S Ü Fen Ed Fak Fen Derg Sayı 28 (2006) 1- 12, KONYA

Bayesci Yöntemin Kredibilite Teorisinde Kullanılması Üzerine Bir Çalışma

Meral EBEGİL[1]

Gazi Üniv. Fen Edeb. Fak. İstatistik Bölümü, Beşevler ANKARA

Özet: Bühlmann ve Bühlmann-Straub kredibilite modelleri, kayıp hata kare fonksiyonunun en küçüklenmesi anlamında Bayesci prim değerinin, en iyi doğrusal yaklaşımlarıdır. Buradan hareketle, bu çalışmada Bayesci yöntem ile Bühlmann kredibilite modeli arasındaki ilişki öncelikle kuramsal olarak ortaya konulmuş ve daha sonra, bu kuramsal yapı, örnekler ile açıklanmaya çalışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Bayesci Yaklaşım, Kredibilite Teorisi, Bühlmann Modeli

A Study on Using Bayesian Method in Credibility Theory

Abstract: Bühlmann and Bühlmann-Straub credibility models are the best linear approximation to the Bayesian Premium in the sense of minimizing the squared error loss function. Hence, in this study firstly relationship between Bayesian method and Bühlmann credibility model are shown theoretically. Then this theoretical structure is tried to explain by examples.

Key Words: Bayesian Approach, Credibility Theory, Bühlmann Model

1. Giriş

Kredibilite teorisinin tarihi gelişimine bakıldığında, Bayesci (Bayesian) yaklaşımın kredibilite teorisinin temelini oluşturduğu görülmektedir. Bayesci yaklaşımın kredibilite teorisinde kullanılması Arthur Bailey (1945 ve 1950) yıllarındaki çalışmalarıyla başlamıştır [1,2]. Daha sonra 1980'li yılların sonunda ve 1990'lı yılların başında, modern ve yüksek hızlı bilgisayarların gelişmesiyle Bayesci yaklaşım yavaş yavaş kredibilite teorisinin temeline oturmuştur. Kredibilite teorisi Bayes üzerine kurulmuş bir teoridir.

Seçilen bir model için, Bayesci istatistiksel analiz önce elde mevcut bilgilerin ve varsayımların durumunu tespit etmekle başlar. Bu önsel bilgiler daha sonra gözleme dayanan verilerden elde edilen ve olabilirlik fonksiyonu yoluyla olasılıksal olarak niceliksel hale getirilen bilgilerle birleştirilir. Önsel bilgiler ile olabilirliğin birleştirilmesi Bayes yaklaşımını oluşturur. İstatistiksel bir ifadeyle, sonsal (posterior) olasılık fonksiyonu, önsel (prior) ve olabilirliğin çarpımları ile orantılıdır. Yani,

Sonsal $\propto$ *Önsel* $\times$ *Olabilirlik*

[1] E-mail: mdemirel@gazi.edu.tr

şeklinde ifade edilebilir. Kredibilite teorisi, son dönem verileri ile geçmiş veriler arasında dengeli bir paylaştırma yapmak amacıyla kullanılmaktadır. İstatistiksel olarak, geçmiş verileri son dönem verileriyle güncelleyerek bu paylaştırma işini amaca uygun şekilde gerçekleştirebilecek en iyi yöntem Bayesci yaklaşımdır. Bu yüzden, bir çok kredibilite modeli Bayesci yöntem kullanılarak türetilmektedir. Böylece kredibilite teorisinin amacına uygun modeller oluşturmak mümkün olmaktadır. Sigorta uygulamalarında kredibilite'nin Bayesci modellemesi olan, klasik kredibilite (the Greatest Accuracy Credibility) modellerinden, Bühlmann modeli Bayesci yönteme dayalı olarak oluşturulmaktadır [3]. Bühlmann modeli, kayıp hata kare fonksiyonunun en küçüklenmesi anlamında Bayesci primin (veya en küçük kareler kredibilite primi) en iyi doğrusal yaklaşımıdır. Bu noktadan hareketle, öncelikle Bayesci yaklaşım üzerinde durulacak ve daha sonra Bühlmann modelinin, Bayesci yaklaşımla olan ilişkisi kuramsal olarak verilmeye çalışılacaktır. Son olarak, kuramsal olarak gösterilen bu ilişki iki örnekle desteklenecektir.

2. Bayesci Yöntem

Aktüerya literatüründe, Bayesci yaklaşım ile kredibilite teorisi arasında bir bağlantı kurulmuştur [3]. *Schnieper (1995)* kredibilite faktörünün tahmini için Bayesci bir yaklaşım sunmuştur [4]. Ayrıca, aktüerya biliminde önerilen çeşitli yaklaşık çözüm yöntemlerine Bayesci analiz getirilmiş ve Bayesci hesaplama teknikleri konusunda son gelişmeler ele alınmıştır [5].

