

## Hataları Değişen Varyanslı ve Otokorelasyonlu Lineer Olmayan Regresyonda Parametre Tahmini

İsmail KINACI<sup>1</sup>, Aşır GENÇ<sup>1</sup>

**Özet:** Bilindiği gibi, gerek lineer gerekse lineer olmayan regresyon modellerindeki hata terimlerinin üzerinde bulunan sabit varyanslılık ve otokorelasyon olmaması varsayımlarının bozulması sorunu, yapılacak parametre tahminlerini ve istatistiksel sonuç çıkarımlarını olumsuz yönde etkileyecektir. Bu çalışmada bu sorunun sebepleri, ortaya çıkardığı sonuçlar ve bu sorunun giderilmesine ilişkin yöntemler üzerinde durulmuştur ve günlük Amerikan Doları satış kuru verileri ile ilgili bir uygulama yapılmıştır.

**Anahtar Kelimeler:** Lineer Regresyon, Lineer Olmayan Regresyon, Sabit Varyanslılık, Değişen Varyanslılık, Otokorelasyon

### Parameter Estimation In Nonlinear Regression With Heteroscedastic And Autocorrelated Errors

**Abstract:** As far as known, corrupting the assumptions of homoscedasticity and autocorrelations on error terms in both linear and nonlinear regression models will affect the estimations of parameter values and statistical inference makings. In this study, the reasons and the results of this type of difficulty and the methods related with avoiding these source of problems will be discussed. Also an application of daily rate of American Dollar sales exchange data is given.

**Key Words:** Linear Regression, Nonlinear Regression, Homoscedasticity, Heteroscedasticity, Autocorrelation

#### 1. Lineer Olmayan Modelin Tanıtımı ve Bazı Gösterimler

$Y$  bağımlı değişken,  $X_1, X_2, \dots, X_k$  açıklayıcı (bağımsız) değişkenler ve  $X = (X_1, X_2, \dots, X_k)'$  açıklayıcı değişkenlerin vektörü olmak üzere, lineer olmayan model,

$$Y_i = f(x_i; \theta) + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

---

<sup>1</sup> S.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi İstatistik Bölümü

biçiminde ifade edilir. Burada  $\underline{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)'$  ( $\underline{\theta} \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$ ), bilinmeyen parametre vektörü ve  $f$ ,  $\underline{\theta}$  bilinmeyen parametre vektörünün bileşenlerinin en az birine göre lineer olmayan bir fonksiyondur.  $\varepsilon_i$  gözlenemeyen hata terimi olmak üzere,  $\varepsilon_i$  üzerinde model varsayımları geçerli olsun. Vektör gösterimi ile (1) modeli,

$$\underline{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}, \quad \underline{f}(\underline{\theta}) = \begin{bmatrix} f(\underline{x}_1, \underline{\theta}) \\ f(\underline{x}_2, \underline{\theta}) \\ \vdots \\ f(\underline{x}_n, \underline{\theta}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\underline{\theta}) \\ f_2(\underline{\theta}) \\ \vdots \\ f_n(\underline{\theta}) \end{bmatrix}, \quad \underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}, \quad \underline{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_p \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$\underline{Y} = \underline{f}(\underline{\theta}) + \underline{\varepsilon} \quad (2)$$

şeklinde yazılabilir. Buradaki  $\underline{\theta}$  parametresinin tahmini  $\hat{\underline{\theta}}$ ,

$$Q(\underline{\theta}) = [\underline{Y} - \underline{f}(\underline{\theta})]' [\underline{Y} - \underline{f}(\underline{\theta})] \quad (3)$$

hata kareler toplamını minimum yapan değerdir [1], [2], [3]. Bu minimizasyon Gauss-Newton, Marquardt gibi algoritmalar ile hesaplanabilir.

## 2. Değişen Varyanslılık

Eşitlik (1) ile verilen lineer olmayan regresyon modelinin çözümü için gerekli olan varsayımlardan birisi, model hataları  $\varepsilon_i$ 'lerin her birinin eşit varyanslı (homoskedastik) olmasıdır. Bu varsayımın bozulmasına değişen varyanslılık denir.

Eşit varyanslılık (Homoskedastiklik) varsayımına göre her bir  $\varepsilon_i$  hata teriminin varyansı, bağımsız değişkenlerin verilen değerlerine göre aynı  $\sigma^2$ 'ye eşit bir değerdir. Eşit varyanslılık matematiksel olarak,

$$\text{Var}(\varepsilon_i / \underline{x}_i) = \text{Var}(\varepsilon_i) = E(\varepsilon_i^2) = \sigma^2, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

şeklinde ifade edilir. Buna karşılık değişen varyanslılık durumunda, bağımsız değişkenin aldığı değerler değiştikçe  $\varepsilon_i$  hata terimlerinin dolayısıyla bağımlı değişken  $Y_i$ 'lerin varyansları da değişecektir. Bu durum da,

$$\text{Var}(\varepsilon_i / \underline{x}_i) = \text{Var}(\varepsilon_i) = E(\varepsilon_i^2) = \sigma_i^2, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

şeklinde ifade edilir.

