

AFİNOR ALANININ YATAY LİFTİNİN TAŞINMASI HAKKINDA

Ekrem Kadoğlu, Muhammet Kamali, Arif A. Salimov
Atatürk Üniversitesi, Matematik Bölümü

Özet: V_n Riemann manifoldu, $T_q^p(V_n)$ ve $T_{q+1}^{p-1}(V_n)$ ise bu Riemann Manifoldu üzerinde sırasıyla (p, q) ve $(p - 1, q + 1)$ tipli tensör demetleri olsun.

$$f : T_q^p(V_n) \rightarrow T_{q+1}^{p-1}(V_n), (y^I = y^I(x^K); I, K = 1, 2, 3, \dots, n + n^{p+q})$$

diffeomorfizmi verilsin. Bu çalışmada, ∇ Riemann konneksiyonu ise, ${}^H\varphi_2$ tensörünün, f altında, ${}^H\varphi_1$ tensörünün dönüşümü olarak elde edildiği gösterildi.

Anahtar Kelimeler: *Tensör demeti, lift, yatay lift.*

Abstract: Let V_n be the Riemann manifold. Let $T_q^p(V_n)$ and $T_{q+1}^{p-1}(V_n)$ be the tensor bundle of type (p, q) and $(p - 1, q + 1)$ over the Riemann Manifold V_n , respectively. It is given a diffeomorphism

$$f : T_q^p(V_n) \rightarrow T_{q+1}^{p-1}(V_n), (y^I = y^I(x^K); I, K = 1, 2, 3, \dots, n + n^{p+q}).$$

In this work, if ∇ is the Riemann connection, it is shown that ${}^H\varphi_1$ is transformed to ${}^H\varphi_2$ by the diffeomorphism f .

Key words: *Tensor bundle, lift, horizontal lift.*

1. GİRİŞ

M_n, C^∞ sınıfından bir manifold, A_m birimli komütatif ve birleşmeli bir cebir ve

$\Pi = \{ \varphi_\alpha \} (\alpha = 1, 2, \dots, m), A_m$ cebirine izomorf olan M_n üzerinde poliafinor Π -

yapısı olsun. Burada φ_α cebirin e_α baz elemanlarına karşı gelen (1,1) tipli tensörlerdir.

$\omega \in T_2^0(M_n)$, (0,2) tipli tensör alanı Π - yapısına göre

$$\omega(\varphi_\alpha Z_1, Z_2) = \omega(Z_1, \varphi_\alpha Z_2), \quad (\alpha = 1, 2, \dots, m; Z_1, Z_2 \in T_0^1(M_n)) \quad (1)$$

koşulunu sağlarsa ω tensörüne pür tensör alanı denir. (1) koşulu $\{\partial_i\}$ doğal çatısında

$$\omega_{mj_2} \varphi_\alpha^m j_1 = \omega_{j_1 m} \varphi_\alpha^m j_2$$

şeklinde olur. Bu $\omega_{j_1 j_2}^* = \omega_{mj_2} \varphi_\alpha^m j_1 = \omega_{j_1 m} \varphi_\alpha^m j_2$ ile gösterilir.

(0,2) tipli pür tensör alanlarının oluşturduğu $T_2^0(M_n)$ modülünde Tachibana operatörünün

$$\begin{aligned} (\Phi_\alpha \omega)(X, Z_1, Z_2) &= \varphi_\alpha(X) (\omega(Z_1, Z_2)) - X (\omega(\varphi_\alpha Z_1, Z_2)) \\ &+ \omega((L_{Z_1} \varphi_\alpha)X, Z_2) + \omega(Z_1, (L_{Z_2} \varphi_\alpha)X) \end{aligned} \quad (2)$$

şeklinde olduğu bilinmektedir (bkz.[3] ve [5]). Burada L_Z Z boyunca Lie türev operatörünü göstermektedir.