Bayesci olasılık teorisinde sonsal olasılık bir olayın veya önermenin deneysel (ampirik) veriler de dikkate alınarak bulunan şartlı olasılığıdır. Önsel olasılık ile karşılaştırıldığında, önsel olasılık deneysel bilgi olmaksızın hesaplanan ya da önceden var olan bilgi ve verileri kullanarak bulunan olasılıktır. Sonsal olasılık, Bayes yaklaşımı kullanılarak önsel olasılıktan ve olabilirlikten hesap edilebilir. Geçmişten geleceğe olan bu süreç Bayesci öğrenme olarak isimlendirilir. Bu ifade şu prensibi vurgular, güncele ilişkin bilgi, önsel ile mevcut verilerin bir birleşimidir.

Bu genel bilgiden sonra, kredibilite için Bayesci yaklaşıma kısaca bir giriş yapılabilir. Varsayalım ki yığın içinde risk karakteristiklerinin dağılımı $\pi(\theta)$ ile temsil edilsin. Ayrıca, risk parametresi θ olan herhangi bir sigortalının deneyimi, θ değeri verilmişken, hasarların veya kayıpların koşullu dağılımı $f_{Y/\Theta}(y/\theta)$ olsun. Herhangi bir sigortalı için $Y=y$ gözlemi yapılmışken, Y_{n+1} dönemi için bir fiyatlandırma yapılacak olsun. Sigortalı için risk parametresi θ olmak üzere, sigortalının farklı riske maruz kalma dönemlerine karşılık gelen deneyimleri de birbirinden bağımsız olsun. İstatistiksel ifadeyle, θ koşulu altında hasarlar veya kayıplar, yani $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n, Y_{n+1}$' ler birbirlerinden bağımsız olsunlar.

Y_t' nin koşullu olasılık fonksiyonu,

$$f_{Y_t/\Theta}(y_t/\theta); \qquad t=1,2,\cdots,n,n+1 \tag{2.1}$$

şeklinde ifade edilir. Buradaki amaç, aynı sigortalının θ değerinden değişiklik göstermediği varsayımı altında *n+1*'nci dönemde geçmiş hasar bilgisinden yararlanarak Y_{n+1}'in kestirilebilmesi için Y_{n+1}'in, $\Theta=\theta$ verilmişken koşullu dağılımının elde edilmesidir. Şayet θ biliniyor olsaydı, $f_{Y_{n+1}/\Theta}(y_{n+1}/\theta)$ kullanılabilirdi. Söz konusu sigortalı için θ bilinmiyor olmasına karşın *y* değeri bilinmektedir. Bu durumda koşulun θ'ya değil, *y*'ye bağlı olarak ele alınması uygun olacaktır. Sonuç olarak, $Y=y$ verilmişken Y_{n+1}'in koşullu dağılımının bulunması uygun olur. Bu dağılıma kestirici dağılım *(predictive distribution)* adı verilir. Kestirici dağılım, sonsal dağılım üzerinden $y_1, y_2, \cdots, y_n$ koşulu altında y_{n+1}'e ilişkin yoğunluk fonksiyonunun beklenen değeri olarak tanımlanabilir. Koşullu bağımsızlık verilmişken $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n, \Theta$ 'nin ortak dağılımı,

$$\begin{aligned} f_{Y,\Theta}(y,\theta) &= f_{Y/\Theta}(y/\theta)\pi(\theta) \\ &= f(y_1,y_2,\cdots,y_n/\theta)\pi(\theta) = \left[\prod_{t=1}^{n} f_{Y_t/\Theta}(y_t/\theta)\right]\pi(\theta) \end{aligned} \tag{2.2}$$

olarak elde edilir. *Y*'nin marjinal dağılımı,

$$f_Y(y)=\int f_{Y,\Theta}(y,\theta)d\theta=\int\left[\prod_{t=1}^{n}\left[f_{Y_t/\Theta}(y_t/\theta)\right]\right]\pi(\theta)d\theta \qquad (2.3)$$

olur. Bu durumda $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n,Y_{n+1}$' in ortak dağılımı,

$$f_{Y_1,Y_2,\cdots,Y_n,Y_{n+1}}(y_1,y_2,\cdots,y_n,y_{n+1})=\int\left[\prod_{t=1}^{n+1}\left[f_{Y_t/\Theta}(y_t/\theta)\right]\right]\pi(\theta)d\theta \qquad (2.4)$$

dır. Dolayısıyla $Y=y$ (yani $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)'$) verilmişken Y_{n+1}' in koşullu yoğunluğu,

$$f_{Y_{n+1}/Y}(y_{n+1}/y)=\frac{f(y_1,y_2,\cdots,y_n,y_{n+1})}{f_Y(y)}=\frac{\int\left[\prod_{t=1}^{n+1}\left[f_{Y_t/\Theta}(y_t/\theta)\right]\right]\pi(\theta)d\theta}{f_Y(y)} \qquad (2.5)$$

