S.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi Fen Dergisi

Sayı:19 (2002) 99-106 KONYA

Konveks Fuzzy Kümeler Üzerine

Şaziye YÜKSEL,[1] Ayşe TÜNAY[1]

Özet: *Bu çalışmamızda; fuzzy kümelerde konvekslik kavramını inceledik. Konveks fuzzy küme ile bu fuzzy kümenin üyelik fonksiyonunun konkavlığı, strictly konveks fuzzy küme ile bu fuzzy kümenin üyelik fonksiyonunun strictly konkavlığı ve strongly konveks fuzzy küme ile bu fuzzy kümenin üyelik fonksiyonunun genel strongly konkavlığı arasında bağlantı kurduk. Ayrıca konveks fuzzy küme ile bu fuzzy kümenin üyelik fonksiyonunun genel konkav olması denkliğini elde ettik.*

Anahtar Kelimeler: **Fuzzy küme, üyelik fonksiyonu, konveks küme, strictly konveks küme, strongly konveks küme**

On Convex Fuzzy Sets

Abstract: *In this paper we investigated the concept of convexity in fuzzy sets. We try to relate convex fuzzy set and the concavity of its membership function, strictly convex fuzzy set and the strictly concavity of its membership function, strongly convex fuzzy set and the general strongly concavity of its membership function. Furthermore we obtained the equivalence of convex fuzzy set and the general concavity of its membership function.*

Key Words: Fuzzy set, membership function, convex set, strictly convex set, strongly convex set.

Giriş

Kesin bir kurala göre belirlenmiş nesneler topluluğuna **küme** denir. Bir kümeden söz edilebilmesi için; o kümenin elemanlarının belirtilmesine yarayan karakteristik bir özellik,yani kesin bir kural verilmelidir.

Fakat; karşılaşılan nesnelerin sınıfı için karakteristik kriteri her zaman kesin olarak belirlenemez. Örneğin; bir sınıftaki öğrencilerden güzel kızlar kümesinin yapılması istense, bu küme değişik kişiler tarafından değişik şekilde oluşturulacaktır. Çünkü, güzel ve güzel olmama arasında kesin bir değerlendirme olmadığından, bir öğrencinin güzel kategorisine koyduğu, diğer bir öğrenciye göre güzel olmayabilir. Dolayısıyla, güzel kızların sınıfı, uzun erkeklerin sınıfı, 1'den büyük reel sayıların sınıfı, bilinen matematiksel anlamdaki kümeleri oluşturmaz. Bu şekildeki

[1] Selcuk University, Department of Mathematics, [42031] Campus/Konya/TURKEY
[1] Selcuk University, Department of Mathematics, [42031] Campus/Konya/TURKEY

kümeler için karakteristik kriteri, kesin kümelerden farklı olarak, elemanının kümeye ait olması kesin olmayıp, herhangi bir olasılıkla verilmelidir. İşte; bu şekilde kesin olarak ifade edilemeyen kümelerin varlığından fuzzy küme kavramı doğmuştur. Fuzzy küme kavramı ilk defa *Zadeh* [1] tarafından verilmiştir.

Bu çalışmamızda, fuzzy kümelerde konvekslik ve konvekslik çeşitleri incelenmiş, bir fuzzy kümenin konveksliği ile onun üyelik fonksiyonu arasında bağlantılar kurulmuştur.

Tanımlar

Tanım 1. [1] Elemanları, kesin olarak belirli olmayan ve elemanlarının karakteristik derecelerinin bilindiği kümeye fuzzy küme denir.
X uzayındaki bir A fuzzy kümesi daima $f_A(x)$: X→ [0,1] karakteristik fonksiyonu ile mevcuttur. Ve karakteristik fonksiyonu,

$$f_A(x)=\begin{cases}(0,1] & x\in A\\ 0 & x\notin A\end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Bu çalışmada, $f_A(x)$ karekteristik fonksiyonuna üyelik fonksiyonu diyeceğiz. Ve bir A fuzzy kümesinden söz ederken daima bu A fuzzy kümesini $f_A(x)$ üyelik fonksiyonu ile birlikte düşüneceğiz. Ayrıca A fuzzy kümesini

