda verilen* $0<\alpha<1$ *için* β *ve* λ *parametrelerinin* $100(1-\alpha)\%$ *lık ortak güven bölgesi, aşağıdaki eşitsizliklerin çözümünden elde edilir.*

$$\begin{cases} \varphi\left(\mathbf{X_{1:n}}, F_{\frac{1+\sqrt{1-\alpha}}{2}(2k-2,2)}\right) < \beta < \varphi\left(\mathbf{X_{1:n}}, F_{\frac{1-\sqrt{1-\alpha}}{2}(2k-2,2)}\right) \\ \dfrac{\chi_{\frac{1+\sqrt{1-\alpha}}{2}(2k)}}{2n\sum_{i=1}^{k}\log\left(\dfrac{X_{1:n}^{(i)}}{\beta}\right)} < \lambda < \dfrac{\chi_{\frac{1-\sqrt{1-\alpha}}{2}(2k)}}{2n\sum_{i=1}^{k}\log\left(\dfrac{X_{1:n}^{(i)}}{\beta}\right)} \end{cases}$$

Burada, $\varphi(\mathbf{X_{1:n}}, t)$ *Teorem 1'deki gibi tanımlıdır.*

İspat. Lemma 1'den pivot

$\eta = 2\sum_{i=1}^{k} Y_{1:n}^{(i)} = 2n\lambda\sum_{i=1}^{k}\log\left\{\beta^{-1}X_{1:n}^{(i)}\right\}$, $\chi^2_{(2k)}$ dağılımına sahiptir ve ξ den bağımsızdır. $0<\alpha<1$ için

$$P\left(F_{\frac{1+\sqrt{1-\alpha}}{2}(2k-2,2)} < \xi < F_{\frac{1-\sqrt{1-\alpha}}{2}(2k-2,2)}\right) = \sqrt{1-\alpha} \text{ ve } P\left(\chi_{\frac{1+\sqrt{1-\alpha}}{2}(2k)} < \eta < \chi_{\frac{1-\sqrt{1-\alpha}}{2}(2k)}\right) = \sqrt{1-\alpha}$$

şeklindedir. Buradan

$$P\left\{F_{1-\frac{\alpha}{2}(2k-2,2)} < \frac{\left[\sum_{i=1}^{k}\log\left[1+\left(X_{1:n}^{(i)}\right)^{\beta}\right]\right] - k\log\left[1+\left(X_{1:n}^{(1)}\right)^{\beta}\right]}{k(k-1)\log\left[1+\left(X_{1:n}^{(1)}\right)^{\beta}\right]} < F_{\frac{\alpha}{2}(2k-2,2)}\right.$$

$$\left., \chi_{\frac{1+\sqrt{1-\alpha}}{2}(2k)} < 2n\lambda\sum_{i=1}^{k}\log\left\{\beta^{-1}X_{1:n}^{(i)}\right\} < \chi_{\frac{1-\sqrt{1-\alpha}}{2}(2k)}\right\} = 1-\alpha$$

Bu ise aşağıdaki ifadeye denktir.

$$\begin{cases} \varphi\left(\mathbf{X_{1:n}}, F_{\frac{1+\sqrt{1-\alpha}}{2}(2k-2,2)}\right) < \beta < \varphi\left(\mathbf{X_{1:n}}, F_{\frac{1-\sqrt{1-\alpha}}{2}(2k-2,2)}\right) \\ \dfrac{\chi_{\frac{1+\sqrt{1-\alpha}}{2}(2k)}}{2n\sum_{i=1}^{k}\log\left(\dfrac{X_{1:n}^{(i)}}{\beta}\right)} < \lambda < \dfrac{\chi_{\frac{1-\sqrt{1-\alpha}}{2}(2k)}}{2n\sum_{i=1}^{k}\log\left(\dfrac{X_{1:n}^{(i)}}{\beta}\right)} \end{cases}$$

Bu da ispatı tamamlar. □

Sonuç 2. *$X_{1:n}^{(1)} < X_{1:n}^{(2)} < \Lambda < X_{1:n}^{(k)}$, $Pareto\, I(\lambda, \beta)$ dağılımına sahip bir kitleden alınmış ilk bozulma sansürlü örneklem olsun. O zaman verilen $0 < \alpha < 1$ için β ve λ parametrelerinin $100(1-\alpha)\%$ lık ortak güven bölgesi, aşağıdaki eşitsizliklerin çözümünden elde edilir.*

$$\begin{cases} 0 < \beta < \varphi\left(\mathbf{X}_{\mathbf{1:n}}, F_{1-\sqrt{1-\alpha}(2k-2,2)}\right) \\ \dfrac{\chi^2_{\frac{1+\sqrt{1-\alpha}}{2}(2k)}}{2n\sum_{i=1}^{k}\log\left(\dfrac{X_{1:n}^{(i)}}{\beta}\right)} < \lambda < \dfrac{\chi^2_{\frac{1-\sqrt{1-\alpha}}{2}(2k)}}{2n\sum_{i=1}^{k}\log\left(\dfrac{X_{1:n}^{(i)}}{\beta}\right)} \end{cases}$$

Burada $\varphi(\mathbf{X}_{\mathbf{1:n}}, t)$, Teorem 1'deki gibi tanımlıdır.