### 2.1. Değişen Varyanslılığın Ortaya Çıkardığı Sonuçlar

Eşit varyanslılık varsayımı geçerli değilse, parametre tahmin edicileri o parametre için etkin değillerdir. Bu sonuç büyük örnekler için de geçerlidir. Yani, parametre tahmin edicileri asimptotik olarak ta etkin değillerdir. Parametre tahmin edicilerinin etkin olmaması nedeniyle, daha önce varyansları tahmin etmek için kullanılan tahmin ediciler ile yapılan tahminler, varyansların olduğundan daha büyük veya daha küçük olarak tahmin edilmelerine neden olabilir. Bu sebeple de, parametreler için yapılacak aralık tahminleri,  $t$  ve  $F$  testleri olumsuz olarak etkilenecektir.

## 2.2. Değişen Varyanslılığın Nedenleri

Değişen varyanslılık zaman serisi verilerinden daha çok yatay kesit verilerinde görülmektedir. Değişen varyanslılık tanımlama hatalarından ilgili değişkenin modelde yer almamasından kaynaklanabilmektedir. Bir diğer nedeni ise, parametrelerin bir veya birkaçının, zaman serisi verileri ile çalışılıyorsa zamana, yatay kesit verileri ile çalışılıyorsa birimlere göre değişim göstermesidir. Regresyon modellerinde parametreler sabit kabul edildiğinden bu durum ve ayrıca bağımlı değişkende yapılan ölçme hataları da değişen varyanslılığa neden olabilmektedir [4], [5], [6].

## 2.3. Değişen Varyanslılığın Belirlenmesi

Bir regresyon modelindeki hata terimlerinin eşit varyansa sahip olup olmadığını artık çizimleri, Spearman'ın sıra korelasyonu testi, White Testi, Ramsey'in Reset testi gibi testlerle belirleyebiliriz [7], [5].

## 2.4. Değişen Varyansın Düzeltilmesi

Eşitlik (1) ile verilen lineer olmayan regresyon modelindeki  $\varepsilon_i$  hatalarının varyansları  $\sigma_i$ 'lerin  $\underline{x}_i$ 'ye bağlı olduğu bilinirse yani,

$$\sigma_i = \frac{\sigma^2}{\psi^2(\underline{x}_i)}$$

ise o zaman ağırlıklı EKK yöntemini kullanarak istenilen tahminleri elde edebiliriz. Burada (1) modelinin yerine,

$$\begin{aligned} y_i^* &= \psi(\underline{x}_i)y_i \\ f^*(\underline{x}_i, \underline{\theta}) &= \psi(\underline{x}_i)f(\underline{x}_i, \underline{\theta}) \\ \varepsilon_i^* &= \psi(\underline{x}_i)\varepsilon_i \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$y_i^* = f^*(\underline{x}_i; \underline{\theta}) + \varepsilon_i^*, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

modelini tahmin etmek yanlış bir yaklaşım olmayacaktır. Bu durumda (4) eşitliği ile verilen yeni modelin hatalarının varyansı,

$$\text{Var}(\varepsilon_i^*) = \text{Var}(\psi(\underline{x}_i)\varepsilon_i) = \sigma^2, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

şeklinde ve istenildiği gibi sabit olacaktır.

## 3. Otokorelasyonlu Hatalar

Herhangi bir devreye ait hata terimi, diğer devrelerin hata terimleri ile ilişkili olabilir. Hata terimlerinin diğer hata terimleri ile olan bu ilişki otokorelasyon olarak adlandırılmaktadır. Hata terimleri arasındaki ilişki genellikle, otoregresif (AR), hareketli ortalama (MA) veya bu iki modelin birleşimi olan otoregresif hareketli ortalama (ARMA) modelleri ile açıklanabilmektedir [8], [9]. Bu çalışmada bu modellerin en genel hali otoregresif hareketli ortalama (ARMA) modelleri ele alınmıştır.

### 3.1. Otokorelasyonun nedenleri

Otokorelasyona; ihmal edilen değişkenler, modelin fonksiyonel biçiminin doğru belirlenmemesi, verilerle ilgili ölçme hataları, tesadüfi olarak ortaya çıkan savaş, kuraklık gibi olayların, etkilerini ortaya çıktıkları dönemlerden sonra da sürdürmesi neden olabilirler [10], Güriş ve [5].

### 3.2. Otokorelasyonun Ortaya Çıkardığı Sonuçlar

Farklı devrelerdeki hata terimleri arasında otokorelasyon olması durumunda EKK tahmin edicileri yine yansız ve tutarlı olmalarına karşın artık bu tahmin ediciler etkin değildirler. Bunun sonucunda alışılagelmiş  $t$  veya  $F$  testlerinin uygulanmaları doğru olmaz. Dolayısıyla düzeltici önlemler gerekir. Çözüm,  $\varepsilon_i$  hata terimindeki karşılıklı ilişkinin niteliğine bağlıdır. Ama  $\varepsilon_i$ 'ler gözlenemediğinden, uygulamada genellikle bunların bir modelden türedikleri varsayılır. Bu model, çoğunlukla bir dönemdeki hata teriminin bir önceki dönemin hata terimine lineer bir biçimde bağlı olduğu AR(1) otoregresif süreci olarak varsayılır [7].