$$A=\{\ \forall x\in X:\ f_A(x)\in(0,1]\}$$

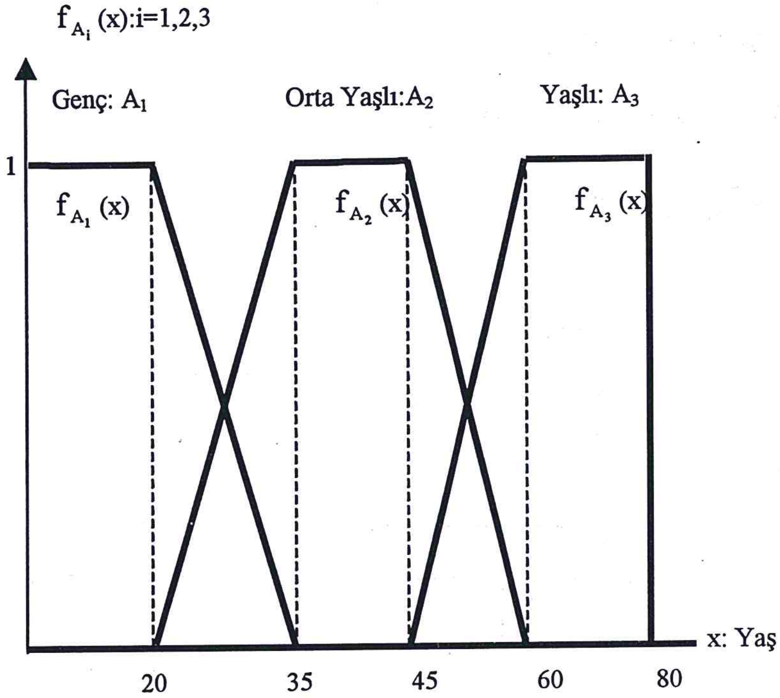
şeklinde tanımlayacağız.

Örnek 1. [2] Bir topluluktaki [0,80] yaş arası insanların kümesini göz önüne alalım. [0,80] yaş arası insanlar; genç, orta yaşlı ve yaşlı olmak üzere üç sınıfa ayrıldığında, bu sınıflar değişik kişiler tarafından değişik şekillerde oluşturulabilir.
Örnek olarak; bu sınıfların nasıl tanımlanabileceğini gösterelim. Gençlerin oluşturduğu sınıf için $f_{A_1}(x)$ üyelik fonksiyonu tanımlanarak elde edilen fuzzy küme $(A_1, f_{A_1}(x))$; orta yaşlıların oluşturduğu sınıf için $f_{A_2}(x)$ üyelik fonksiyonu tanımlanarak elde edilen fuzzy küme $(A_2, f_{A_2}(x))$ ve yaşlıların oluşturduğu sınıf için de $f_{A_3}(x)$ üyelik fonksiyonu tanımlanarak $(A_3, f_{A_3}(x))$ fuzzy kümesi elde edilir. Şimdi, $f_{A_1}(x)$, $f_{A_2}(x)$ ve $f_{A_3}(x)$ üyelik fonksiyonlarını verelim.

$$f_{A_1}(x)=\begin{cases}1 & x\le 20\\ (35-x)/15 & 20<x<35\\ 0 & x\ge 35\end{cases}$$

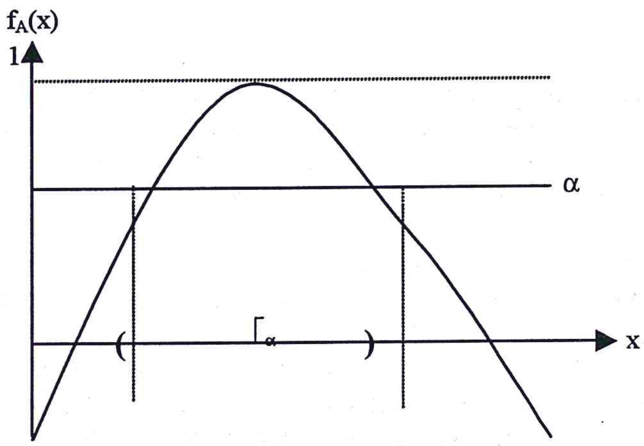
$$f_{A_2}(x)=\begin{cases}0 & x\le 20, \ge 60\\ (x-20)/15 & 20<x<35\\ (60\text{-}x)/15 & 45<x<60\\ 1 & 35\le x\le 45\end{cases}$$

$$f_{A_3}(x)=\begin{cases}0 & x\le 45\\ (x-45)/15 & 45<x<60\\ 1 & x\ge 60\end{cases}$$