Beklenen Test Süresi

$X_1, X_2, \mathrm{K}, X_n$, $Pareto\, I(\lambda, \beta)$ dağılımından n birimlik tam örneklem olsun. Bu durumda beklenen test zamanı $E(X_{n:n})$'dir. $X_{n:n}$ rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_n(x) = n\left\{1 - \beta^{\lambda} x^{-\lambda}\right\}^{n-1} \lambda\beta^{\lambda} x^{-(\lambda+1)}$$

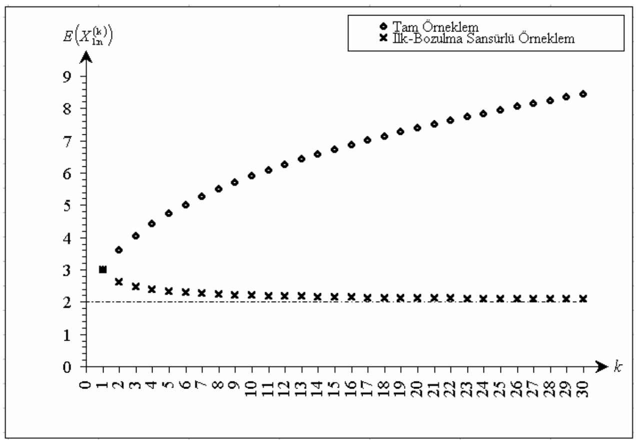
şeklindedir. Böylece n birimlik tam örneklemin beklenen test zamanı aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} E(X_{n:n}) &= \int_0^{\infty} xn\left\{1 - \beta^{\lambda} x^{-\lambda}\right\}^{n-1} \lambda\beta^{\lambda} x^{-(\lambda+1)} dx \\ &= n\lambda\beta^{\lambda} \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \binom{n-1}{j} \beta^{\lambda j} \int_{\beta}^{\infty} x^{-\lambda(j+1)} dx \\ &= n\lambda\beta \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \binom{n-1}{j} (\lambda(j+1) - 1)^{-1} \end{aligned} \tag{4}$$

$X_{1:n}^1, X_{1:n}^2, \mathrm{K}, X_{1:n}^k$, $Pareto\, I(\lambda, \beta)$ dağılımından alınmış k birimlik birinci bozulma sansürlü örneklem ve $X_{1:n}^{(1)} < X_{1:n}^{(2)} < \Lambda < X_{1:n}^{(k)}$, bu örneklemin sıra istatistikleri olsun. Bu durumda beklenen test zamanı $E\left(X_{1:n}^{(k)}\right)$ dır.

$X_{1:n}^1, X_{1:n}^2, \mathrm{K}, X_{1:n}^k$ bağımsız ve aynı $Pareto\, I(n\lambda, \beta)$ dağılımından alınmış k birimlik tam örneklem gibi görülebileceğinden (4)'den birinci bozulma sansürlü örneklem planı durumunda beklenen test zamanı aşağıda gibi elde edilir.

$$E\left(X_{1:n}^{(k)}\right) = kn\lambda\beta \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{k-1}{j} (n\lambda(j+1) - 1)^{-1} \tag{5}$$



Şekil 3. İlk bozulma sansürlü ve tam örneklem durumunda beklenen test süresi

(4) ve (5)'den, $n = k = 1,2,\ldots,30$ $\lambda = 3$, $\beta = 2$ için ilk bozulma sansürlü örneklem planın ve tam örneklem planın beklenen test sürelerinin grafikleri yukarıdaki gibi elde edilmiştir. Grafiğe dikkat edilirse ilk bozulma sansürlü örneklem planına dayalı test zamanı Pareto I dağılımının eşik(treshold) parametresine yaklaşmaktadır. Ayrıca k arttıkça tam örnekleme dayalı test süresi artarken, ilk bozulma sansürlü örnekleme dayalı test süresi azalmaktadır. Bu da ilk bozulma sansürlü örnekleme dayalı test planının süre bakımında ne kadar avantajlı olduğunu göstermektedir.

Uygulama

Teorem 1 ve Teorem 2'deki sonuçları örneklendirmek için $Pareto\,I(3,1)$ dağılımından $n = 5$ ve $k = 10$ durumunda ilk bozulma sansürlü örneklem üretildi. Üretilen örneklem aşağıdaki tablodadır.