### 3.3. Otokorelasyonun belirlenmesi

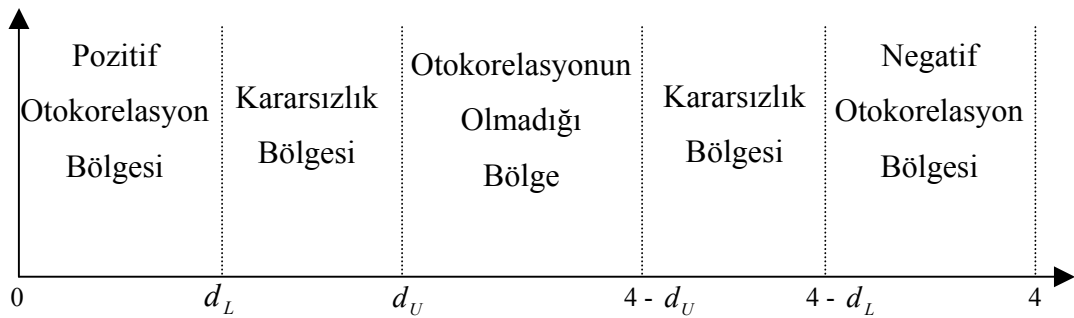
Otokorelasyonun varlığı, modelleri olumsuz yönde etkilemektedir. İstenmeyen bu etkiler, farklı şekillerde ortadan kaldırılmaya çalışılabilir. Fakat otokorelasyonun etkisini ortadan kaldırmaya çalışmadan önce otokorelasyonun varlığını net olarak belirlememiz gerekmektedir. Otokorelasyonun var olup olmadığı, otokorelasyon testleri olarak adlandırılan testler ve ayrıca pratik olarak artık çözümleri ile saptanabilir [4].

#### 3.3.1. Durbin-Watson testi

Uygulamalarda en çok kullanılan otokorelasyon testi Durbin-Watson testidir. Durbin ve Watson tarafından birinci derece otokorelasyon için ortaya atılmıştır. Temel hipotezi otokorelasyon olmamasını ( $\rho=0$ ) ifade eden Durbin-Watson test istatistiği, EKK hata terimi  $e_i$ 'ler ile,

$$d = \frac{\sum_{i=2}^n (e_i - e_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^n e_i^2} \quad (5)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Durbin-Watson testinde diğer testlerdeki gibi tek bir tablo değeri yerine  $d_L$  ve  $d_U$  olmak üzere iki değer söz konusu olduğundan, karar yukarıdaki testlerden farklı olarak aşağıdaki Şekil 1 üzerinde verilir.



Şekil 1. Durbin-Watson testi karar tablosu

Bu durumda Şekil 1'e göre otokorelasyon hususunda hesaplanan  $d$  değerinin düştüğü bölgeye bakılarak karar verilebilir. Burada,  $d_L$  ve  $d_U$  değerleri belirlenen  $\alpha$  hata payı ile Durbin-Watson tablosundan bulunur [6], [7], [5].

### 3.4. Otokorelasyonun düzeltilmesi

Açıkladığımız otokorelasyon testleri ile otokorelasyonun varlığına karar verilirse model, daha önce açıkladığımız şekilde etkilenecektir. Otokorelasyonun bu olumsuz etkilerinin ortadan kaldırılması için ilk önce otokorelasyonun yapısının belirlenmesi gerekmektedir. Burada bu ilişkinin yapısının otoregresif hareketli ortalama (ARMA) modeli şeklinde olması durumunda parametre tahmininin nasıl yapılacağı üzerinde durulacaktır.

Otoregresif ve hareketli ortalama modellerinin birleştirilmesinden elde edilen  $p$  ve  $q$  dereceden otoregresif hareketli ortalama modeli ARMA( $p,q$ ) ile gösterilir ve

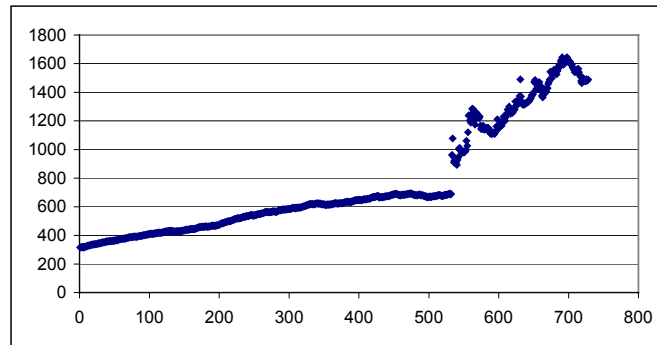
$$\varepsilon_i - \sum_{r=1}^p \phi_r \varepsilon_{i-r} = a_i - \sum_{s=1}^q \beta_s a_{i-s} \quad (6)$$

şekline ifade edilir. AR yada MA modelini kullanarak çok sayıda parametreyi gerektiren veriler, bir ARMA modeli kullanılarak sadece birkaç parametre ile modellenebilir. Genelde, modelde çok sayıda parametrenin bulunması tahminde etkinliği azaltır [11], [12].

Hata terimlerinin ilişki yapısının ARMA modeli şeklinde olması durumunda Koşullu EKK veya İki Aşamalı tahmin yöntemi kullanılabilir [8], [12], [13].

## 4. Uygulama

Bu çalışmada T.C. Merkez Bankası'nın (TCMB) web sayfasından alınan 04.01.1999-03.12.2001 tarihleri arasındaki günlük Amerikan doları satış kuru verileri kullanılmıştır. Verilerin zamana göre serpilme diyagramı grafiği Şekil 2'deki gibidir.