Şekil 1. Bir topluluktaki [0,80] yaş arası insanlardan, genç, orta yaşlı ve yaşlı kategorisinde oluşturulan fuzzy kümeler

Tanım 2. [1] $\forall\alpha\in(0,1]$ olmak üzere, $\Gamma_\alpha=\{x\in X \mid f_A(x)\geq \alpha\}=\{x\in A \mid f_A(x)\geq\alpha\}$ şeklinde tanımlanır.



Şekil 2. $\forall\alpha\in(0,1]$ olmak üzere bir Γ_α fuzzy kümesi

Uyarı 1. A fuzzy kümesi $f_A(x)$ üyelik fonksiyonu ile verilir ve

$$f_A(x)=\begin{cases}(0,1] & x\in A\\ 0 & x\notin A\end{cases}$$

biçimindedir. Ayrıca;

$A=\bigcup_{\alpha>0}\Gamma_\alpha$ ve $A=\{x\in X \mid f_A(x)>0\}$

dır.

$\Gamma_\alpha=\{x\in X \mid f_A(x) \geq \alpha,\ \forall\alpha\in(0,1]\}$

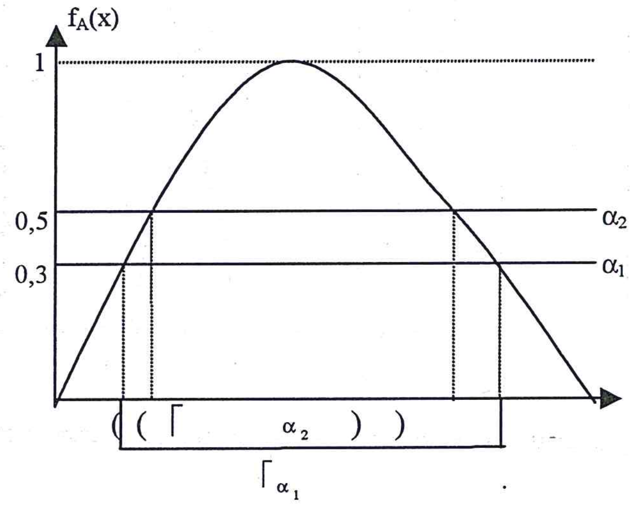
dır.

$\alpha_1,\ \alpha_2\in(0,1]$ olmak üzere; $\alpha_1<\alpha_2 \Rightarrow \Gamma_{\alpha_2}\subset\Gamma_{\alpha_1}$

dır.

$\Gamma_{\alpha_1}\cup\Gamma_{\alpha_2}=\Gamma_{\mathrm{Min}(\alpha_1,\alpha_2)}$ ve $\Gamma_{\alpha_1}\cap\Gamma_{\alpha_2}=\Gamma_{\mathrm{Max}(\alpha_1,\alpha_2)}$

dır.



Şekil 3. $\forall\alpha\in(0,1]$ olmak üzere Γ_α fuzzy kümelerinde temel işlemler

Tanım 3. [1] A fuzzy kümesinin konveks olması için gerek ve yeter şart $\forall\ \alpha\in(0,1]$ olmak üzere, $\Gamma_\alpha=\{x \mid f_A(x) \geq \alpha\}$ şeklinde tanımlanan Γ_α kümelerinin konveks olmasıdır.

Tanım 4. [1] A fuzzy kümesinin konveks olması için gerek ve yeter şart $\forall\lambda\in[0,1]$ ve $\forall x_1,\ x_2\in X$ için, $f_A(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2) \geq \mathrm{Min}\{f_A(x_1),\ f_A(x_2)\}$ koşulunun sağlanmasıdır.

Tanım 5. [1] A fuzzy kümesinin strictly konveks olması için gerek ve yeter şart $0<\alpha\leq1$ olmak üzere, Γ_α kümelerinin strictly konveks olmasıdır. (Yani, Γ_α da alınan herhangi farklı iki noktanın orta noktasının da Γ_α nın içinde yer almasıdır.)