şeklinde elde edilir. Y verilmişken Θ' in sonsal yoğunluğu (Eş (2.2) ve (2.3)' den),

$$\pi_{\Theta/Y}(\theta/y)=\frac{f_{Y,\Theta}(y,\theta)}{f_Y(y)}=\frac{\left[\prod_{t=1}^{n}\left[f_{Y_t/\Theta}(y_t/\theta)\right]\right]\pi(\theta)}{f_Y(y)} \qquad (2.6)$$

olur. Buradan,

$$\left[\prod_{t=1}^{n}\left[f_{Y_t/\Theta}(y_t/\theta)\right]\right]\pi(\theta)=\pi_{\Theta/Y}(\theta/y)f_Y(y) \qquad (2.7)$$

biçiminde yazılabilir. Eş (2.5),

$$\begin{aligned} f_{Y_{n+1}/Y}(y_{n+1}/y)&=\frac{\int f_{Y_{n+1}/\Theta}(y_{n+1}/\theta)\pi_{\Theta/Y}(\theta/y)f_Y(y)d\theta}{f_Y(y)} \\ &=\int f_{Y_{n+1}/\Theta}(y_{n+1}/\theta)\pi_{\Theta/Y}(\theta/y)d\theta \end{aligned} \qquad (2.8)$$

şekline dönüşür. Bu bilgilerin ışığı altında, herhangi bir sigortalı için, gözlemlenen $Y=y$ verisi temel alınarak Y_{n+1} kestirilmek istenmektedir. Şayet θ değeri biliniyor olsaydı bir seçenek hipotetik ortalama,

$$\mu_{n+1}(\theta)=E[Y_{n+1}/\Theta=\theta]=\int y_{n+1}f_{Y_{n+1}/\Theta}(y_{n+1}/\theta)dy_{n+1} \qquad (2.9)$$

olabilir. Ayrıca hipotetik ortalamanın beklenen değeri,

$$\mu=E(Y_{n+1})=E\left[E(Y_{n+1}/\Theta=\theta)\right]=E\left[\mu_{n+1}(\theta)\right] \qquad (2.10)$$

şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla ortak prim, hipotetik ortalamanın Θ üzerindeki ortalamasıdır. Eğer sigortalı hakkında hiçbir bilgi yok ise, bu prim kullanılabilir. Ancak θ değeri bilinmediği için en iyi seçenek gözlenen verileri kullanmaktır. Dolayısıyla Bayesci prim (kestirici dağılımın ortalaması),

$$E(Y_{n+1}/Y=y)=\int y_{n+1}f_{Y_{n+1}/Y}(y_{n+1}/y)dy_{n+1} \qquad (2.11)$$

veya

$$E(Y_{n+1} / Y = y) = \int \mu_{n+1}(\theta) \pi_{\Theta/Y}(\theta / y) d\theta \qquad (2.12)$$

şeklinde elde edilebilir. (Kesikli durumlarda Bayesci prim, $E(Y_{n+1} / Y = y) = \sum_{\Theta} \mu_{n+1}(\theta) \cdot \pi_{\Theta/Y}(\theta / y)$ şeklinde hesaplanır).

Sonuç olarak, Bayesci prim; kestirici dağılımın beklenen değeri veya sonsal dağılım $\pi_{\Theta/Y}(\theta / y)$ üzerinden hipotetik ortalamanın beklenen değeri olarak tanımlanabilir [3].

2.1. Bühlmann Kredibilite Modeli

Bühlmann kredibilite modeli, kayıp hata kare fonksiyonunun en küçüklenmesi anlamında Bayesci primin en iyi doğrusal yaklaşımıdır. Her sigortalı için (Θ koşulu altında) geçmiş kayıplar ($Y = (Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)'$ ' ler) aynı ortalamaya ve aynı varyansa sahiptirler. Ayrıca Θ koşulu altında bağımsız ve aynı dağılımlı (b. ve a.d) rassal değişkenlerdir. Böylece,

$$\mu(\theta) = E(Y_t / \Theta = \theta) \qquad (2.13)$$

ve

$$\upsilon(\theta) = Var(Y_t / \Theta = \theta) \qquad (2.14)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\mu(\theta)$ *hipotetik ortalama* ve $\upsilon(\theta)$' da *süreç varyansı* olarak adlandırılır.

$$\mu = E[\mu(\theta)] \qquad (2.15)$$

$$\upsilon = E[\upsilon(\theta)] \qquad (2.16)$$

ve

$$a = Var[\mu(\theta)] \qquad (2.17)$$

olsun. Burada, μ ifadesi; *hipotetik ortalamaların beklenen değeri*, υ ; *süreç varyansının beklenen değeri* ve a; *hipotetik ortalamaların varyansı*dır. Bu genel tanımlamalardan sonra koşullu kovaryanslar için gerekli olan iki teorem verilecektir.

