

Hidrojen Atomunda Enerji Seviyelerindeki Kaymaların Pertürbasyon Teorisi ile Hesaplanması

Mehmet ERDOĞAN¹, Rıza OĞUL¹

Özet: Bu çalışmada, hidrojen atomunun enerji düzeyleri, Schrödinger denklemleri kullanılarak belirlenmiştir. Buna ek olarak, hidrojen atomunda enerji kaymaları, pertürbasyon teorisi kullanılarak, dejenere ve dejenere olmayan durumlar için hesaplanmıştır. Bunun için ilk olarak Schrödinger denklemleri, hidrojen atomu için kuantum mekaniksel olarak çözülmüş ve daha sonra radyal olasılık yoğunluğu grafikleri çizilmiştir. Bununla birlikte pertürbe potansiyeli uygulanmış hidrojen atomu için enerji kaymaları, zamandan bağımsız pertürbasyon teorisi kullanılarak hesaplanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Dalga fonksiyonu, Enerji kayması, Pertürbasyon teorisi

Calculation of The Energy Shifts for Hydrogen Atoms with Perturbation Theory

Abstract: Energy levels of hydrogen atom have been determined by solving the Schrödinger equation. In addition, energy shifts at atomic structures for degenerate and nondegenerate states are calculated by using perturbation theory. In this way, Schrödinger equation is first solved for hydrogen atom quantum mechanically and then radial probability density distributions are plotted. Additionally, energy shifts for hydrogen atom, on which the perturbation potential is applied, are calculated by using time independent perturbation theory.

Key Words: Wave functions, Energy shifts, Perturbation theory

1. Giriş

Yirminci yüzyılın başlarında klasik fiziğin açıklayamadığı siyah cisim ışıması, fotoelektrik olay ve Compton olayı, kuantum mekaniğinin geliştirilmesi sonucunda tam olarak açıklanabilmiştir. Kuantum mekaniğinde kesin çözümü olan potansiyellerden birisi Coulomb potansiyelidir. Bu

¹ Selçuk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Fizik Bölümü 42031 Kampüs Konya

yüzden hidrojen atomu dalga mekaniğinde temel ve önemli bir örnektir. Fakat birden fazla elektrona sahip atomların çözümlerinin zorluğundan dolayı Schrödinger denklemi yaklaşım metotları kullanılarak çözülebilmektedir. Bu sonuçlar literatürdeki sonuçlarla deney hataları içerisinde uyumlu sonuçlar vermiştir. Bu yaklaşım yöntemlerinden biri pertürbasyon teorisidir. Buna göre, sistemin enerji seviyelerine, küçük katkıları olan etkileşme potansiyel enerjileri, pertürbasyon teorisi ile hesaplanır. Hidrojen atomu için enerji kaymaları zamandan bağımsız pertürbasyon teorisi kullanılarak dejenere durumlar ve dejenere olmayan durumlar için hesaplanabilmektedir.

2. Hidrojen Atomunun Enerji Düzeylerinin Hesaplanması

Kuantum mekaniği ile atomik yapılar çok iyi bir şekilde açıklanabilmektedir. Bu amaçla yapılan teorik açıklamalar deneysel gözlemlerle çok iyi uyum göstermektedir. Tüm atomları kapsayan bu yeni atom modeline Dalga Modeli denir. Tek elektronlu hidrojen atomunun en basit atom olması ve Coulomb potansiyel enerjisinin küresel simetrik olması sebebiyle hidrojen atomu, dalga modelinin en basit uygulamasını oluşturur.