Tanım 6. [1] Eğer $(x_1 \neq x_2)$ $\forall x_1,\ x_2\in X$ ve $0<\lambda<1$ olmak üzere;
$f_A(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)>\mathrm{Min}\{f_A(x_1),\ f_A(x_2)\}$ ise A fuzzy kümesine Strongly konveks denir.

Tanım 7. A fuzzy kümesinin $f_A(x)$ üyelik fonksiyonunun konkav olması için gerek ve yeter şart $\forall\lambda\in[0,1]$ ve $\forall x_1,\ x_2\in X$ için, $f_A(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2) \geq \lambda f_A(x_1)+(1-\lambda)f_A(x_2)$ ***koşulunun sağlanmasıdır.***

Tanım 8. A fuzzy kümesinin $f_A(x)$ üyelik fonksiyonunun strictly konkav olması için gerek ve yeter şart $x_o=\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2$ noktasında $f_A(x_o)=f_A(\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2)>\frac{1}{2}f_A(x_1)+\frac{1}{2}f_A(x_2)$ eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

Tanım 9. X konveks küme olmak üzere, $f: X\rightarrow R$ fonksiyonunun genel konkav olması için gerek ve yeter şart $\forall\ x_1,\ x_2\in X$ ve $\forall\lambda\in[0,1]$ olmak üzere

$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2) \geq \min\{f(x_1), f(x_2)\}$
eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

Tanım 10. A fuzzy kümesinin konveks fuzzy küme olması için gerek ve yeter şart $\exists\, \alpha_0 \in (0,1] \ni \forall\, \alpha \in (0,\alpha_0]$ için Γ_α fuzzy kümelerinin konveks olmasıdır.

Tanım 11. X konveks küme olmak üzere f: X→R fonksiyonunun genel strongly konkav olması için gerek ve yeter şart $\forall x_1, x_2 \in X$ ve $\forall \lambda \in (0,1)$ olmak üzere
$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2) > \mathrm{Min}\{f(x_1), f(x_2)\}$
olmasıdır.

Tanım 12. X konveks küme olmak üzere f: X→R fonksiyonunun strongly konkav olması için gerek ve yeter şart $\forall x_1, x_2 \in X$ ve $\forall \lambda \in (0,1)$ olmak üzere
$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2) > \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$
eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

Temel Sonuçlar

Lemma 1. Eğer A fuzzy kümesinin $f_A(x)$ üyelik fonksiyonu konkavsa, $\forall \alpha \in (0,1]$ için Γ_α fuzzy kümeleri konvekstir.

İspat: A fuzzy kümesi $f_A(x)$ üyelik fonksiyonu ile verilsin ve $f_A(x)$ üyelik fonksiyonu konkav olsun. $\alpha \in (0,1]$ keyfi bir sayı olmak üzere, $\Gamma_\alpha = \{x \mid f_A(x) \geq \alpha\}$ kümesinin konveks olduğunu gösterelim. Bunun için;

$\forall x_1, x_2 \in \Gamma_\alpha$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ olmak üzere $x_\lambda = \lambda x_1+(1-\lambda)x_2$ elemanının Γ_α nın elemanı olduğunu göstermemiz yeterlidir, yani $f_A(x_\lambda) \geq \alpha$ olduğunu göstermeliyiz. x_λ nın tanımını kullanarak $f_A(x_\lambda) = f_A(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)$ ifadesini elde ederiz. $f_A(x)$ üyelik fonksiyonu konkav olduğundan $f_A(x_\lambda) = f_A(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2) \geq \lambda f_A(x_1)+(1-\lambda) f_A(x_2)$ dır. Ayrıca, $x_1 \in \Gamma_\alpha$ olduğundan $f_A(x_1) \geq \alpha$ ve $x_2 \in \Gamma_\alpha$ olduğundan $f_A(x_2) \geq \alpha$ dır. Dolayısıyla;
$f_A(x_\lambda) = f_A(\lambda x_1+(1-\lambda) x_2\} \geq \lambda f_A(x_1)+(1-\lambda) f_A(x_2) \geq \lambda \alpha+(1-\lambda)\alpha = \alpha$
dır. Yani; $f_A(x_\lambda) \geq \alpha$ elde edilir. Buradan $x_\lambda = \lambda x_1+(1-\lambda)x_2 \in \Gamma_\alpha$ olur ki bu da bize Γ_α fuzzy kümesinin konveksliğini verir.