(2) operatörü doğal çatıda.

$$\Phi_\alpha^k \omega_{j_1 j_2} = \varphi_\alpha^m \partial_m \omega_{j_1 j_2} - \partial_k \omega_{j_1 j_2}^* + (\partial_{j_1} \varphi_\alpha^r) \omega_{r j_2} + (\partial_{j_2} \varphi_\alpha^r) \omega_{j_1 r} \quad (2')$$

olarak yazılır.

(2) veya (2') operatörünün özelliği, (0,2) tipli pür tensörü (0,3) tipli tensöre dönüştürmesidir.

(3)

İntegrallenemeyen Π - yapısına göre

$$\Phi_\alpha^k \omega_{j_1 j_2} = 0$$

şartını sağlayan $\omega_{j_1 j_2}$ pür tensör alanına almost (hemen hemen) A-holomorf tensör alanı denir. (bkz.[3] ve [5]).

2. Vishnevski Operatörü

Keyfi $t \in T_q^p(M_n)$ tensör alanı için Vishnevski operatörünü

$$\begin{aligned} (\tilde{\Phi}_{\alpha} t)(X, Z_1, \dots, Z_q, \xi^1, \dots, \xi^p) &= (\nabla_{\alpha} t)(Z_1, \dots, Z_q, \xi^1, \dots, \xi^p) \\ &- \begin{cases} (\nabla_X t)(\varphi_{\alpha} Z_1, \dots, Z_q, \xi^1, \dots, \xi^p), & p \geq 0, q \geq 1 \\ (\nabla_X t)(Z_1, \dots, Z_q, \varphi_{\alpha}^1 \xi^1, \dots, \xi^p), & p \geq 1, q \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

şeklinde yazabiliriz (bkz.[4], s. 194). Burada ∇_X, M_n üzerinde tanımlanmış Γ afin konneksiyonunda kovaryant diferensiyel operatörü ve φ_{α}' ve φ_{α} afinorunun eşlenik afinorudur. (4) operatörü doğal çatıda

$$\tilde{\Phi}_{\alpha}^m t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = \varphi_{\alpha}^m \nabla_k t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} - \begin{cases} \varphi_{\alpha}^{i_1} \nabla_k t_{j_1 \dots j_q}^{m i_2 \dots i_p}, & p \geq 0, q \geq 0 \\ \varphi_{\alpha}^m \nabla_k t_{m j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}, & p \geq 0, q \geq 1 \end{cases} \quad (4')$$

şeklinde yazılır.

2.1. Lemma: Eğer Π -yapısı almost integrallenebilir (yani $\nabla_{\alpha} \varphi = 0, T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0$) ise bu durumda $T_2^0(M_n)$ pür tensör modülü üzerinde Tachibana ve Vishnevski operatörü çıkarılır.

İspat: T torsiyon tensörü formülünden

$$L_X Y = [X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X - T(X, Y) \quad (5)$$

yazılır. (1), (5) ve

$$(L_X \omega)(Y_1, Y_2) = X(\omega(Y_1, Y_2)) - \omega([X, Y_1], Y_2) - \omega(Y_1, [X, Y_2])$$