Coulomb potansiyel enerjisi kartezyen koordinat sisteminde,

$$U(x, y, z) = -\frac{Ze^2}{(4\pi\epsilon_0)\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -\frac{Ze^2}{(4\pi\epsilon_0) r} \quad (1)$$

ifadesiyle verilir. Küresel simetrinin en iyi ifade edildiği koordinat sistemi küresel koordinatlarıdır. Küresel koordinatların kartezyen koordinatlarıyla ilişkileri;

$$x = r \sin\theta \cos\phi \quad (2)$$

$$y = r \sin\theta \sin\phi \quad (3)$$

$$z = r \cos\theta \quad (4)$$

şeklindedir. Hidrojen atomunda elektronun Coulomb potansiyeli altındaki Schrödinger denklemi,

$$\nabla^2 \psi(r, \theta, \phi) + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(E + \frac{Ze^2}{(4\pi\epsilon_0)r} \right) \psi(r, \theta, \phi) = 0 \quad (5)$$

biçiminde verilir. Coulomb potansiyel enerjisi zamandan bağımsız olduğu için (5) eşitliği değişkenlerine ayrılarak çözülebilir. Ancak burada ∇^2 nin küresel koordinatlardaki operatör ifadesine ihtiyaç vardır. ∇^2 kartezyen koordinatlarda,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (6)$$

şeklinde yazılır. (2), (3) ve (4) eşitlikleri kullanılarak ∇^2 küresel koordinatlarda;

$$\nabla^2(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (7)$$

şeklinde yazılır. (7) eşitliği ile verilen operatör ifadesi (5) eşitliğinde yerine yazılırsa, hidrojen atomunun elektronu için Schrödinger dalga denklemi, küresel koordinatlarda;

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} (E - U(r)) \psi = 0 \quad (8)$$

olur. Burada çözüm fonksiyonu ψ , simetrik olup sadece r nin fonksiyonudur. Denk.(8) ile verilen ψ dalga fonksiyonu,

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r) Y(\theta, \phi) \quad (9)$$

şeklinde değişkenlerine ayrılıp (8) eşitliğinde kullanılması ile elde edilen diferansiyel denklem çözüldüğünde hidrojen atomunun durağan enerji seviyelerinin dalga fonksiyonları yarıçapa ve açılara bağlı olmak üzere ayrı ayrı bulunur.

Hidrojen atomunun genel çözüm fonksiyonunun açılara bağlı kısmının çözüm fonksiyonları, küresel harmonikler olarak adlandırılır. Küresel harmonikleri oluşturan fonksiyon;

$$Y_{\lambda m}(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\phi} (-1)^{(m+|m|)/2} \left[\frac{2\lambda+1}{2} \frac{(\lambda-|m|)!}{(\lambda+|m|)!} \right]^{1/2} P_{\lambda m}(\xi) \quad (10)$$

ile verilir ve hidrojen atomunda elektronun, sabit yarıçaplı küre yüzeyi üzerindeki harmonik hareketini temsil eder. (10) eşitliği ile verilen ifadede $P_{\lambda m}(\xi)$, birleşik Legendre polinomlarını ifade eder.

Hidrojen atomunun genel çözüm fonksiyonunun yarıçapa bağlı olan kısmı, radyal dalga fonksiyonu olarak adlandırılır ve

$$R_{n\lambda}(\rho) = - \left\{ \left(\frac{2Z}{na_0} \right)^3 \frac{(n-\lambda-1)!}{2n[(n+\lambda)!]^3} \right\}^{1/2} e^{-\rho/2} \rho^\lambda L_{qj}(\rho) \quad (11)$$

ile ifade edilir. Burada $L_{qj}(\rho)$ birleşik Laguerre polinomlarıdır ve ρ ,

$$\rho = \left(\frac{2Z}{na_0} \right) r \quad (12)$$

ile gösterilir. (9) eşitliğinde verilen ifade kuantum sayıları ile indislenerek,

$$\psi_{n\lambda m}(r, \theta, \phi) = R_{n\lambda}(r) Y_{\lambda m}(\theta, \phi) \quad (13)$$