Sonuç 1. Eğer A fuzzy kümesinin $f_A(x)$ üyelik fonksiyonu konkav ise A fuzzy kümesi konvekstir.

Lemma 2. Eğer A fuzzy kümesinin $f_A(x)$ üyelik fonksiyonu strictly konkavsa, o zaman $\forall \alpha \in (0,1]$ için Γ_α fuzzy kümeleri strictly konvekstir.

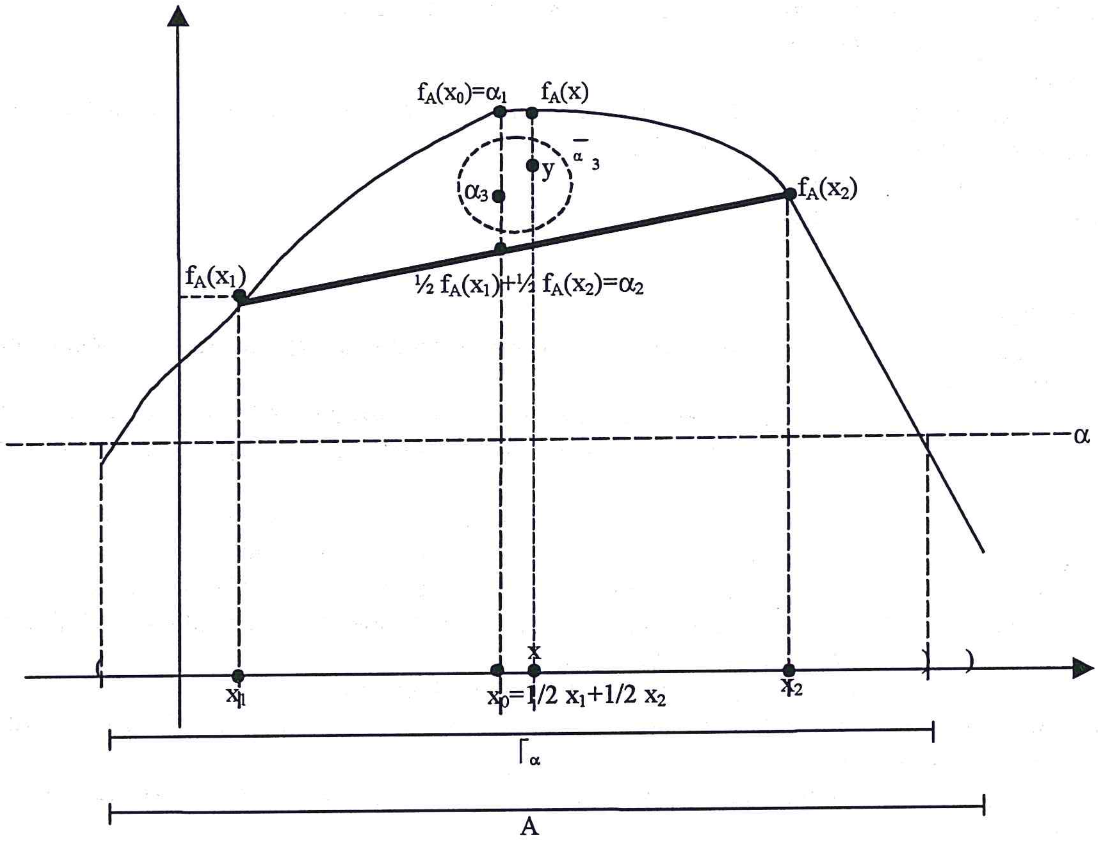
İspat: A fuzzy kümesi $f_A(x)$ üyelik fonksiyonu ile verilsin. $f_A(x)$ üyelik fonksiyonu strictly konkav olsun. $\alpha \in (0,1]$ olmak üzere $\Gamma_\alpha = \{x \mid f_A(x) \geq \alpha\}$ kümesinin strictly konveks olduğunu göstereceğiz. $\forall x_1, x_2 \in \Gamma_\alpha$ olmak üzere; $f_A(x)$ strictly konkav olduğundan $x_o = \frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2$ noktasında aşağıdaki eşitsizlik vardır.