formülünü kullanarak

$$\begin{aligned} &(\Phi_{\alpha} \omega)(X, Z_1, Z_2) \\ &= \varphi_{\alpha}(X)(\omega(Z_1, Z_2)) - X(\omega(\varphi_{\alpha} Z_1, Z_2)) - \omega(\nabla_{\alpha} X Z_1 - \nabla_{Z_1} \varphi_{\alpha}(X) - T(\varphi_{\alpha} X, Z_1), Z_2) \\ &+ \omega(\varphi_{\alpha}(\nabla_X Z_1 - \nabla_{Z_1} X - T(X, Z_1)), Z_2) - \omega(Z_1, \nabla_{\alpha} X Z_2 - \nabla_{Z_2} \varphi_{\alpha} X - T(\varphi_{\alpha} X, Z_2)) \\ &+ \omega(Z_1, \varphi_{\alpha}(\nabla_X Z_2 - \nabla_{Z_2} X - T(X, Z_2))) \\ &= \varphi_{\alpha}(X)(\omega(Z_1, Z_2)) - X(\omega(\varphi_{\alpha} Z_1, Z_2)) - \omega(\nabla_{\alpha} X Z_1, Z_2) + \omega(\nabla_{Z_1} \varphi_{\alpha} X, Z_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \omega (T(\varphi X, Z_1), Z_2) + \omega (\nabla_{\varphi X} Z_1, Z_2) - \omega (\varphi (\nabla_{Z_1} X), Z_2) - \omega (\varphi (T(X, Z_1)), Z_2) \\
& - \omega (Z_1, \nabla_{\varphi X} Z_2) + \omega (Z_1, \nabla_{Z_2} \varphi X) + \omega (Z_1, T(\varphi X, Z_2)) + \omega (\varphi Z_1, \nabla_X Z_2) \\
& - \omega (Z_1, \varphi (\nabla_{Z_2} X)) - \omega (Z_1, \varphi (T(X, Z_2)))
\end{aligned}$$

yazılır (bkz. [1], s. 37). Şimdi [1], s. 124'teki

$$\begin{aligned}
(\nabla K)(X_1, \dots, X_S, X) &= (\nabla_X K)(X_1, \dots, X_S) \\
&= \nabla_X(K(X_1, \dots, X_S)) - \sum_{i=1}^S K(X_1, \dots, \nabla_X X_i, \dots, X_S)
\end{aligned} \quad (6)$$

formülünü kullanarak

$$\begin{aligned}
& \omega (\nabla_{Z_1} \varphi X, Z_2) - \omega (\varphi (\nabla_{Z_1} X), Z_2) + \omega (Z_1, \nabla_{Z_2} \varphi X) - \\
& \omega (Z_1, \varphi (\nabla_{Z_2} X)) = \omega ((\nabla \varphi)(X, Z_1), Z_2) + \omega (Z_1, (\nabla \varphi)(X, Z_1))
\end{aligned} \quad (7)$$

elde edilir. (5) ve (7) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
(\Phi_{\varphi} \omega)(X, Z_1, Z_2) &= \varphi X(\omega(Z_1, Z_2)) - X(\omega(\varphi Z_1, Z_2)) - \omega(\nabla_{\varphi X} Z_1, Z_2) + \omega((\nabla \varphi)(X, Z_1), Z_2) \\
& + \omega(Z_1, (\nabla \varphi)(X, Z_2)) + \omega(T(\varphi X, Z_1), Z_2) - \omega(Z_1, \nabla_{\varphi X} Z_2) + \omega(Z_1, T(\varphi(X, Z_2))) \\
& + \omega(\varphi(\nabla_X Z_1), Z_2) - \omega(\varphi(T(X, Z_1)), Z_2) + \omega(\varphi Z_1, \nabla_X Z_2) - \omega(Z_1, \varphi(T(X, Z_2)))
\end{aligned}$$

bulunur. Burada yapının almost integrallenebilir (yani $\nabla \varphi = 0$, $T = 0$) olduğunu gözönüne alarak

$$\begin{aligned}
(\Phi_{\varphi} \omega)(X, Z_1, Z_2) &= \varphi X(\omega(Z_1, Z_2)) - X(\omega(\varphi Z_1, Z_2)) - \omega(\nabla_{\varphi X} Z_1, Z_2) \\
& - \omega(Z_1, \nabla_{\varphi X} Z_2) + \omega(\varphi(\nabla_X Z_1), Z_2) + \omega(\varphi Z_1, \nabla_X Z_2)
\end{aligned} \quad (8)$$

yazılır. (8) eşitliğinde (6) ifadesi kullanılır ve $\nabla_X f = Xf$ olduğunu dikkate alırsak

$$\begin{aligned}
(\Phi_{\varphi} \omega)(X, Z_1, Z_2) &= (\nabla_{\varphi X} \omega)(Z_1, Z_2), \\
(\nabla_X(\omega \circ \varphi))(Z_1, Z_2) &= (\nabla_{\varphi X} \omega)(Z_1, Z_2) - (\nabla_X \omega)(Z_1, Z_2) = (\tilde{\Phi}_{\varphi} \omega)(X, Z_1, Z_2)
\end{aligned} \quad (9)$$

elde edilir.