Şekil 2. Zamana göre dolar satış kurları

Zamana karşı Amerikan Dolarının satış kurundaki değişimi açıklayan bir lineer olmayan modelin kurulması amaçlanmıştır. Bu modelin parametreleri tahmin edildikten sonra, model varsayımlarından varyansın sabit olması ve otokorelasyon olmaması varsayımlarının geçerli olup olmadığı ayrı ayrı incelenmiştir. Bu varsayımların geçerli olmadığı durumlarda, modeldeki değişkenler üzerinde gerekli dönüşümler yapılarak bu durum ortadan kaldırılmaya çalışılmıştır. Bu bölümdeki tüm hesaplamalar için SPSS, MINITAB ve Curve Expert paket programları kullanılmıştır.

TCMB'ndan alınan günlük dolar satış kurlarına ilişkin lineer olmayan model,

$$y_t = \frac{1}{\theta_1 + \theta_2 x_t^{\theta_3}} + \varepsilon_t \quad (7)$$

şeklinde kurulmuştur. Bu model Harris modeli olarak bilinir [8]. Burada,  $y_t$  günlük dolar satış kurlarını ve  $x_t$  zamanı göstermektedir. Bu modele ilişkin parametre tahmin sonuçları ve bu parametreler için hata payı  $\alpha=0.05$  olan güven aralıkları Tablo 1'deki gibi elde edilmiştir.

**Tablo 1.** Parametre tahminleri

Parametre	Parametre Tahminleri	Standart Hatalar	t-Değeri	p-Değeri
$\theta_1$	0.0029782 [0.002978 , 0.002979]	2.55926E-07	11637	0.000
$\theta_2$	-0.0000125 [-1.3E-05 , -1.2E-05]	2.50212E-09	-5010	0.000
$\theta_3$	0.7984016 [0.79837 , 0.79844]	1.82830E-05	43669	0.000
S = 85.41				

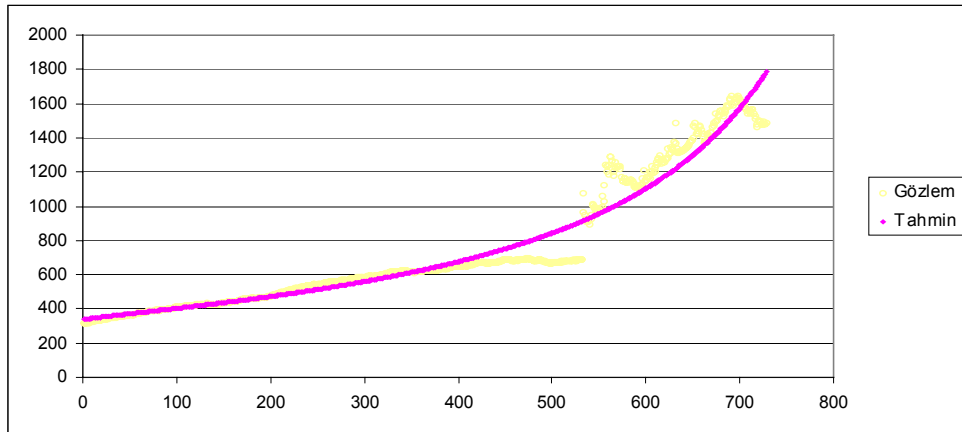
Tablo 1'de yer alan parametre tahmin sonuçlarına göre, model (7) ile verilen lineer olmayan regresyon modelinin bireysel parametrelerinin her biri için,

$$H_0 : \theta_i = 0$$

$$H_1 : \theta_i \neq 0 \quad , \quad i=1,2,3$$

hipotezi  $\alpha=0.05$  hata payı ile test edildiğinde,  $H_0$  hipotezi  $i=1,2,3$  için reddedilmektedir ve her bir parametre istatistiksel olarak anlamlı bulunmaktadır.

Tablo 1 yardımıyla elde edilen  $\hat{y}_t$  tahmin değerlerinin ve  $y_t$  gözlem değerlerinin zamana göre serpilme diyagramı Şekil 3'de verildiği gibi elde edilmiştir.



**Şekil 3.** Gözlem ve tahmin değerlerinin zamana göre serpilme diyagramı

Şekil 3'den, serpilme diyagramının tam bir büyüme modeli olduğu görülmektedir. Ancak Curve Expert programına göre bu verilere en uygun eğri tipi Harris büyüme modelidir.

Şimdi (7) ile verilen modelde değişen varyanslılık ve otokorelasyon sorunlarının varlığını araştıralım.

- **Değişen varyanslılığın araştırılması**

Sabit varyanslılık varsayımının geçerli olup olmadığı Spearman'ın sıra korelasyon testi ile incelenmiş, hata terimleri ile (7) ile verilen modeldeki  $x$  bağımsız değişkeni arasındaki sıra korelasyon katsayısı ve buna ilişkin  $p$ -değeri,

$$r_s = 0.195 \quad , \quad p\text{-değeri}=0.000$$

olarak elde edilmiştir.  $p$ -değeri,  $\alpha=0.05$  değerinden küçük olduğu için bu sıra korelasyon katsayısı anlamlıdır. Böylece, hata terimleri ile  $x$  bağımsız değişkeni arasındaki sıra otokorelasyon katsayısı anlamlı olduğundan, hata terimleri üzerindeki sabit varyanslılık varsayımının geçerli olmadığı yani değişen varyanslılık sorunun olduğunu söyleyebiliriz.