$$f_A(x_o) = f_A\left(\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2\right) > \frac{1}{2} f_A(x_1)+\frac{1}{2} f_A(x_2)$$

$x_1 \in \Gamma_\alpha$ olduğundan $f_A(x_1) \geq \alpha$ ve $x_2 \in \Gamma_\alpha$ olduğundan $f_A(x_2) \geq \alpha$ dır. O zaman;

$f_A(x_0) = f_A\left(\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2\right) > \frac{1}{2} f_A(x_1)+\frac{1}{2} f_A(x_2) \geq \alpha$ dır, Yani; $f_A(x_o) > \alpha$ elde edilir. Üyelik fonksiyonunun x_o noktasındaki değerini α_1 aldığımızda; $f_A(x_o)=\alpha_1$ eşitliği elde edilir. $\frac{1}{2} f_A(x_1)+\frac{1}{2} f_A(x_2)=\alpha_2$ diyelim. $f_A(x)$ strictly konkav olduğundan $\alpha \leq \alpha_2 < \alpha_1$ eşitsizliği mevcuttur. $\alpha_1 > \alpha_3 > \alpha_2 \geq \alpha$ alalım. α_3 ün komşuluğunu $\bar{\alpha}_3$ ile gösterelim. $\bar{\alpha}_3 = \{y \mid |y-\alpha_3| < \varepsilon\}$dır. $\forall y \in \bar{\alpha}_3$ için $\alpha < y < \alpha_1$ dır. $\forall y \in \bar{\alpha}_3$ olmak üzere, y nin X uzayı üzerindeki izdüşümü bulunur ve bu izdüşüm x ile gösterilirse o zaman $f_A(x) > y$

olur. Dolayısıyla bu x ler için $f_A(x)>\alpha$ elde edilir. Diğer taraftan bu x ler x_o noktasının aynı ε komşuluğundadır, max $\{|\alpha - \alpha_3|, |\alpha_1 - \alpha_3|\} < \varepsilon$ dir. Böylece x_o noktası komşuluğu ile birlikte Γ_α nın içindedir. Bu da bize x_o ın bir iç nokta olduğunu gösterir. Buradan Tanım 5.[1]'in kullanılmasıyla A fuzzy kümesinin strictly konveks olduğu bulunur.



Şekil 4. [Lemma 2.]

Sonuç 2. Eğer A fuzzy kümesinin f_A (x) üyelik fonksiyonu strictly konkav ise A fuzzy kümesi strictly konvekstir.

Lemma 3. Eğer öyle $\alpha_o \in (0,1]$ varsa ve $\forall\alpha \in (0,\alpha_o]$ için A fuzzy kümesinin Γ_α alt kümeleri konveks ise A fuzzy kümesi de konvekstir.

İspat: x_1 ve x_2 noktaları A fuzzy kümesinin herhangi iki elemanı olsun. $\forall\lambda \in [0,1]$ için, $x_o = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in A$ olduğunu gösterelim. Bunu göstermek için, $\alpha \in (0,\alpha_o]$ olmak üzere Γ_α bulmamız yeterlidir. Öyle ki $x_1, x_2 \in \Gamma\alpha$ olsun. $f_A(x_1)$ ve $f_A(x_2)$ birer sayı olduğundan, min $[f_A(x_1), f_A(x_2)] = \alpha_1 > 0$, $\alpha_1 \in (0,1]$ olur. O zaman $(0,\alpha_o]$ aralığında öyle bir $\alpha_2>0$ bulabiliriz ki, $\alpha_1 \geq \alpha_2$ olsun. Γ_α nın tanımına göre (Tanım 2.[1]) $x_1, x_2 \in \Gamma_{\alpha_2}$ olduğunu buluruz. Hipotezden Γ_{α_2} nin konveksliğinden,

$x_0 = \lambda\, x_1 + (1-\lambda)\, x_2 \in \Gamma_{\alpha_2}$ olur. $\forall\, x_1, x_2 \in \Gamma_{\alpha_2}$ ve $\forall\lambda \in [0,1]$ için, $f_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\{f_A(x_1), f_A(x_2)\}$ dır. Buradan A fuzzy kümesi konvekstir. Yani $x_0 = \lambda x_1 + (1-\lambda)\, x_2 \in A$ dır.