Vishnevski operatörü g Riemann metrik tensörüne uygulanırsa ve ∇ konneksiyonu olarak Riemann konneksiyonu alınırsa her zaman $(\tilde{\Phi}_{\varphi} \omega)(X, Z_1, Z_2) = 0$ olduğu görülür. Eğer g pür tensör ve Riemann konneksiyonunda Π - yapı almost integralenebilir ise 2.1. Lemma ve (9) ifadesine göre g her zaman almost A - holomorf tensör olur.

3. Horizontal Liftin Taşınması

Şimdi kabul edelimki V_n Riemann manifoldudur. $T_q^p(V_n)$ ve $T_{q+1}^{p-1}(V_n)$ ise bu Riemann Manifoldu üzerinde sırasıyla (p,q) ve $(p-1, q+1)$ tipli tensör demetleri olsun.

$$f : T_q^p(V_n) \rightarrow T_{q+1}^{p-1}(V_n), (y^I = y^I(x^K); I, K = 1, 2, 3, \dots, n+n^{p+q})$$

diffeomorfizmi

$$\left\{ \begin{array}{l} y^j = \delta_k^j x^k \\ y^{\bar{j}} = t_{ij \dots j_q}^{i_2 \dots i_p} \\ = g_{im} t_{ij \dots j_q}^{mi_2 \dots i_p} \\ = g_{il_1} t_{k_1 \dots k_q}^{l_1 l_2 \dots l_p} \delta_{l_2}^{i_2} \dots \delta_{l_p}^{i_p} \delta_{j_1}^{k_1} \dots \delta_{j_q}^{k_q} \\ = g_{il_1} \delta_{l_2}^{i_2} \dots \delta_{l_p}^{i_p} \delta_{j_1}^{k_1} \dots \delta_{j_q}^{k_q} x^{\bar{k}} \end{array} \right.$$

şeklinde tanımlansın. Burada “.” indeksin indirilmesini gösterir ve $x^{\bar{k}} = t_{k_1 \dots k_q}^{l_1 l_2 \dots l_p}$ alınmıştır. f dönüşümünün Jakobian matrisi

$$A = \left(\frac{\partial y^I}{\partial x^K} \right) = \left(\begin{array}{c} \delta_k^i \quad \quad \quad 0 \\ 0 \quad g_{il_1} \delta_{l_2}^{i_2} \dots \delta_{l_p}^{i_p} \delta_{j_1}^{k_1} \dots \delta_{j_q}^{k_q} \end{array} \right)$$

şeklinde. f^{-1} ters dönüşümü

$$\left\{ \begin{array}{l} x^k = y^k = \delta_i^k y^i \\ x^{\bar{k}} = t_{k_1 \dots k_q}^{l_1 \dots l_p} \\ = g^{lm} t_{mk_1 \dots k_q}^{l_2 \dots l_p} \\ = g^{li} t_{ij \dots j_q}^{i_2 \dots i_p} \delta_{l_2}^{i_2} \dots \delta_{l_p}^{i_p} \delta_{k_1}^{j_1} \dots \delta_{k_q}^{j_q} \\ = g^{li} \delta_{l_2}^{i_2} \dots \delta_{l_p}^{i_p} \delta_{k_1}^{j_1} \dots \delta_{k_q}^{j_q} y^{\bar{i}} \end{array} \right.$$

olarak yazılır. Bu dönüşümün Jakobian matrisi

$$A^{-1} = \left(\frac{\partial x^K}{\partial y^I} \right) = \left(\begin{array}{c} \delta_i^k \quad \quad \quad 0 \\ 0 \quad g^{li} \delta_{l_2}^{i_2} \dots \delta_{l_p}^{i_p} \delta_{k_1}^{j_1} \dots \delta_{k_q}^{j_q} \end{array} \right)$$

biçimindedir.