Teorem 1 (Koşullu kovaryanslarda, kovaryansların ifade edilmesi) :

X, Y ve Θ ortak bir dağılıma sahip rassal değişkenler olsun. Bu durumda,

$$E[Y] = E[E[Y / \Theta]] \qquad (2.18)$$

ve

$$Kov[X, Y] = E[Kov[X, Y / \Theta]] + Kov[E[X / \Theta], E[Y / \Theta]] \qquad (2.19)$$

eşitlikleri yazılabilir [6].

Teorem 2 (Koşullu bağımsız risklerin kovaryansları) :

$\Theta = \theta$ koşulu altında $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ rassal değişkenleri bağımsız ve her biri aynı koşullu beklenen değer $\mu(\theta)$ ve varyans $\sigma^2(\theta)$' ya sahip oldukları varsayımı altında,

$$Kov[Y_s, Y_t] = a + \delta_{st} s^2, \qquad s, t = 1, 2, \cdots, n \qquad (2.20)$$

$$Kov\left[\mu(\Theta),Y_s\right]=a \tag{2.21}$$

eşitlikleri elde edilir (Burada δ Kroneker sembol: $s=t$ ise $\delta_{st}=1$, diğer durumda $\delta_{st}=0$ değerini gösterir) [6].

Bu bilgilerin ışığı altında, Y_t' nin ortalaması, varyansı ve kovaryansı,

$$E(Y_t) = E\left[E(Y_t/\Theta=\theta)\right]=E\left[\mu(\theta)\right]=\mu \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned} Var(Y_t) &= E\left[Var(Y_t/\Theta=\theta)\right]+Var\left[E(Y_t/\Theta=\theta)\right] \\ &= \upsilon + a \end{aligned} \tag{2.23}$$

$$\begin{aligned} Kov(Y_s,Y_t) &= E(Y_sY_t)-E(Y_s)E(Y_t) \qquad s\neq t \quad s,t=1,2,\cdots,n \\ &= Var\left[\mu(\theta)\right] \\ &= a \end{aligned} \tag{2.24}$$

biçiminde elde edilir. Bu temel bilgilerden sonra, Bühlmann yaklaşımına bakılabilir. Temel problemi hatırlayalım: $\mu_{n+1}(\theta)$ hipotetik ortalaması, bir sonraki dönemde, ortalama hasarların tahmin edilmesi amacıyla kullanılmak isteniyorsa, $Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)'$ gözlemleri yapılmış olduğundan önerilecek bir yöntem, geçmiş verilerin doğrusal fonksiyonu ile $\mu_{n+1}(\theta)$ değerinin elde edilmesidir. Dolayısıyla, bu işlemi yapabilmek için $\alpha_0+\sum_{t=1}^{n}\alpha_tY_t$ formundaki doğrusal tahmin ediciler kullanılır ve α_s' ler kayıp hata kareleri (squared error loss) en küçüklenecek şekilde seçilir. Bu bilgilerden yararlanarak,

$$Q=E\left\{\left[\mu_{n+1}(\theta)-\left(\alpha_0+\sum_{t=1}^{n}\alpha_tY_t\right)\right]^2\right\}=E\left\{\left[\mu_{n+1}(\theta)-\alpha_0-\sum_{t=1}^{n}\alpha_tY_t\right]^2\right\} \tag{2.25}$$

Q değeri oluşturulur. Burada $\tilde{\alpha}_0,\tilde{\alpha}_1,\cdots,\tilde{\alpha}_n$' ler Eş (2.25)'i en küçükleyen $\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ değerlerini göstermek üzere,

$$\tilde{\alpha}_0+\sum_{t=1}^{n}\tilde{\alpha}_tY_t \tag{2.26}$$

eşitliği kredibilite prim değeri olarak ifade edilebilir. Eş (2.25)'den, Q ifadesini en küçükleyecek $\tilde{\alpha}_0,\tilde{\alpha}_1,\cdots,\tilde{\alpha}_n$ değerlerini bulmak için $\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_n$' lere göre türev alınıp ve gerekli işlemler yapıldığında,

$$E\left[\mu_{n+1}(\theta)\right]=\tilde{\alpha}_0+\sum_{t=1}^{n}\tilde{\alpha}_tE(Y_t) \tag{2.27}$$

sonucu elde edilir. Diğer taraftan, $E(Y_{n+1})=E\left[E(Y_{n+1}/\Theta=\theta)\right]=E\left[\mu_{n+1}(\theta)\right]$ ve $\partial Q/\partial\alpha_0=0$ bilgilerinin ışığı altında Eş (2.27),

$$E(Y_{n+1}) = \tilde{\alpha}_0 + \sum_{t=1}^{n} \tilde{\alpha}_t E(Y_t) \tag{2.28}$$