Tablo 1. Üretilen ilk bozulma sansürlü örneklem

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_{1:5}^{i}$	1.0024	1.0076	1.0214	1.0297	1.0343	1.0663	1.0813	1.0855	1.0893	1.2709

(1) ve (2) kullanılarak β ve λ parametrelerinin tahminleri sırasıyla $\hat{\beta} = 0.9954$ ve $\hat{\lambda} = 2.9000$ olarak bulunmuştur. β parametresinin 95%'lik güven aralığını elde etmek için gerekli olan yüzdelikler Minitab 13.1 paket programı kullanılarak aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

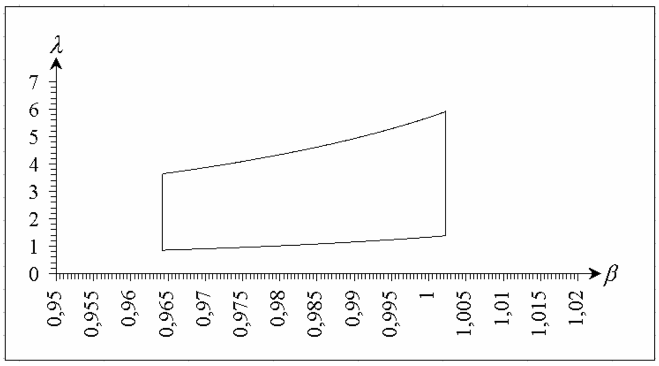
$F_{0.025(18,2)} = 39.4424$, $F_{0.975(18,2)} = 0.2193$ ve $F_{0.05(18,2)} = 19.4402$

Teorem 1 ve Sonuç 1 kullanılarak β parametresinin 95%'lik güven aralıkları, sırasıyla, $(0.9714, 1.0022)$ ve $(0, 1.0020)$ olarak bulunur.

β ve λ parametrelerinin 95%'lik ortak güven bölgesini elde etmek için gerekli olan yüzdelikler Minitab 13.1 paket programı kullanılarak aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$F_{0.0127(18,2)} = 78.1835$, $F_{0.9873(18,2)} = 0.1780$ ve $F_{0.0253(18,2)} = 38.9680$

$\chi^2_{0.0127(20)} = 36.7027$ ve $\chi^2_{0.9873(20)} = 8.5780$



Şekil 4. β ve λ parametrelerinin (6)'daki 95%'lik ortak güven bölgesi

Teorem 2 ve Sonuç 2 kullanılarak β ve λ parametrelerinin 95%'lik ortak güven bölgeleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{cases} 0.9643 < \beta < 1.0023 \\ \dfrac{8.5780}{2\times5\times\sum_{i=1}^{10}\log\left(\dfrac{X_{1:5}^{i}}{\beta}\right)} < \lambda < \dfrac{36.7027}{2\times5\times\sum_{i=1}^{10}\log\left(\dfrac{X_{1:5}^{i}}{\beta}\right)} \end{cases} \tag{6}$$

ve

$$\begin{cases} 0 < \beta < 1.0022 \\ \dfrac{8.5780}{2\times5\times\sum_{i=1}^{10}\log\left(\dfrac{X_{1:5}^{i}}{\beta}\right)} < \lambda < \dfrac{36.7027}{2\times5\times\sum_{i=1}^{10}\log\left(\dfrac{X_{1:5}^{i}}{\beta}\right)} \end{cases}$$

Şekil 4'de β ve λ parametrelerinin (6)'daki 95%'lik ortak güven bölgesi görülmektedir. β büyüdükçe güven bölgesi genişlemektedir.

Kaynaklar

[1] Arnold, B.C., Press S.J., Bayesian Estimation and Prediction for Pareto Data, Journal of the American Statistical Association, 84:1079-1084 (1989).

[2] Balakrishnan N., Aggarwala R., Progressive Censoring:Theory, Methods and Applications, Boston, Birkhauser (2000).

[3] Balasooriya, U., Failure-Censored Reliability Sampling Palns for the Exponential Distribution. Journal of Statistical Computations and Simulation, 52:337-349 (1995).

[4] Johnson N.L., Kotz S., Balakrishnan N., Continuous Univariate Distributions, Vol 1, 2nd edn. New York, Wiley (1994).

[5] Johnson N.L., Kotz S., Balakrishnan N., Continuous Univariate Distributions, vol. 2, second ed., John Wiley and Sons, New York (1995).

[6] Kuş, C., Bazı Yaşam Zamanı Dağılımlarının Parametrelerinin Tam ve Sansürlü Verilere Dayalı Tahmini, Doktora Tezi, Selçuk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü (2004).

[7] Lawless J.F., Statistical Models and Methods for Lifetime Data, New York, Wiley (1982).

[8] Menon, M.V., Estimation of the Shape and Scale Parameters of The Weibull Distribution, Technometrics, 5: 175-182 (1963).

[9] Ouyang L.-Y., Wu S.-J., Prediction Intervals for an Ordered Observation From a Pareto Distribution. IEEE Transactions on Reliability, 43:264-269 (1994).

[10] Soliman A.A., Bayes Prediction in A Pareto Lifetime Model with Random Sample Sizes. The Statistician 49 51-62 (2000).

[11] Vännman K., Estimators based on Order Statistics from a Pareto Distribution, J.Amer.Stat. Assoc., 71:704-708 (1976).

[12] Wu S.-J., Estimation for the Two-Parameter Pareto Distribution under Progressive Censoring with Uniform Removals, J. Stat. Comp. Simul., 73:125-134 (2003).