$\varphi \in T_1^l(V_n)$ afinor alanının $T_q^p(V_n)$ ve $T_{q+l}^{p-1}(V_n)$ tensör demetlerine, bunlar arasında f diffeomorfizminde karşılık gelen kesitler boyunca ${}^H\varphi_1$ ve ${}^H\varphi_2$ yatay liftleri

$${}^H\varphi_l^k = \varphi_l^k, \quad {}^H\varphi_j^k = 0, \quad {}^H\varphi_l^{\bar{k}} = -\tilde{\Phi}_j \xi_{k_1 \dots k_q}^{i_1 \dots i_p}$$

$${}^H\varphi_j^{\bar{k}} = \begin{cases} \varphi_{s_1}^{i_1} \delta_{s_2}^{i_2} \dots \delta_{s_p}^{i_p} \delta_{k_1}^{r_1} \dots \delta_{k_q}^{r_q}, & p \geq 1, q \geq 0 \\ \delta_{s_1}^{i_1} \dots \delta_{s_p}^{i_p} \delta_{k_1}^{r_1} \dots \delta_{k_q}^{r_q}, & p \geq 0, q \geq 1 \end{cases}$$

formülü kullanılarak tanımlanır.

3.1. Teorem : Kabul edelim ki ${}^H\varphi_1$ ve ${}^H\varphi_2$, $\varphi \in T_1^l(V_n)$ afinor alanının uygun olarak $T_q^p(V_n)$ ve $T_{q+l}^{p-1}(V_n)$ tensör demetlerine f diffeomorfizminde karşılık gelen kesitler boyunca yatay liftleri olsun. Eğer $\tilde{\Phi}_\varphi(g) = 0$ ($\tilde{\Phi}_\varphi$ Vishnevski operatörü, g Riemann metrik tensörü) ise bu durumda ${}^H\varphi_2$, f diffeomorfizmi yardımıyla, ${}^H\varphi_1$ liftinin taşınmasıdır.

İspat: Gerçekten de

$${}^H\varphi_2 = \begin{pmatrix} \varphi_j^i & 0 \\ \tilde{\Phi}_j \xi_{i_1 \dots i_q}^{i_2 \dots i_p} \varphi_l^i \delta_{j_1}^{i_1} \dots \delta_{j_q}^{i_q} \delta_{k_2}^{i_2} \dots \delta_{k_p}^{i_p} \end{pmatrix} \quad (10)$$

şeklinde (bkz.[2]). Burada $\tilde{\Phi}_j$,

$$\tilde{\Phi}_j \xi_{i_1 \dots i_q}^{i_2 \dots i_p} = \varphi_j^m \nabla_m \xi_{i_1 \dots i_q}^{i_2 \dots i_p} - \varphi_i^m \nabla_{j_1} \xi_{m i_1 \dots i_q}^{i_2 \dots i_p}$$

olarak tanımlanan Vishnevski operatörüdür. Açık olarak

$$\tilde{\Phi}_j \xi_{i_1 \dots i_q}^{i_2 \dots i_p} = \tilde{\Phi}_j (g_{im} \xi_{i_1 \dots i_q}^{m i_2 \dots i_p}) = g_{im} \tilde{\Phi}_j \xi_{i_1 \dots i_q}^{m i_2 \dots i_p} + (\tilde{\Phi}_j g_{im}) \xi_{i_1 \dots i_q}^{m i_2 \dots i_p}$$

olur. Bunu (10) formülünde yerine yazıp ve A, A^{-1} , ${}^H\varphi_1$ kullanılırsa $\tilde{\Phi}_j g_{im} = 0$