şeklinde yazılır. $Y_{\lambda m}(\theta, \phi)$ ve $R_{n\lambda}(r)$ için sıra ile (10) ve (11) eşitliklerinde verilen ifadeleri (13) eşitliğinde yerlerine yazıldığında, hidrojen atomunun dalga fonksiyonunun en genel ifadesi,

$$\Psi_{n\lambda m}(r, \theta, \varphi) = - \left\{ \left(\frac{2Z}{na_0} \right)^3 \frac{(n-\lambda-1)!}{2n[(n+\lambda)!]^3} \right\}^{1/2} e^{-\rho/2} \rho^\lambda L_{qj}(\rho) \quad (14)$$

$$(-1)^{(m+|m|)/2} \left[\frac{2\lambda+1}{2} \frac{(\lambda-|m|)!}{(\lambda+|m|)!} \right]^{1/2} P_{\lambda m}(\xi) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}$$

ile verilir [1]. Hidrojen atomunun $n = 1, 2$ ve 3 durumları için $\Psi_{n\lambda m}$ dalga fonksiyonlarının tablosu Tablo (1) de verilmiştir.

Tablo 1. $n = 1, 2$ ve 3 için hidrojen atomlarına benzeyen atomların dalga fonksiyonları

n	λ	m	$\Psi_{n\lambda m} \rightarrow$ Denk.(14)
1	0	0	$\Psi_{100} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z}{a_0} \right)^{3/2} e^{-Zr/a_0}$
2	0	0	$\Psi_{200} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \left(\frac{Z}{a_0} \right)^{3/2} \left(2 - \frac{Zr}{a_0} \right) e^{-Zr/2a_0}$
		1	$\Psi_{210} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \left(\frac{Z}{a_0} \right)^{3/2} \frac{Zr}{a_0} e^{-Zr/2a_0} \text{Cos}\theta$
		± 1	$\Psi_{21\pm 1} = \frac{1}{8\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z}{a_0} \right)^{3/2} \frac{Zr}{a_0} e^{-Zr/2a_0} \text{Sin}\theta e^{\pm i\varphi}$
3	0	0	$\Psi_{300} = \frac{1}{81\sqrt{3\pi}} \left(\frac{Z}{a_0} \right)^{3/2} \left(27 - 18 \frac{Zr}{a_0} + 2 \frac{Z^2 r^2}{a_0^2} \right) e^{-Zr/3a_0}$
		1	$\Psi_{310} = \frac{\sqrt{2}}{81\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z}{a_0} \right)^{3/2} \left(6 - \frac{Zr}{a_0} \right) \frac{Zr}{a_0} e^{-Zr/3a_0} \text{Cos}\theta$
		± 1	$\Psi_{31\pm 1} = \frac{1}{81\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z}{a_0} \right)^{3/2} \left(6 - \frac{Zr}{a_0} \right) \frac{Zr}{a_0} e^{-Zr/3a_0} \text{Sin}\theta e^{\pm i\varphi}$
	2	0	$\Psi_{320} = \frac{1}{81\sqrt{6\pi}} \left(\frac{Z}{a_0} \right)^{3/2} \frac{Z^2 r^2}{a_0^2} e^{-Zr/3a_0} (3\text{Cos}^2\theta - 1)$
		± 1	$\Psi_{32\pm 1} = \frac{1}{81\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z}{a_0} \right)^{3/2} \frac{Z^2 r^2}{a_0^2} e^{-Zr/3a_0} \text{Sin}\theta \text{Cos}\theta e^{\pm i\varphi}$
		± 2	$\Psi_{32\pm 2} = \frac{1}{162\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z}{a_0} \right)^{3/2} \frac{Z^2 r^2}{a_0^2} e^{-Zr/3a_0} \text{Sin}^2\theta e^{\pm 2i\varphi}$

Schrödinger denkleminin çözümünden hidrojen atomu için enerji ifadesi;

$$E_n = -\frac{1}{2} \mu c^2 \frac{(Z\alpha)^2}{n^2} \quad (15)$$

şeklinde bulunur. Burada α ince yapı sabitidir ve

$$\alpha = \frac{e^2}{(4\pi\epsilon_0 \eta c)} \quad (16)$$

ile verilir.

Bir elektronlu atomlar için Schrödinger denklemini çözerek elde edilen E_n enerji değerleri Bohr modeliyle tamamen uyuşmaktadır. Bu enerji spektrumu, deneysel spektrumun ana özellikleriyle uyuşur. Bununla birlikte, bu uygunluk tam değildir ve deneysel spektrumun ayrıntılarını açıklamak için çeşitli yaklaşım yöntemleri kullanılır.

