Matrislerin Hadamard Çarpımı Üzerine*

İ. Halil GÜMÜŞ, Necati TAŞKARA

Selçuk Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Konya

Özet: Bu çalışmada lineer cebirde önemli bir yere sahip olan matrislerin Hadamard çarpımı ile ilgili eşitsizlikler derlenmiştir. Hadamard çarpım ve Kronecker çarpım tanıtılıp, bu çarpımlar arasındaki ilişkilerden bahsedilmiştir. Çalışmanın esas kısmında ise Hadamard çarpımı içeren eşitsizlikler üzerinde durulmuştur. Son olarak da iki matrisin Kronecker çarpımlarının izi ile Hadamard çarpımlarının izi arasında bir bağlantı verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Hadamard Çarpım, Kronecker Çarpım, Pozitif tanımlı matris, Pozitif yarı tanımlı matris, M- Matris, Matris eşitsizlikleri

On the Hadamard Product of Matrices

Abstract: In this study, the inequalities related to Hadamard product of matrices which has a significant place in linear algebra was compilated. Hadamard product and Kronecker product were introduced and the relations among these products were mentioned. In the main section of study, the inequalities including Hadamard product were emphasized. Finally an equality between the traces of Kronecker product and Hadamard product of two matrices is discovered.

Key Words: Hadamard product, Kronecker product, Positive definite matrix, Positive semidefinite matrix, M- Matrix, Matrix inequalities

Giriş

Hadamard çarpımın cebirsel ve analitik özelliklerine dair ilk sistematik çalışmalar Schur'un 1911'deki çalışmasında görülmüştür. Schur bu çalışmasında, aynı mertebeli iki pozitif yarı tanımlı matrisin Hadamard çarpımın da pozitif yarı tanımlı matris olduğunu ispatlamıştır. Schur'un 1911'deki çalışmasının orijinalliğinden dolayı Hadamard çarpım Schur çarpımı olarak da anılmaktadır. Zaman içinde Hadamard çarpımı, Hadamard-Schur product, Schur-Hadamard product, pointwise product, pointwise multiplication, element-product gibi değişik şekilde adlandırılmıştır. Horn, 1990'daki çalışmasında Hadamard çarpımın tarihsel gelişimini Schur'un teoremlerini, Hadamard çarpımın değişik yollarla kabulünü göstermiştir. Hadamard çarpımı içeren öneriler vermiştir. Horn'un bu çalışması, Hadamard çarpım üzerine çalışan matematikçilere temel kaynak olmuştur.

$A=\left[a_{ij}\right]$ ve $B=\left[b_{ij}\right]$, $m\times n$ matrisler olsun. $A\circ B=\left[a_{ij}b_{ij}\right]_{m\times n}$ çarpımına *A* ile *B* matrisinin *Hadamard çarpımı* denir. Çarpımın tanımı gereği iki matrisin Hadamard çarpımının yapılabilmesi için mertebelerinin aynı olması gerekir. Matrislerin kare matris olması gerekmez. *A* ve *B* matrisleri aynı mertebeli fakat kare matris olmasınlar. Bu durumda *AB* normal matris çarpımı tanımlı değildir ama $A\circ B$ Hadamard çarpımı tanımlıdır. Aynı mertebeli kare matris olmaları durumunda her iki çarpım da tanımlıdır. Normal matris çarpımı gibi Hadamard çarpımı da birleşme ve toplama işlemi üzerine dağılma özelliğine sahiptir. Hadamard çarpım işleminin birim elemanı, bütün bileşenleri 1 olan matristir. Bu matris *J* ile belirtilir. Bir matrisin Hadamard çarpımına göre ters-çevrilebilir olması için tüm bileşenleri sıfırdan farklı olmalıdır. Temel halka,

---

*Bu derleme İbrahim Halil GÜMÜŞ' ün Yüksek Lisans çalışmasının bir parçasıdır.