Bu değişen varyanslılık sorununu giderebilmek için, hata terimlerinin varyansı  $\sigma_i^2$  ile  $\sigma^2$  arasında,

$$\sigma_i^2 = \sigma^2 \hat{y}_i^2$$

şeklinde bir ilişkinin olduğunu düşünelim. Burada  $\hat{y}_i$ , (7) modelinden elde edilen tahmin değerleridir. Bu durumda bu değişen varyanslılık sorununu ortadan kaldırabilmek için (7) modelinin her iki tarafının  $\hat{y}_i$  ile bölünmesi gerekmektedir. O zaman (7) modeli,

$$\frac{y_i}{\hat{y}_i} = \frac{1}{(a + bx_i^c)\hat{y}_i} + u_i \quad (8)$$

şekline dönüşecektir. Bu modele ilişkin parametre tahmin değerleri

$$\hat{a} = -0.141684 \quad , \quad \hat{b} = 0.149085 \quad , \quad \hat{c} = -0.006918$$

olarak elde edilmiştir. Modeldeki  $u_i$  hata terimlerinde hala değişen varyanslılık sorununun olup olmadığı Spearman'ın sıra korelasyonu testine göre incelendiğinde hesaplanan test istatistiği ve buna karşılık gelen  $p$ -değeri,

$$r_s = -0.063 \quad , \quad p\text{-değeri} = 0.091$$

olarak elde edilmiştir. Bu sonuçlara göre  $p$ -değeri,  $\alpha=0.05$  değerinden daha büyük olduğu için sıra korelasyon değeri istatistiksel olarak anlamsızdır yada değişen varyanslılık sorunu yoktur.

- **Otokorelasyonun araştırılması**

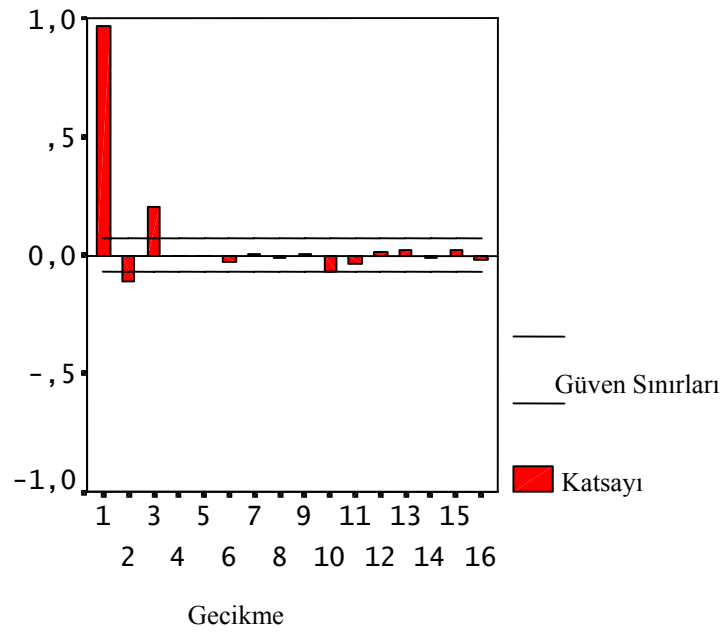
Şimdi (7) ile verilen model için diğer bir varsayım olan otokorelasyon olmaması varsayımının geçerliliğini, Durbin-Watson testi ile araştıralım.

Model (7) için tahmin sonuçları Tablo 1'de verilmişti. Bu tahmin değerleri sonucunda elde edilen artıklara ilişkin Durbin-Watson test istatistiği  $d$  'nin değeri ve  $\alpha=0.05$  için  $d_L$  kritik değeri sırasıyla  $d=0.0478$  ,  $d_L \cong 1.7$  olarak hesaplanmıştır. Bu sonuçlara göre  $d < d_L$  olduğundan hata terimlerinin otokorelasyonlu olduğu sonucuna varılır.

Otokorelasyonun varlığını ve yapısını belirleyebilmek için (7) modelinden elde edilen artıkların kısmi otokorelasyon fonksiyonunun (PACF) grafiğinden yararlanılabilir. Model (7)'in artıklarına ilişkin kısmi otokorelasyon katsayıları Tablo 2'da ve kısmi otokorelasyon fonksiyonunun grafiği Şekil 4'daki gibidir.

**Tablo 2.** Kısmi otokorelasyon katsayıları

Gecikme ( $i$ )	Kısmi otokorelasyon katsayısı ( $\phi_i$ )	Gecikme ( $i$ )	Kısmi otokorelasyon katsayısı ( $\phi_i$ )
1	0.968	9	0.003
2	-0.111	10	-0.069
3	0.201	11	-0.038
4	-0.004	12	0.011
5	0.000	13	0.017
6	-0.025	14	-0.011
7	0.003	15	0.025
8	-0.012	16	-0.022