(13) eşitliği ile belirtilen hidrojen tipi dalga fonksiyonu ifadesi;

$$|\Psi_{n\lambda m}(r, \theta, \varphi)|^2 dr = \Psi_{n\lambda m}^*(r, \theta, \varphi) \Psi_{n\lambda m}(r, \theta, \varphi) r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi \quad (17)$$

şeklinde yazılırsa, sistem, (n, λ, m) kuantum sayıları ile tanımlanan kararlı bir durumda iken küresel koordinatlarda $dr = r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi$ ile verilen dr hacim elemanında elektronun bulunma olasılığını gösterir. $|\Psi_{n\lambda m}|^2 = \Psi_{n\lambda m}^* \Psi_{n\lambda m}$ büyüklüğü olasılık yoğunluğudur.

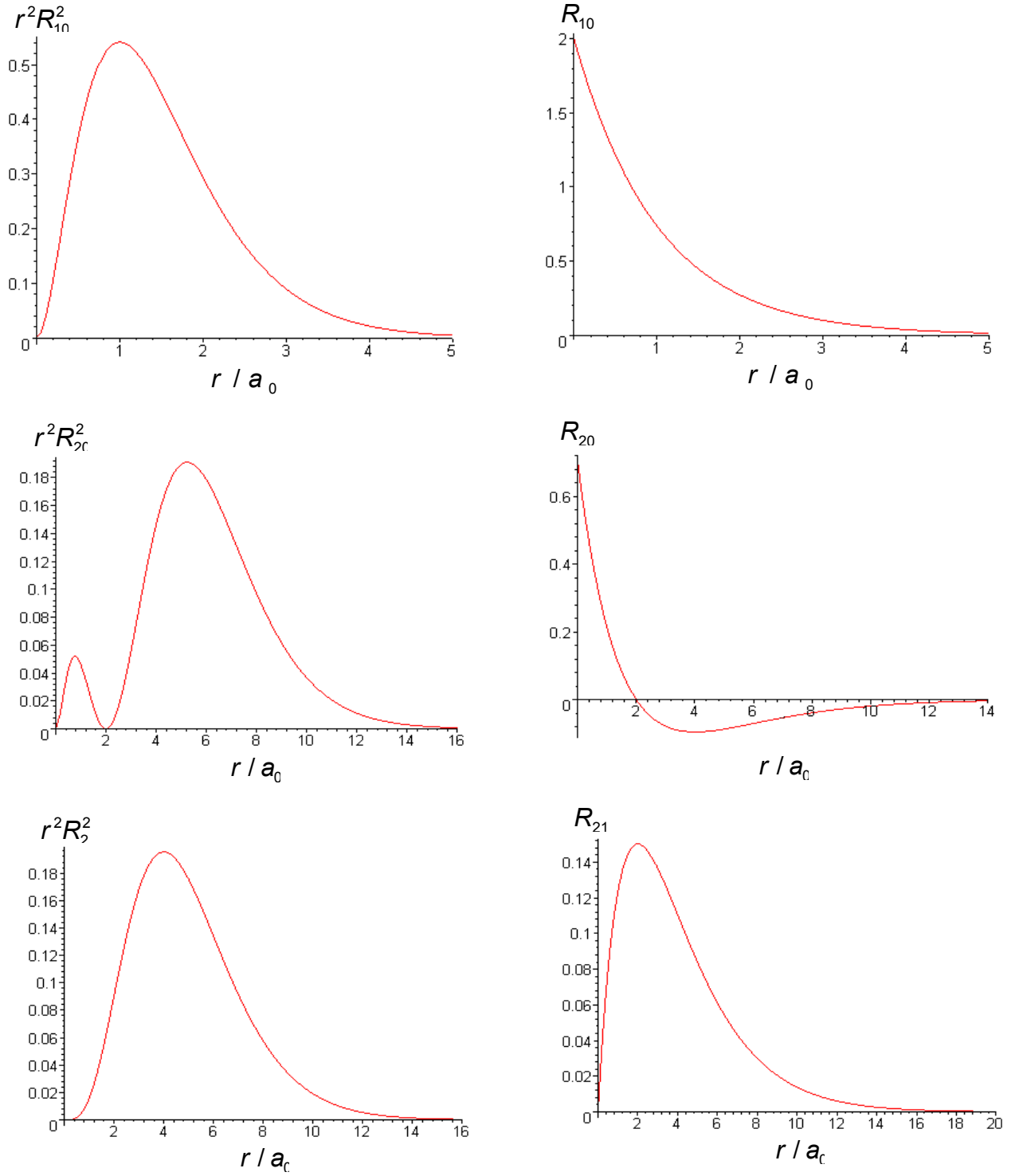
Radyal dağılım fonksiyonu, elektronun çekirdekten r birim uzaklığında birim uzunluk başına bulunma olasılığını verir ve