Lemma 4. A fuzzy kümesi $f_A(x)$ üyelik fonksiyonu ile verilsin. Γ_α Tanım 2.[1]'deki fuzzy küme olsun. Eğer herhangi bir $\alpha_o \in (0,1]$ için Γ_{α_0} fuzzy kümesi konveks ise bu takdirde $\forall\alpha > \alpha_o$ için Γ_α fuzzy kümesi konvekstir.

İspat: Herhangi bir $\alpha_o \in (0,1]$ için Γ_{α_0} konvekstir. $\forall\ \alpha>\alpha_o$ için Γ_α nın konveks olduğunu gösterelim. $x_1,\ x_2 \in \Gamma_\alpha$ olsun. $x_1 \in \Gamma_\alpha$ olduğundan $f_A(x_1) \geq \alpha$ ve $x_2 \in \Gamma_\alpha$ olduğundan $f_A(x_2) \geq \alpha$ dır. Buradan Min $\{f_A(x_1),\ f_A(x_2)\} \geq \alpha$ elde edilir. $\forall \alpha > \alpha_o$ iken $\Gamma_\alpha \subset \Gamma_{\alpha_0}$ olduğundan $x_1,\ x_2 \in \Gamma_{\alpha_0}$ dır. Hipotezden Γ_{α_0} konveks fuzzy küme olduğundan $\lambda \in [0,1]$ olmak üzere, $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in \Gamma_{\alpha_0}$ dır. O zaman Γ_{α_0} konveks fuzzy küme olduğundan $f_A(\lambda x_1+(1-\lambda)\ x_2) \geq \min\{f_A(x_1),\ f_A(x_2)\}$ eşitsizliği sağlanır. Buradan $f_A(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2) \geq \min\{f_A(x_1),\ f_A(x_2)\} \geq \alpha$ elde edilir. Böylece
$\lambda\ x_1+(1-\lambda)\ x_2 \in \Gamma_\alpha$
olur. Bu ise Γ_α fuzzy kümesinin konveks olması demektir.

Teorem 1. A fuzzy kümesinin Tanım 4.[1]'deki anlamda konveks olması için gerek ve yeter şart A fuzzy kümesinin üyelik fonksiyonunun genel konkav (Tanım 9.) olmasıdır.

Teorem 2. A fuzzy kümesinin konveksliği ile ilgili verilen Tanım 10. ve Tanım 3.[1] eşdeğerdir.

İspat: $\Rightarrow$ Tanım 10.'u kabul edelim. α_0 sayısı Tanım10.'daki sabit olmak üzere $\alpha_0 \in (0,1]$ ve $\forall \alpha \in (0,\alpha_0]$ için Γ_α konvekstir. Şimdi $\forall \alpha \in (0,1]$ için Γ_α fuzzy kümelerinin konveks olduğunu göstermeliyiz. Eğer $\alpha \leq \alpha_0$ olursa Tanım 10.'dan dolayı, $\forall\ \Gamma_\alpha$ fuzzy kümeleri konvekstir. $\alpha > \alpha_0$ durumunu göz önüne aldığımızda $\Gamma_\alpha \subset \Gamma_{\alpha_0}$ olup Lemma 4.'e göre Γ_{α_0} konveks olduğundan $\Gamma_\alpha$da konveks olur.

$\Leftarrow$ Tanım 3.[1]'ü kabul edelim. $\alpha_0 \in (0,1]$ keyfi bir sabit olmak üzere $(0,\alpha_0]$ aralığındaki $\forall \alpha$ için Γ_α fuzzy kümesini göz önüne alalım. $\forall \alpha \in (0,\ \alpha_0]$ olmak üzere Tanım 3.[1]'e göre, $\forall \alpha \in (0,1]$ için Γ_α kümeleri konveks olduğundan $\forall \alpha \in (0,\alpha_0]$ aralığındaki Γ_α kümeleri de konvekstir.