**Şekil 4.** PACF'nin grafiği

Bu grafiğe bakıldığında 3 gecikmeden sonraki kısmi otokorelasyon katsayıları güven sınırlarının içinde kaldığı görülmektedir. Bu da hata terimlerinin, AR(3) süreci şeklinde bir ilişkiye sahip olduğu hakkında bir fikir verebilir. Bu durumda hata terimi,  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$  sırayla 1., 2., ve 3. gecikmelere karşılık gelen kısmi otokorelasyon katsayıları olmak üzere,



$$\varepsilon_t = \phi_1 \varepsilon_{t-1} + \phi_2 \varepsilon_{t-2} + \phi_3 \varepsilon_{t-3} + a_t \quad (9)$$

biçimindedir. Buradan hareketle modelimiz

$$g(x_t; \theta) = f(x_t; \theta) - \hat{\phi}_1 f(x_{t-1}; \theta) - \hat{\phi}_2 f(x_{t-2}; \theta) - \hat{\phi}_3 f(x_{t-3}; \theta)$$

$$z_t = y_t - \hat{\phi}_1 y_{t-1} - \hat{\phi}_2 y_{t-2} - \hat{\phi}_3 y_{t-3}$$

dönüşümleri ile

$$z_t = g(x_t; \theta) + a_t, \quad t = 4, 5, \dots, 728 \quad (10)$$

şeklinde ifade edilir. Böylece modelimiz açık bir ifade ile

$$y_t - \hat{\phi}_1 y_{t-1} - \hat{\phi}_2 y_{t-2} - \hat{\phi}_3 y_{t-3} = \frac{1}{\theta_1 + \theta_2 x_t^{\theta_3}} - \hat{\phi}_1 \frac{1}{\theta_1 + \theta_2 x_{t-1}^{\theta_3}} - \hat{\phi}_2 \frac{1}{\theta_1 + \theta_2 x_{t-2}^{\theta_3}} - \hat{\phi}_3 \frac{1}{\theta_1 + \theta_2 x_{t-3}^{\theta_3}} + a_t \quad (11)$$

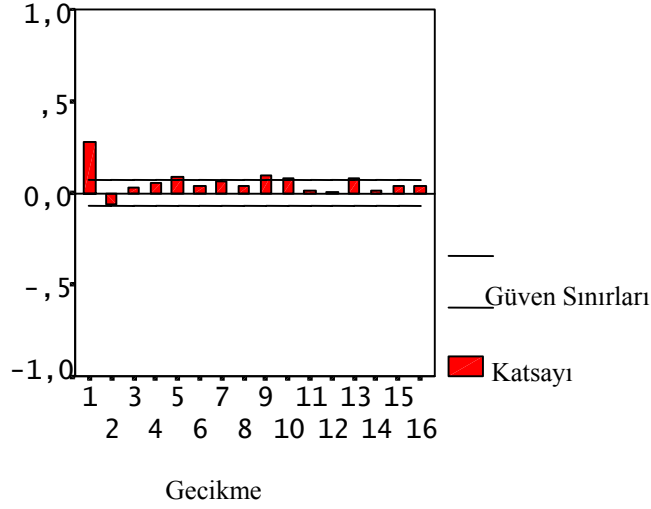
şeklinde ifade edilecektir. Ayrıca buradaki yeni hata terimi  $a_t \sim b.a.d. N(0, \sigma_a^2)$  dir. Bu durumda yeni lineer olmayan modelimiz, lineer olmayan EKK yöntemi ile tahmin edilebilir.  $\hat{\phi}_1 = 0.968, \hat{\phi}_2 = -0.111$  ve  $\hat{\phi}_3 = 0.201$  değerleri (11) eşitliğinde yerine konmasıyla elde edilen modelin iki aşamalı koşullu EKK yöntemi ile parametre tahmin değerleri

$$\hat{\theta}_1 = 0.26403, \hat{\theta}_2 = -0.25428, \hat{\theta}_3 = 0.00538$$

şeklinde elde edilmiştir. Bu sonuçlara göre hesaplanan (11) modelinin artık terimlerine ilişkin kısmi otokorelasyon katsayıları Tablo 3'de ve kısmi otokorelasyon fonksiyonunun grafiği Şekil 5'deki gibidir.

**Tablo 3.** Kısmi otokorelasyon katsayıları

Gecikme ( $i$ )	Kısmi otokorelasyon katsayısı ( $\phi_i$ )	Gecikme ( $i$ )	Kısmi otokorelasyon katsayısı ( $\phi_i$ )
1	0.279	1	0.094
2	-0.061	2	0.078
3	0.032	3	0.015
4	0.058	4	0.007
5	0.085	5	0.075
6	0.040	6	0.014
7	0.065	7	0.039
8	0.037	8	0.037



**Şekil 5.** Dönüşümlü modelin PACF grafiği

Şekil 5’den de görüldüğü gibi (11) dönüşümlü modelinin hata terimleri arasında hala birinci dereceden otoregresif bir ilişki bulunmaktadır. Yani,

$$a_t = \phi a_{t-1} + v_t, \quad t = 5, 6, K, 728$$

şekindedir. Buradaki yeni hata terimi  $v_t \sim b.a.d. N(0, \sigma_v^2)$  dir. Bu durumda (11) modeline yeniden bir dönüşüm yapmamız gerekmektedir. Bu dönüşümü,

$$z_t = y_t - 0.968y_{t-1} + 0.111y_{t-2} - 0.201y_{t-3}$$

$$g(x_t, \underline{\theta}) = \frac{1}{\theta_1 + \theta_2 x_t^{\theta_3}} - 0.968 \frac{1}{\theta_1 + \theta_2 x_{t-1}^{\theta_3}} + 0.111 \frac{1}{\theta_1 + \theta_2 x_{t-2}^{\theta_3}} - 0.201 \frac{1}{\theta_1 + \theta_2 x_{t-3}^{\theta_3}}$$

olmak üzere,

$$m_t = z_t - \hat{\phi} z_{t-1}, \quad t = 5, 6, K, 728 \quad (12)$$

$$h(x_t, \underline{\theta}) = g(x_t, \underline{\theta}) - \hat{\phi} g(x_{t-1}, \underline{\theta})$$