$$P_{n\lambda}(r) = r^2 |R_{n\lambda}(r)|^2 \quad (18)$$

ile gösterilir. (17) eşitliği θ ve φ açıları üzerinden integre edilir ve (13) eşitliği kullanılırsa;

$$\begin{aligned} P_{n\lambda}(r)dr &= r^2 |R_{n\lambda}(r)|^2 dr \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi |Y_{\lambda m}(\theta, \varphi)|^2 \\ &= r^2 |R_{n\lambda}(r)|^2 dr \end{aligned} \quad (19)$$

ifadesi bulunur. Bu, doğrultudan bağımsız olarak elektronun çekirdekten r ile $r + dr$ uzaklıkları arasında bulunma olasılığını verir [2]. Hidrojen atomunda n 'in ilk iki değeri için $R_{n\lambda}(r)$ radyal özfonksiyonlarının ve $P_{n\lambda}(r)$ radyal dağılım fonksiyonlarının yarıçapla değişimi Şekil (1) de verilmiştir.



Şekil 1. Hidrojen atomunda $n=1$ ve 2 durumları için radyal dağılım fonksiyonlarının ve radyal fonksiyonlarının yarıçapla değişimi

3. Hidrojen Atomunda Enerji Kaymalarının Pertürbasyon Teorisi İle Hesaplanması

Bir hidrojen atomu göz önüne alınıp, Coulomb alanının kaynağı olan protonu, düzgün yüklenmiş R yarıçaplı bir küre olarak kabul edersek Coulomb potansiyel enerjisi;

$$V(r) = -\frac{3e^2}{2R^3} \left(R^2 - \frac{1}{3}r^2 \right) \quad r < R \quad (r \ll a_0) \quad (20)$$

$$V(r) = -\frac{e^2}{r} \quad r > R \quad (21)$$

olarak düşünüp $n = 1$, $\lambda = 0$ durumu ve $n = 2$ durumu için enerji kaymaları hesaplanırken, problem hidrojene benzer bir atom için çözümlü, $Z=1$ yazılırsa hidrojen atomu için çözüm bulunmuş olur ($r < R$). Burada; SI değil, CGS birim sistemi kullanılmaktadır.

Sistemin toplam Hamiltonyeni,

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{Ze^2}{r} + \frac{Ze^2}{r} - \frac{3Ze^2}{2R^3} \left(R^2 - \frac{1}{3}r^2 \right) \quad (22)$$

şeklinde yazılır. Burada;

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} - \frac{Ze^2}{r} \quad (23)$$

$$H_1 = \frac{Ze^2}{r} - \frac{3Ze^2}{2R^3} \left(R^2 - \frac{1}{3}r^2 \right) \quad (24)$$

şeklinde verilir.

$n = 1$, $\lambda = 0$ durumu için birinci dereceden enerji kayması,

$$E_1^{(1)} = \langle \phi_{100} | H_1 | \phi_{100} \rangle \quad (25)$$

formülünden hesaplanır. Bu durum için dalga fonksiyonu Tablo (1) den yazılırsa

$$E_1^{(1)} = \int |\phi_{100}|^2 H_1 d^3r \quad (26)$$

integrali sonucunda;

$$E_1^{(1)} = \frac{2}{5} \mu c^2 \alpha^2 \left(\frac{R}{a_0} \right)^2 \quad (27)$$

bulunur.