şeklini alır. Aynı şekilde $s = 1,2,\cdots,n$ için α_s' ye göre kısmi türev alınıp ve gerekli işlemler yapıldığında,

$$E\left[\mu_{n+1}(\theta) Y_s\right] = \tilde{\alpha}_0 E(Y_s) + \sum_{t=1}^{n} \tilde{\alpha}_s E(Y_s Y_t) \tag{2.29}$$

sonucu elde edilir. Bu eşitliğin sol tarafı $\mu_{n+1}(\theta) = E\left[Y_{n+1} / \Theta = \theta\right]$ olduğundan,

$$\begin{aligned} E\left[\mu_{n+1}(\theta) Y_s\right] &= E\left\{E\left[Y_s \mu_{n+1}(\theta) / \Theta = \theta\right]\right\} \\ &= E\left(Y_{n+1} Y_s\right) \end{aligned} \tag{2.30}$$

şeklinde ifade edilebilir. Böylece $\partial Q / \partial \alpha_s = 0$'dan hareketle,

$$E(Y_{n+1} Y_s) = \tilde{\alpha}_0 E(Y_s) + \sum_{t=1}^{n} \tilde{\alpha}_t E(Y_s Y_t) \tag{2.31}$$

elde edilir. Eş (2.28), $E(Y_s)$ ile çarpıldığında ve elde edilen bu ifade, Eş (2.31)'den çıkarıldığında,

$$E(Y_{n+1} Y_s) - E(Y_{n+1}) E(Y_s) = \sum_{t=1}^{n} \tilde{\alpha}_t E(Y_s Y_t) - \sum_{t=1}^{n} \tilde{\alpha}_t E(Y_s) E(Y_t)$$

$$Kov(Y_s, Y_{n+1}) = \sum_{t=1}^{n} \tilde{\alpha}_t Kov(Y_s, Y_t), \qquad s,t = 1,2,\cdots,n \tag{2.32}$$

sonucu elde edilir. Eş (2.32),

$$Kov(Y_s, Y_{n+1}) = \sum_{\substack{t=1 \\ t \neq s}}^{n} \tilde{\alpha}_t Kov(Y_s, Y_t) + \tilde{\alpha}_s Var(Y_s) \qquad s,t = 1,2,\cdots,n \tag{2.33}$$

biçiminde de yazabilir. Eş (2.28)'den,

$$\mu = \tilde{\alpha}_0 + \mu \sum_{t=1}^{n} \tilde{\alpha}_t \tag{2.34}$$

Veya

$$\sum_{t=1}^{n} \tilde{\alpha}_t = 1 - \tilde{\alpha}_0 / \mu \tag{2.35}$$

olur. Eş (2.33)'de bulunan değerler yerine yazıldığında ve gerekli işlemler yapıldığında,

$$a = \sum_{t=1}^{n} \tilde{\alpha}_t a + \tilde{\alpha}_s \upsilon, \qquad s,t = 1,2,\cdots,n \tag{2.36}$$

elde edilir. Eş (2.36)'dan,

$$\tilde{\alpha}_s = \frac{a\left(1-\sum_{t=1}^{n}\tilde{\alpha}_t\right)}{\upsilon} = \frac{a(\tilde{\alpha}_0/\mu)}{\upsilon} = \frac{a\tilde{\alpha}_0}{\mu\upsilon} \tag{2.37}$$

sonucuna ulaşılır. Buradan,

$$\sum_{s=1}^{n}\tilde{\alpha}_s = \sum_{t=1}^{n}\tilde{\alpha}_t = \frac{na\tilde{\alpha}_0}{\mu\upsilon} \tag{2.38}$$

olur. Eş (2.38), Eş (2.35)'de kullanıldığında ve gerekli işlemler yapıldığında $\tilde{\alpha}_0$,

$$\tilde{\alpha}_0 = \frac{\mu\upsilon}{na+\upsilon} \tag{2.39}$$

biçiminde elde edilir. Böylece,

$$\tilde{\alpha}_t = \frac{a\tilde{\alpha}_0}{\mu\upsilon} = \frac{a\left(\frac{\mu\upsilon}{na+\upsilon}\right)}{\mu\upsilon} = \frac{a\mu\upsilon}{(na+\upsilon)\mu\upsilon} = \frac{a}{na+\upsilon} \tag{2.40}$$

olur. Bu durumda elde edilen $\tilde{\alpha}_0$ ve $\tilde{\alpha}_t$' ler Eş (2,38)'de yerine yazıldığında ve gerekli işlemler yapıldığında,