Lemma 5. ***A fuzzy kümesi $f_A(x)$ üyelik fonksiyonu ile verilsin Γ_α Tanım 2.[1]'de verilen fuzzy küme olsun. Eğer herhangi bir $\alpha_0 \in (0,1]$ için Γ_{α_0} strongly konveks ise o zaman, $\forall \alpha > \alpha_0$ için Γ_α fuzzy kümesi strongly konvekstir.***

İspat: $\alpha_0 \in (0,1]$ için Γ_{α_0} kümesinin strongly konveks olduğunu kabul edelim. $\forall \alpha > \alpha_0$ için Γ_α nın strogly konveks olduğunu gösterelim. $x_1, x_2 \in \Gamma_\alpha$ olsun. $x_1 \in \Gamma_\alpha$ olduğundan $f_A(x_1) \geq \alpha$ ve $x_2 \in \Gamma_\alpha$ olduğundan $f_A(x_2) \geq \alpha$ dır. Buradan $\mathrm{Min}\{f_A(x_1),\ f_A(x_2)\} \geq \alpha$ elde edilir. $\forall \alpha > \alpha_0$ iken $\Gamma_\alpha \subset \Gamma_{\alpha_0}$ olduğundan $x_1,\ x_2 \in \Gamma_{\alpha_0}$ dır. Hipotez gereği Γ_{α_0} fuzzy kümesi strongly konveks olduğundan, $\forall \lambda \in (0,1)$ için $f_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) > \mathrm{Min}\{f_A(x_1),\ f_A(x_2)\}$ elde edilir. Buradan, $f_A(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2) > \mathrm{Min}\ \{f_A(x_1),f_A(x_2)\} \geq \alpha$ olur. Böylece, $f_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) > \alpha$ olduğundan Γ_α fuzzy kümesi de strongly konveks olur.

Lemma 6. Eğer f fonksiyonu strongly konkav (Tanım 12.) ise bu taktirde genel strongly konkav (Tanım 11.)'dır.

İspat: f fonksiyonu strongly konkav olsun. Şimdi f fonksiyonun genel strongly konkav olduğunu gösterelim.
$\forall x_1,\ x_2 \in X$ ve $\forall \lambda \in (0,1)$ için f fonksiyonu strongly konkav olduğundan
$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) > \lambda\ f(x_1) + (1-\lambda)\ f(x_2)$
dır. Buradan,
$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)>\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2) \geq \lambda \mathrm{Min}\{f(x_1),f(x_2)\}+(1-\lambda)\mathrm{Min}\{f(x_1),f(x_2)\}= \mathrm{Min}\ \{f(x_1),\ f(x_2)\}$ dır. Yani, $f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)>\mathrm{Min}\ \{f(x_1),f(x_2)\}$ elde edilir. Bu ise f fonksiyonunun genel strongly konkav olması demektir.

Lemma 4. Eğer $f_A(x)$ üyelik fonksiyonu $\{x \in X: f_A(x)>0\}$ kümesinde genel strongly konkavsa, o zaman A fuzzy kümesi strongly konvekstir.

İspat: $f_A(x)$ üyelik fonksiyonunun $\{x \in X: f_A(x)>0\}$kümesinde genel strongly konkav olduğunu kabul edelim. Şimdi A fuzzy kümesinin strongly konveks olduğunu göstereceğiz. $x_1,\ x_2 \in A$ ve $f_A(x)$

fonksiyonu A fuzzy kümesinin üyelik fonksiyonu olduğundan, $f_A(x_1)>0$ ve $f_A(x_2)>0$ dır. Dolayısıyla x_1, $x_2 \in \{x \in X : f_A(x) > 0\}$ dır. Bu taktirde $f_A(x)$ üyelik fonksiyonu; $\{x \in X : f_A(x)>0\}$ kümesinde genel strongly konkav olduğundan,

$f_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) > \mathrm{Min}\{f_A(x_1), f_A(x_2)\}$

dır. Bu ise A fuzzy kümesinin strongly konveks olduğunu gösterir.

Kaynaklar

1- I. A. Zadeh, Fuzzy Sets, **Information and Control** 8, 338 –353, 1965.

2- G. J. Klir and B. Yuan, Fuzzy sets and Fuzzy Logic Theory and Applications, Prentice Hall PTR Upper Saddle River, New Jersey 1995.