E-mail: gumusibo@hotmail.com

değişme özelliğine sahip ise Hadamard çarpımı da değişme özelliğine sahiptir. Hadamard çarpımı ile normal matris çarpımı arasındaki en önemli farklardan biri budur. Kompleks bileşenli $m\times n$ matrislerin kümesi $M_{m,n}(\mathbb{C})$ ile gösterilir. Ayrıca $M_n \equiv M_{n,n}$ dir. Böylece M_n iki yolla cebirdir. Her iki cebirde de matris toplamı vardır. Fakat cebirlerden biri normal matris çarpımı ile ötekisi ise Hadamard çarpımı ile kurulur. Hadamard çarpımı hakkındaki birçok ilginç soru bu iki cebir arasındaki farktan ortaya çıkar. Bu iki cebir bazen benzer sonuçlar verirken bazen farklı sonuçlar verir. Hadamard çarpımı üzerine yapılan araştırmaların iki alanı, kuadratik formlar ve değişik norm eşitsizlikleri hakkındaki sorulardır. Bunların çoğu normal matris çarpımı üzerine bilinen eşitsizliklerle benzerlik kurularak ortaya çıkar. Hadamard çarpımın cebirsel ve analitik özelikleri üzerine ilk sistematik çalışmalar Schur'un 1911'deki çalışmalarında görülür. Bu çalışmada Schur; *A* ve *B* aynı mertebeli iki pozitif yarı tanımlı matris ise $A\circ B$'nin de pozitif yarı tanımlı matris olduğunu ispatlamıştır. Bu çarpım teoremi Schur'un ismi ile anılır. Ayrıca Schur spektral norm için, $\|A\circ B\|_2 \le \|A\|_2\,\|B\|_2$ eşitsizliğini ispatlamış ve her iki matrisin de pozitif yarı tanımlı olması halinde bu sınırlama için bazı sonuçlar vermiştir. Bu sonuçlardan önce çalışmamızda da yer alan pozitif (yarı)tanımlılıktan bahsedelim.

A, $n\times n$ hermityen matris olsun. Sıfırdan farklı tüm $x\in C^n$ için

$$x^* Ax > 0$$

oluyorsa *A* matrisine *pozitif tanımlı matris* denir. Eğer

$$x^* Ax \ge 0$$

oluyorsa, *A* matrisine *pozitif yarı tanımlı matris* denir. *A* pozitif tanımlı matris ise ayrıca pozitif yarı tanımlı matristir. Eğer *A* tekil olmayan pozitif yarı tanımlı matris ise pozitif tanımlı matristir.

Teorem 1. $A=\left[a_{ij}\right]$ ve $B\in M_n$ verilmiş olsun. Öyleyse

a) A ve *B* pozitif yarı tanımlı matrisler ise, $A\circ B$'de pozitif yarı tanımlıdır.
b) A ve *B* pozitif yarı tanımlı matrisler ise

$$\left(\min a_{ii}\right)\lambda_{\min}\left(B\right)\le \lambda_{\min}\left(A\circ B\right)\le \lambda_{\max}\left(A\circ B\right)\le \left(\max a_{ii}\right)\lambda_{\max}\left(B\right)$$

dır.
c) *B* pozitif tanımlı matris ve *A*'da esas köşegen elemanları pozitif olan pozitif yarı tanımlı matris ise $A\circ B$'de pozitif tanımlı matristir.
d) *A* pozitif yarı tanımlı matris ise $\|A\circ B\|_2 \le \left(\max a_{ii}\right)\|B\|_2$ dır.
e) $c_1\left(Z\right)$, Z matrisinin sütunlarının maksimum Öklid uzunluklarını belirtmek üzere $x,y\in M_{r,n}$ için $A=x^H y$ ise $\|A\circ B\|_2 \le C_1\left(x\right)C_{,}\left(Y\right)\|B\|_2$ dir.

f) $\|A\circ B\|_2 \le \|A\|_2\,\|B\|_2$ dır.

$A=\left[a_{ij}\right]\ ve\ B=\left[b_{ij}\right]$ matrisleri sırasıyla $m\times n$ ve $p\times r$ mertebeli iki matris olsun.

$$A\otimes B=\begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

çarpımına *Kronecker çarpımı* denir. Başka bir deyişle, eğer $A=\left[a_{ij}\right]\in M_{m,n}(\mathbb{C})$ ve $B=\left[b_{ij}\right]\in M_{p,q}(\mathbb{C})$ verilmişse bu matrislerin $A\otimes B$ Kronecker çarpımı, mertebesi $mp\times nq$ olan $\left[a_{ij}B\right]$ matrisidir. $A,B\in M_{m,n}$ ise $A\otimes B$ matrisinin
$1,n+2,2n+3,3n+4,...,(n-1)n+n=n^2$
sütunları ile
$1,m+2,2m+3,3m+4,...,(m-1)m+m=m^2$
satırlarının kesişimindeki bileşenlere bakarsak $A\circ B$ Hadamard çarpımın bileşenlerini buluruz.
A ile B aynı mertebeli iki matris ise $A\circ B,\ A\otimes B$ matrisinin alt matrisidir. Ek olarak *A* ve *B* kare matris iseler $A\circ B,\ A\otimes B$ matrisinin esas alt matrisidir. Hadamard çarpımı, Kronecker çarpımın alt matrisi olarak kabul etme birçok önemli bilgiye ulaşmamızı sağlayacaktır. Çünkü bir matris hakkında bilinen eşitsizlikler veya bazı ilişkiler o matrisin alt matrisinde de görülebilir. Bu ilişkilerden bazıları singüler değerler, bir genel kompleks dikdörtgen matrisin rankı, bir Hermityen matrisin özdeğerleri, negatif bileşeni olmayan bir kare kompleks matrisin spektral yarı çapı vb.
Kronecker çarpımının önemli bir özelliği karma çarpım kuralıdır. Bu kural

$$\left(x,y\right)\otimes\left(x_2y_2\right)=\left(x_1\otimes x_2\right)\left(y_1\otimes y_2\right)$$

şeklindedir.