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_0 + \sum_{t=1}^{n}\tilde{\alpha}_t Y_t &= \frac{\mu\upsilon}{na+\upsilon} + \sum_{t=1}^{n}\frac{a}{na+\upsilon}Y_t \\ &= (1-Z)\mu + Z\bar{Y}\end{aligned} \tag{2.41}$$

sonucuna ulaşılır. Burada, $Z = \frac{na}{na+\upsilon}$, $\bar{Y} = \sum_{t=1}^{n} Y_t/n$ ve $1-Z = \frac{\upsilon}{na+\upsilon}$'dır. Bühlmann kredibilite primi, $(1-Z)\mu + Z\bar{Y}$ biçiminde hesaplanır. Buradan,

$$Z = \frac{n}{n+\frac{\upsilon}{a}} \tag{2.44}$$

şeklinde de yazılabilir. Son ifadedeki υ/a yerine k yazıldığında, Eş (2.23)'den,

$$k = \frac{\upsilon}{a} = \frac{E[\upsilon(\theta)]}{Var[\mu(\theta)]} = \frac{E[Var(Y_i/\Theta=\theta)]}{Var[E(Y_i/\Theta=\theta)]} = \frac{SVBD}{HOV} \tag{2.43}$$

(SVBD=süreç varyansının beklenen değeri ve HOV=hipotetik ortalamaların varyansı) şeklinde ifade edilebilir. Bu durumda kredibilite faktörü,

$$Z = \frac{n}{n+k} \tag{2.44}$$

olur. Sonuç olarak, Bühlmann kredibilite modeli,

$$E(Y_{n+1}) = Z\bar{Y} + (1-Z)\mu, \qquad Z = \frac{n}{n+k}, \qquad 0 \le Z \le 1$$

biçiminde özetlenebilir [7]. Bayesci prim ve Bühlmann prim değerlerini elde etmek için gerekli işlem aşamalarını göstermek amacıyla basit bir örnek seçilmiştir. Bayesci yöntem başlığı altında sunulan teori tamamen geneldir. Ancak, verilen örnek tamamen dağılımın türüne bağlıdır. Temel olarak, sürekli veya kesikli dağılımların mümkün olan her bir kombinasyonu ya kayıpların (Θ verilmişken) ya da önsel'in dağılımı için kullanılabilir. Bu kuramsal sonuçları bir örnek üzerinde görmek mümkündür. Öncelikle örneği bayesci yaklaşım için, daha sonra Bühlmann modeli için uygulayıp kuramsal sonuçları ve işlem aşamalarını görmek mümkündür.

3. Örnek

Sürücüleri kötü, orta, iyi ve çok iyi olmak üzere 4 grupta toplayalım. Kolaylık olması açısından kötü sınıfındaki sürücüleri A, orta sınıfındaki sürücüleri B, iyi sınıfındaki sürücüleri C ve çok iyi sınıfındaki sürücüleri ise D ile gösterelim. Her sınıf içinde, yıllık hasar sayısının A sınıfı için beklenen değeri 0.4, B sınıfı için 0.3, C sınıfı için 0.2 ve D sınıfı için 0.1 olan bir poisson rassal değişkeni şeklinde dağıldığı varsayılmıştır. Ayrıca, Θ aşağıdaki gibi belirlenen basit bir önsel dağılıma sahiptir,

$$\pi_{\Theta}(\theta)=\begin{cases}0.10, & \Theta=\theta_A=0.4 \text{ ise}\\ 0.40, & \Theta=\theta_B=0.3 \text{ ise}\\ 0.30, & \Theta=\theta_C=0.2 \text{ } ise\\ 0.20, & \Theta=\theta_D=0.1 \text{ ise}\end{cases}$$

Bir sürücü rassal olarak seçiliyor ve 2003 yılında 1, 2004 yılında 0, 2005 yılında ise 2 hasara sahip olduğu görülüyor. Bu durumda bu sürücünün 2006 yılı için beklenen hasar sayısı nedir?