$n = 2$ durumu için 4 durum söz konusudur. Bu durumlar, $\phi_{200}^{(1)}$, $\phi_{210}^{(2)}$, $\phi_{211}^{(3)}$, $\phi_{21,-1}^{(4)}$ şeklindedir. $n = 2$ durumu için birinci dereceden enerji kayması;

$$\sum_i \alpha_i \langle \phi_n^j | H_1 | \phi_n^i \rangle = E_n^{(1)} \alpha_j \quad i = 1,2,3,4 \quad (28)$$

ve

$$\langle \phi_n^j | H_1 | \phi_n^i \rangle = h_{ji} \quad j = 1,2,3,4 \quad (29)$$

kullanılarak daha açık şekli;

$$\sum_i \alpha_i h_{ji} = E_n^{(1)} \alpha_j \quad (30)$$

ile ifade edilir. 4 katlı dejenere durum için 4 tane denklem sistemi elde edilir. Bunlar,

$$\begin{aligned} \alpha_1 h_{11} + \alpha_2 h_{12} + \alpha_3 h_{13} + \alpha_4 h_{14} &= E_n^{(1)} \alpha_1 \\ \alpha_1 h_{21} + \alpha_2 h_{22} + \alpha_3 h_{23} + \alpha_4 h_{24} &= E_n^{(1)} \alpha_2 \\ \alpha_1 h_{31} + \alpha_2 h_{32} + \alpha_3 h_{33} + \alpha_4 h_{34} &= E_n^{(1)} \alpha_3 \\ \alpha_1 h_{41} + \alpha_2 h_{42} + \alpha_3 h_{43} + \alpha_4 h_{44} &= E_n^{(1)} \alpha_4 \end{aligned} \quad (31)$$

şeklinde bulunur. Bu denklem sistemi matris formunda yazılırsa;

$$\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{34} \\ h_{41} & h_{42} & h_{43} & h_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = E_n^{(1)} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} \quad (32)$$

elde edilir. (32) denkleminin ilk terim matrisinin matris elemanları,

$$\begin{aligned}
h_{11} &= \langle \phi_{200} | H_1 | \phi_{200} \rangle & h_{21} &= \langle \phi_{210} | H_1 | \phi_{200} \rangle \\
h_{12} &= \langle \phi_{200} | H_1 | \phi_{210} \rangle & h_{22} &= \langle \phi_{210} | H_1 | \phi_{210} \rangle \\
h_{13} &= \langle \phi_{200} | H_1 | \phi_{211} \rangle & h_{23} &= \langle \phi_{210} | H_1 | \phi_{211} \rangle \\
h_{14} &= \langle \phi_{200} | H_1 | \phi_{21,-1} \rangle & h_{24} &= \langle \phi_{210} | H_1 | \phi_{21,-1} \rangle \\
h_{31} &= \langle \phi_{211} | H_1 | \phi_{200} \rangle & h_{41} &= \langle \phi_{21,-1} | H_1 | \phi_{200} \rangle \\
h_{32} &= \langle \phi_{211} | H_1 | \phi_{210} \rangle & h_{42} &= \langle \phi_{21,-1} | H_1 | \phi_{210} \rangle \\
h_{33} &= \langle \phi_{211} | H_1 | \phi_{211} \rangle & h_{43} &= \langle \phi_{21,-1} | H_1 | \phi_{211} \rangle \\
h_{34} &= \langle \phi_{211} | H_1 | \phi_{21,-1} \rangle & h_{44} &= \langle \phi_{21,-1} | H_1 | \phi_{21,-1} \rangle
\end{aligned}$$