şeklinde tanımlayabiliriz. Buradaki  $\hat{\phi}$ , Tablo 3’deki birinci gecikmeye karşılık gelen kısmi otokorelasyon katsayısıdır. (12) ile verilen dönüşümler altında (11) modeli,

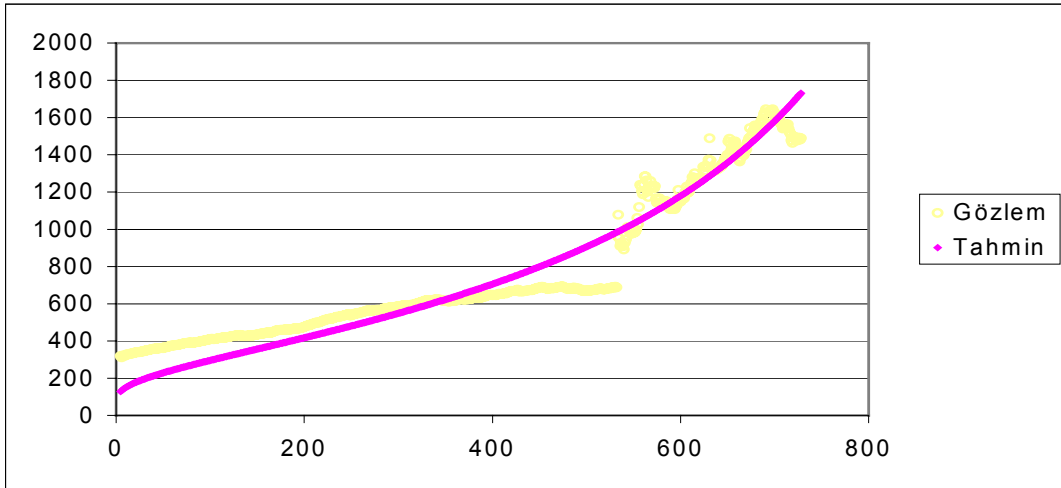
$$m_t = h(x_t, \underline{\theta}) + v_t \quad (13)$$

biçiminde yeniden yazılabilir. Bu modelin parametrelerine ilişkin tahmin sonuçları Tablo 4’deki gibi elde edilmiştir.

**Tablo 4.** Parametre tahminleri

Parametre	Parametre Tahminleri	Standart Hatalar	t-Değeri	p-Değeri
$\theta_1$	-0.13002517 [-0.130031 , -0.130018]	3.46725E-06	-37500	0.000
$\theta_2$	0.14015734 [0.140157 , 0.140158]	3.21947E-07	435342	0.000
$\theta_3$	-0.01071305 [-0.011107 , -0.010319]	2.01046E-04	-53	0.000
<b>S=109.77</b>				

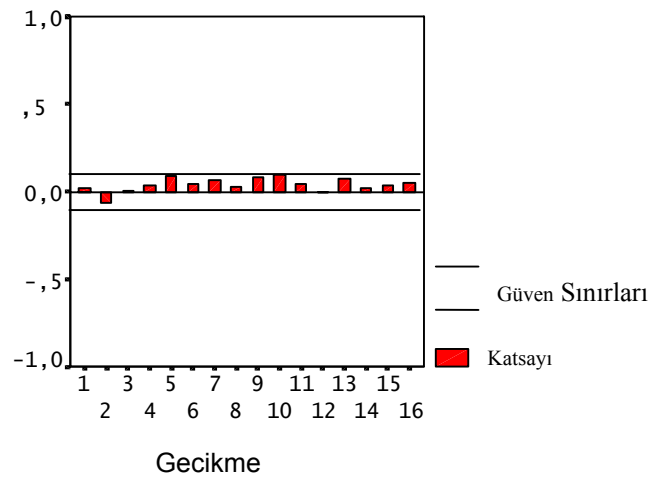
Tablo 4'ye göre modeldeki tüm parametreler %95 anlam seviyesinde istatistiksel olarak anlamlıdır. Elde edilen bu parametre tahminleri için, gözlem değerlerinin ve  $\hat{y}_t$  tahmin değerlerinin zamana göre serpilme diyagramı Şekil 6'de ve artık değerlerinin tahmin değerlerine göre serpilme diyagramı ise Şekil 3.13'deki gibi elde edilmiştir.

**Şekil 6.** Gözlem ve tahmin değerlerinin zamana göre serpilme diyagramı

Tablo 4'de verilen parametre tahmin sonuçlarına göre hesaplanan (13) modelinin artık terimlerine ilişkin kısmi otokorelasyon katsayıları Tablo 5'de ve kısmi otokorelasyon fonksiyonunun grafiği Şekil 7'de verildiği gibidir.