3.1. Bayesci Yaklaşım İçin Çözüm:

Hiçbir geçmiş veri bilgisinin olmaması halinde, 2006 yılındaki hasar sayısına ilişkin en iyi tahmin basit şekliyle hipotetik ortalamanın beklenen değeri ya da önsel ortalama olacaktır. Yani,

$$E\left[E(Y_t/\theta)\right]=E\left[\mu(\theta)\right]=(0.4)(0.10)+(0.3)(0.40)+(0.2)(0.30)+(0.1)(0.20)=0.240$$

olur. Ancak, 2003 yılında hasar sayısının 1, 2004'de 0, 2005'de de 2 olduğuna dair ilave bilgi tahmini değiştirmelidir (gerçekte, yılda ortalama 1 hasar sayısı önsel tahminden çok daha yüksektir). Varsayalım ki Y_t/Θ' in dağılımı poisson olsun, $(Y_t/\Theta \sim Poisson)$ o zaman $f(y_1,y_2,y_3,\theta)=\dfrac{e^{-\theta}\theta^{y_1}}{y_1}\times\dfrac{e^{-\theta}\theta^{y_2}}{y_2}\times\dfrac{e^{-\theta}\theta^{y_3}}{y_3}\times\pi_{\Theta}(\theta)$ olur. Burada, 2003'deki hasarların sayısı y_1 ile, 2004'deki hasarların sayısı y_2 ile ve 2005'deki hasarların sayısı ise y_3 ile gösterilirse o zaman ortak olasılıklar; A sınıfı için, $f(1,0,2,0.4)=0.0007711$; B sınıfı için, $f(1,0,2,0.3)=0.0002195$; C sınıfı için, $f(1,0,2,0.2)=0.0006586$; D sınıfı için, $f(1,0,2,0.1)=0.0000741$ şeklinde elde edilir. Daha sonra, Y'in marjinal dağılımı $f_Y(y)=\sum_{\Theta}f(y,\theta)$'i $Y=(1,0,2)$ durumu için bulmak gerekmektedir. Buradan,

$$f_Y(1,0,2)=f(1,0,2,\theta_A)+f(1,0,2,\theta_B)+f(1,0,2,\theta_C)+f(1,0,2,\theta_D)=0,0017233$$

değeri elde edilir. Sonsal olasılık fonksiyonu, $\pi_{\Theta/Y}=\dfrac{f(Y,\theta)}{f(Y)}$ aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\Pr(\theta=0.4/Y)=\frac{0.0007711}{0.0017233}=0.447455$$

$$\Pr(\theta=0.3/Y)=\frac{0.0002195}{0.0017233}=0.127372$$
$$\Pr(\theta=0.2/Y)=\frac{0.0006586}{0.0017233}=0.382174$$
$$\Pr(\theta=0.1/Y)=\frac{0.0000741}{0.0017233}=0.042999$$

Sonuç olarak, kestirici dağılımın beklenen değeri,

$$\begin{aligned}E\left[Y_{2006}/y=(1,0,2)\right]&=\sum_{\Theta}E(Y/\theta)\pi\left[\theta/y=(1,0,2)\right]\\&=(0.4)(0,447455)+(0.3)(0.127372)+(0.2)(0.382174)+(0.1)(0.042999)\\&=0.298\end{aligned}$$

Böylece, 2003'de 1 hasar, 2004'de 0 hasar ve 2005'de 2 hasar bilgisine dayandırılan 2006'daki hasarların sayısı için tahmin değeri 0.298 dır. 0.298 değeri, 2003-2004-2005 bilgisinin mevcut olmaması halinde yapılacak olan 0.240 tahmininden daha yüksektir.

3.2. Bühlmann Modeli İçin Çözüm:

Aynı örnek Bühlmann modeli için çözümlenebilir. Bühlmann kredibilite primi, $E(Y_{2006})=(1-Z)\mu+Z\overline{Y}$ şeklinde oluşturulmuştur. 2003'de 1 hasar, 2004' de 0 hasar ve 2005' de ise 2 hasar olduğu bilinmektedir. Bu bilgiler ışığında, $\overline{Y}=1$ olarak hesaplanır. Aynı zamanda,

$$\begin{aligned}\mu=E\left[E(Y_t/\Theta)\right]&=E\begin{cases}0.4, & \Theta=\theta_A \text{ ise}\\0.3, & \Theta=\theta_B \text{ ise}\\0.2, & \Theta=\theta_C \text{ ise}\\0.1, & \Theta=\theta_D \text{ ise}\end{cases}\\&=(0.4)(0.10)+(0.3)(0.40)+(0.2)(0.30)+(0.1)(0.20)\\&=0.240\end{aligned}$$

bilgisi de vardır. Böylece, geriye sadece Z'yi hesaplamak kalır. Buradan hareketle, 3 tane hasara maruz kalma yılı (2003, 2004 ve 2005) olduğundan n=3 olur. Bu değer Z'de yerine yazıldığında, $Z=\dfrac{3}{3+\dfrac{\upsilon}{a}}$ biçiminde ifade edilir. Diğer gerekli işlemler, υ ve a' nın hesaplanmasıdır.

$$\upsilon=E\left[Var(Y_t/\Theta)\right]=E\begin{cases}0.4, & \Theta=\theta_A \text{ ise}\\0.3, & \Theta=\theta_B \text{ ise}\\0.2, & \Theta=\theta_C \text{ ise}\\0.1, & \Theta=\theta_D \text{ ise}\end{cases}$$