şeklinde yazılır ve ayrı ayrı bulunur. Dalga fonksiyonları Tablo (1) den yazılarak;

$$h_{11} = \left(\frac{2e}{Z} \right)^2 \left(\frac{Z^2}{2a_0} \right)^3 \left\{ \frac{1}{10} R^2 - \frac{Z}{24a_0} R^3 + \frac{3Z^2}{560a_0^2} R^4 \right\} \quad (33)$$

$$h_{12} = h_{13} = h_{14} = 0 \quad (34)$$

$$h_{22} = \frac{1}{30} \left(\frac{Z^2}{2a_0} \right)^3 e^2 R^2 \quad (35)$$

$$h_{21} = h_{23} = h_{24} = 0 \quad (36)$$

$$h_{33} = \frac{\pi}{8} \left(\frac{Z^2}{2a_0} \right)^3 e^2 R^2 \quad (37)$$

$$h_{31} = h_{32} = h_{34} = 0 \quad (38)$$

$$h_{44} = \frac{\pi}{8} \left(\frac{Z^2}{2a_0} \right)^3 e^2 R^2 \quad (39)$$

$$h_{41} = h_{42} = h_{43} = 0 \quad (40)$$

sonuçları bulunur. Buna göre sırayla 1.,2.,3. ve 4. durum için enerji kaymaları;

$$E_2^{(1)} = h_{11} \quad E_2^{(1)} = h_{22} \quad E_2^{(1)} = h_{33} \quad E_2^{(1)} = h_{44} \quad (41)$$

olarak bulunur.

4. Sonuçlar ve Tartışma

Hidrojen atomu kuantum mekaniksel olarak çözüldükten sonra radyal fonksiyonların ve radyal dağılım fonksiyonlarının konuma göre değişim grafikleri çizilmiştir. Buna göre Radyal dalga fonksiyonları sadece s durumu için $r = 0$ 'da sıfırdan farklıdır. $P_{n\lambda}(r)$ Radyal dağılım fonksiyonu ise $n - \lambda$ tane maksimum gösterir. Belirli bir n değeri için yörüngesel kuantum sayısı en büyük $\lambda = n - 1$ değerine sahip olduğundan yalnız bir maksimumu vardır ve bu maksimum Bohr modeli ile uyuşur [1].

Schrödinger denkleminin tam olarak çözülebildiği $U(r)$ potansiyel enerjilerinin sayısının az olmasından dolayı hesaplamalar yaklaşım yöntemleri kullanılarak yapılmıştır [3]. Bunun için zamandan bağımsız pertürbasyon teorisi kullanılarak, atomik yapılarda, dejenere ve dejenere olmayan durumlar için enerji kaymaları hesaplanmıştır. Pertürbasyon teorisi kullanılarak elde edilen sonuçlar deneysel sonuçlara daha da yakın değerler bulmamızı sağlar. Bunun yanında, göreceli (rölativistik) etkilerin de hesaba katılması gerekir. Bu tür etkilerin hesaplanması için genellikle Dirac denkleminin çözümleri kullanılır [4,5,6,7].

Kaynaklar

- 1- Eisberg, R., Resnick, R., **Quantum Physics of Atoms, Molecules, Nuclei and Particles**, John Wiley and Sons, Newyork (1974).
- 2- Köksal, F., Gümüş, H., **Atom ve Molekül Fiziği**, Samsun, (1999).
- 3- Gasiorowicz, S., **Quantum Mechanics**, John Wiley and Sons, Inc., New York, (1996)
- 4- Eichen, E., Feinberg, F., **Spin-Dependent Forces in Quantum Chromodynamics**, Phys. Rev. D,23,2724-2744 (1981).
- 5- Esposito, G., Santorelli, P., **Qualitative Properties of the Dirac Equation in a Central Potential**, J. Phys. A, 32,5643-5655 (1999).
- 6- Gülveren, B., Demirtaş, A., Oğul, R., **Solution of the Dirac Equation for a Dirac Particle in a Yukawa Field**, Physica Scripta, 64,277-278 (2001).
- 7- Akhiezer, A. I., Berestetski, V.B., **Quantum Electrodynamics**, Newyork, (1965).