koşulu altında

$${}^H\varphi_2 = \begin{pmatrix} \varphi_j^i & 0 \\ -g_{im} \tilde{\Phi}_j \xi_{i_1 \dots i_q}^{m i_2 \dots i_p} - (\tilde{\Phi}_j g_{im}) \xi_{i_1 \dots i_q}^{m i_2 \dots i_p} & \varphi_l^i \delta_{j_1}^{i_1} \dots \delta_{j_q}^{i_q} \delta_{k_2}^{i_2} \dots \delta_{k_p}^{i_p} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} \varphi_j^i & 0 \\ -g_{im} \tilde{\Phi}_j \xi_{j_1 \dots j_q}^{m i_2 \dots i_p} & \varphi_i^l \delta_{j_1}^{l_1} \dots \delta_{j_q}^{l_q} \delta_{k_2}^{i_2} \dots \delta_{k_p}^{i_p} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \delta_k^i & 0 \\ 0 & g_{il_1} \delta_{l_2}^{i_2} \dots \delta_{l_p}^{i_p} \delta_{j_1}^{k_1} \dots \delta_{j_q}^{k_q} \end{pmatrix} \\
&\times \begin{pmatrix} \varphi_l^k \\ -\tilde{\Phi}_l \xi_{k_1 \dots k_q}^{l_1 \dots l_p} & \varphi_{s_1}^{l_1} \delta_{s_2}^{l_2} \dots \delta_{s_p}^{l_p} \delta_{k_1}^{r_1} \dots \delta_{k_q}^{r_q} \end{pmatrix} \\
&\times \begin{pmatrix} \delta_j^i & 0 \\ 0 & g^{s_1 l} \delta_{r_1}^{l_1} \dots \delta_{r_q}^{l_q} \delta_{k_2}^{s_2} \dots \delta_{k_p}^{s_p} \end{pmatrix} \\
&= A^H \varphi_1 A^{-1}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{cases} x^{\bar{i}} = t^{s_1 \dots s_p}, & x^{\bar{k}} = t^{l_2 \dots l_p} \\ \quad \quad \quad r_1 \dots r_q & \quad \quad \quad k_1 \dots k_q \\ y^{\bar{i}} = t^{i_2 \dots i_p}, & y^{\bar{j}} = t^{k_1 \dots k_p} \\ \quad \quad \quad i_1 \dots j_q & \quad \quad \quad i_1 \dots l_q \end{cases}$$

biçimindedir.

Bu teoremden, çok önemli olan, şu sonuç çıkarılır:

3.2 Sonuç: Eğer ∇ Riemann konneksiyonu ise ${}^H\varphi_2$, f diffeomorfizmi yardımıyla, ${}^H\varphi_1$ yatay liftinin taşınmasıdır.

Eğer g , Π - yapısına göre pür tensör ve Π - yapısı ∇ Riemann konneksiyonunda almost integrallenebilir ise bu durumda (2. Başlıkta verilenlere göre) $\tilde{\Phi}_\varphi(g) = 0$ almost holomorfluk koşulu olacaktır.

KAYNAKLAR

- [1]. KOBAYASHI, S., NOMIZU, K. (1963), Foundation of Differential Geometry I, New York: Interscience Publishers.
- [2]. MAĐDEN, A., SALIMOV, A.A. (1997), "Afinorun tensör demete kesit boyunca tam lifti" Sakarya Üniv. Matematik Semp.
- [3]. TACHIBANA, S. (1960), "Analytic tensor and generalization" Tohoku Math. J., 201-221.
- [4]. VISHNEVSKI, V.V., SHIROKOV, A.P., SHURYGIN, V.V. (1985), "Spaces over algebras" Kazan Gos. Univ., Kazan, (Russian).
- [5]. YANO, K., AKO, M. (1968), "On certain operators associate with tensor fields" Kodai Math. Sem. Rep., 20(4), 414-436.