Poisson dağılımında, dağılımın parametreleri olan ortalama ve varyans eşittir. Bu yüzden de υ=0.240 olacaktır. Aynı zamanda,

$$a=Var\left[E(Y_i/\Theta)\right]=Var\begin{cases}0.4, & \Theta=\theta_A \text{ ise}\\0.3, & \Theta=\theta_B \text{ ise}\\0.2, & \Theta=\theta_C \text{ ise}\\0.1, & \Theta=\theta_D \text{ ise}\end{cases},\quad \text{veya}$$

$$a=\left[(0.4)^2(0.10)+(0.3)^2(0.40)+(0.2)^2(0.30)+(0.1)^2(0.20)\right]-[0.240]^2$$
$$=0.0084$$

olarak hesaplanır. Böylece, kredibilite faktörü $Z=\dfrac{3}{3+\dfrac{0.240}{0.0084}}$ =0.095023 biçiminde oluşur.

Sonuç olarak,

$$E\left(Y_{2006}/y=(1,0,2)\right)=(0.095023)(1)+(1-0.095023)(0.240)=0.312$$

değeri elde edilir ve bu değer, Bayesci prim değeri 0.298'den biraz daha büyüktür. Görüldüğü gibi, Bayesci yaklaşım ve Bühlmann modeliyle bulunan değerler birbirine çok yakın değerlerdir. Bu da söylenenleri ve yapılan işlemleri doğrular yöndedir.

4. Sonuç

Kuramsal yapıdan da görüldüğü gibi, Bühlmann modelinde Bayesci yöntemle bulunan prim değerine en yakın değeri verecek doğrusal prim değeri bulunmaktadır. Bu nedenle, prim değerini belirlerken kullanılan Bühlmann kredibilite modeli, kredibilite'nin Bayesci modellemesi olarak adlandırılabilir. Ancak Bühlmann modelinde, Bayes yöntemine göre hesaplama kolaylığı vardır. Çünkü Bayesci prim belirlenirken her dağılımın türüne göre bir kestirici dağılım bulmak gerekirken, Bühlmann modelinde, prim değeri dağılımdan bağımsız olarak belirlenmektedir. Sonuçta Bayesci prim değeri ile Bühlmann prim değerinin birbirine çok yakın olarak elde edilmesi beklenir.

Bu kuramsal sonuçlar verilen örnek üzerinde de açıkça görülmektedir. Poisson örneğinde hesaplanan Bayesci prim 0.298 iken Bühlmann modelinde hesaplanan değer 0.312 olarak elde edilmiştir. 0.312 değeri, 0.298 değerinden biraz daha büyük olmasına rağmen bu iki değer birbirine son derece yakın sonuçlardır. Böylece bu kuramsal sonuç verilen örneklerle de desteklenmiştir.

Sonuç olarak, Kredibilite teorisinin amacı, son döneme ait veriler ile geçmiş veriler arasında dengeli bir paylaştırma yapmaktır. İstatistiksel olarak, geçmiş verileri son dönem verileriyle güncelleyerek bu paylaştırma işini amaca uygun şekilde gerçekleştirebilecek en iyi yöntem Bayesci yaklaşımdır. Buradan hareketle, kredibilite teorisinin amacına uygun olarak Bühlmann kredibilite modelinin Bayesci yaklaşım mantığı ile nasıl oluşturulduğu kuramsal olarak ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır.

Kaynaklar

1. Bailey, A. L., **A Generalized Theory of Credibility.**, Proceedings of the Casualty Actuarial Society Vol 32, pp 13-20, (1945).
2. Bailey, A. L., **Credibility Procedures, Laplace' s Generalization of Bayes Rule and the Combination of Collateral Knowledge with Observed Data.**, Proceedings of the Casualty Actuarial Society Vol 37, pp 7-23, (1950).
3. Klugman, S. A.,Panjer, H. H. And Willmot, G. E., **Loss Models**., John Wiley and Sons, New York, (1998).
4. Schnieper, R., **On the Estimation of the Credibility Factor: A Bayesian Approach**., ASTIN Bulletin, Vol 25:2, pp 137-152, (1995)
5. Makov, U.E., Smith, A.F.M. and Liu, Y.H., **Bayesian Methods in Actuarial Science**., The Statistician, 45(4): 5003-515, (1996).
6. Goovaerts, M. J., Kass, R., Van Heerwaarden, A. E. and Bauwelinckx, T., **Effective Actuarial Methods**., Amsterdam, Holland: North Holland, (1990).
7. Bühmann, H., **Experience Rating and Credibility**., ASTIN Bulletin Vol 4, pp 199-207, (1967).