**Tablo 5.** Kısmi otokorelasyon katsayıları

Gecikme ( $i$ )	Kısmi otokorelasyon katsayısı ( $\phi_i$ )	Gecikme ( $i$ )	Kısmi otokorelasyon katsayısı ( $\phi_i$ )
1	0.019	1	0.083
2	-0.064	2	0.097
3	0.000	3	0.040
4	0.035	4	-0.002
5	0.085	5	0.071
6	0.046	6	0.023
7	0.069	7	0.036
8	0.031	8	0.054



**Şekil 7.** Kısmi otokorelasyon fonksiyonunun grafiği

Şekil 7'den de anlaşılacağı gibi bütün kısmi otokorelasyon katsayıları güven sınırlarının içinde kalmaktadır. Bu da hata terimlerinin otokorelasyonsuz olduğunun bir göstergesidir. Dolayısıyla Tablo 4 ile verilen parametre tahmin değerleri otokorelasyonsuz tahminlerdir.

## 5. Sonuç

Regresyon analizinde, gerek lineer gerekse lineer olmayan hipotez modellerinde, modeldeki hata terimlerinin ya ilişkili olmasından ya da değişen varyanslı olmasından dolayı,

tahmin ve sonuç çıkarım problemlerinde bazı güçlükler ortaya çıkmaktadır. Lineer olmayan regresyon analizinde, tahmin ediciler analitik olarak elde edilemediği için tahmin ve hipotez testi problemlerinde asimptotik ifadelerden ve lineer yaklaşımlardan faydalanılmaktadır.

Yapılan uygulamada günlük Amerikan Doları satış kuru verileri için kurulan ve Harris modeli olarak bilinen, lineer olmayan regresyon modelinin Marquardt yöntemiyle elde edilen tahminleri de iyi sonuçlar vermiştir. Ancak bu modelde hem değişen varyanslılık hem de hataların AR(3) yapısında otokorelasyonlu oldukları tespit edilmiştir. Modeldeki değişen varyanslılık sorunu, modelin her iki tarafı, tahmin değerlerine bölünerek giderilmiştir. Modeldeki otokorelasyon sorunu ise, ilk modelin artıklarından elde edilen kısmi otokorelasyon katsayıları ile modele, üç gecikmeli fark dönüşümü yapılarak yok edilmeye çalışılmıştır. Ancak bu yöntem sonucunda elde edilen artıkların, beklenenin aksine hala birinci dereceden otokorelasyonlu oldukları tespit edilmiştir. Bunun sebebi, ilk modeldeki gerçek hata yapısının AR(3) yapısına uygun olmaması olabilir. İlk modele üç gecikmeli fark uygulandıktan sonra modelde hala birinci dereceden otokorelasyon olduğu tespit edilmiştir. Bu yapıya uygun ilişkiyi ortadan kaldırmak için, dönüşümlü modelin artıklarından elde edilen birinci kısmi otokorelasyon katsayısı kullanılarak dönüşümlü modele bir kez daha fark yöntemi uygulandı. Bu işlemler sonucunda elde edilen son modele ilişkin artıklar incelendiğinde, modelde otokorelasyon sorununun kalmadığı görülmüştür.

Sonuç olarak, hem lineer hem de lineer olmayan regresyon modellerindeki otokorelasyon sorunu, modele otokorelasyonun derecesi kadar fark dönüşümü yapılarak giderilebilir. Bu dönüşümler sonunda bu sorunun ortadan kalkmaması, hata yapısının ilk başta kabul edilen yapıya uygun yapıda olmamasını işaret etmektedir.

## KAYNAKLAR

- 1- Gallant, A.R., 1987, Nonlinear Statistical Models, John Wiley & Sons, Usa.
- 2- Bates, D.M., Watts, D.G., 1988, Nonlinear Regression Analysis and It's Applications, John Wiley& Sons, Usa.
- 3- Genç, A., 1997, Çok Değişkenli Lineer Olmayan Modeller: Parametre Tahmini ve Hipotez Testleri, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Doktora tezi.
- 4- Erar, A., 1985, "Bağlanım (Regresyon) Çözümlemesi Ders Notları", mimograf, Ankara.
- 5- Güriş, S., Çağlayan, E., 2000, Ekonometri Temel Kavramlar, Der Yayınları, İstanbul.
- 6- Akkaya, Ş., Pazarlıoğlu, M.V., 1995, Ekonometri I, (3. Baskı), İzmir.
- 7- Gujarati, D., 1992, Basic Econometrics, McGraw-Hill, New York.
- 8- Seber, G.A.F., Wild, C.J., 1989, Nonlinear Regression, John Wiley & Sons, Usa.
- 9- Chatfield, C., 1989, The Analysis of Time Series an Introduction, Chapman and Hall, New York.
- 10- İşyar, Y., 1999, Ekonometrik Modeller, Uludağ Üniversitesi Güçlendirme Vakfı Yayın No:141, Bursa.
- 11- Wei, W.W.S., 1990, Time Series Analysis, Addison-Wesley Publishing Company, New York.
- 12- Gallant, A.R., Goebel, J.J., 1979, " Nonlinear Regression With Autocorrelated Errors", Jasa, Vol.71, P.961-967.

- 12- **Pierce, D.A.**, 1971a, "Least Square Estimation in the Regression Model With Autoregressive-Moving Average Errors", *Biometrika*, 58, 299-312.
- 13- **Pierce, D.A.**, 1971b, "Distribution of Residual Autocorrelations in the Regression Model With Autoregressive Moving Average Errors", *Journal of the Royal Statistical Society, Ser.B*, 33, 140-146.