Kolayca görülebilir ki; köşegen, simetrik, normal, hermityen veya üniter iki matrisin Kronecker çarpımı da sırayla aynı özelliklere sahip bir matristir.

A ve B matrislerinin singüler değer ayrışımı $A=V_1\sum_1 W_1^H$ ve $B=V_2\sum_2 W_2^H$ şeklinde verilsin. Buradan karma çarpım kuralı ile

$$A\otimes B=\left(V_1\otimes V_2\right)\left(\sum_1\otimes\sum_2\right)\left(W_1\otimes W_2\right)^H$$

yazılabilir.

Özellikle $A\otimes B$ matrisinin singüler değerleri, *A* ve *B* matrislerinin kendi singüler değerlerinin karşılıklı çarpımlarıdır. Böylece $A\otimes B$'nin spektral normu (ki bu norm, $A\otimes B$'nin en büyük singüler değeridir) A ve *B* matrislerini spektral normlarının çarpımıdır. Yani,

$$\left\|A\otimes B\right\|_2=\left\|A\right\|_2\left\|B\right\|_2$$

dır.

$$\left\|\hat{A}\right\|_2\leq\left\|A\right\|_2\qquad \hat{A}\in M_{r,s},\ A\in M_{m,n}$$

nin alt matrisi

$$\left\|A\circ B\right\|_2\leq\left\|A\otimes B\right\|_2=\left\|A\right\|_2\left\|B\right\|_2\quad\forall\ A,B\in M_{m,n}$$

olur.

Bir matrisin pozitif singüler değerlerinin sayısı, o matrisin rankına eşit ve bir alt matrisin rankı, bir üst matrisin rankından büyük olmadığı durumda

$$rank(A\circ B)\leq rank(A\otimes B)=(rankA)(rankB)$$

olur [1].

Matrislerin Hadamard Çarpımı İçin Bazı Teoremler

Bu kısımda matrislerin Hadamard ve Kronecker çarpımları ile ilgili bazı teoremler verip, bu sonuçlardan elde ettiğimiz bir teoremi ispatsız olarak vereceğiz.

Teorem 2. *A* ve *B* *n*×*n* pozitif tanımlı Hermityen matrisler ve $r, s \in \mathbb{R}$ $(r, s \neq 0)$ olsun. $s > r$ ise

$$\left(A^s \circ B^s\right)^{1/s} \geq \left(A^r \circ B^r\right)^{1/r}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat: [3] de bulunabilir.

Teorem 3. J_n^T, $n \times n^2$ seçim matrisi;

$$J_n^T = \left[E_{11}^{(n)}, E_{22}^{(n)}, ..., E_{nn}^{(n)}\right]$$

biçiminde tanımlansın. Burada E_{ii} matrisleri, $n \times n$ tipinde (i,i) bileşeni 1, diğer bileşenleri 0 olan matrisler olsun. $J_n^T J = I$ dır. $A, B \in M_{n,m}$ ise

$$A \circ B = J_n^T \left(A \otimes B\right) J_m$$

dir [2].

İspat:

$$J_n^T \left(A \otimes B\right) J_m = \left[E_{11}^{(n)}, ..., E_{nn}^{(n)}\right] \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}B & \cdots & a_{nm}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11}^{(m)} \\ \vdots \\ E_{mm}^{(m)} \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} diag\ \left(a_{1k}, a_{2k}, ..., a_{nk}\right) B E_{kk}^{(m)}$$

$$= \left[\sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{ij} \delta_{jk}\right]$$

$$= \left[a_{ij} b_{ij}\right] = A \circ B$$

Teorem 4. A_i, $i = 1, ..., k$ $n \times n$ matris olsun. $J^T J = I$ olacak şekilde $n^k \times n$, J seçim matrisi varsa

$$\mathop{\circ}_{i=l}^{k} A_i = J^T \left(\mathop{\otimes}_{i=\imath}^{k} A_i\right) J$$

eşitsizliği geçerlidir [4].

İspat. *A, B* ve *C* matrisleri için ispatı yapalım. Karma çarpım kuralından

$$\begin{aligned}
A \circ B \circ C &= A \circ J^{T}\left(B \otimes C\right)J \\
&= J^{T}\left(A \otimes \left(J^{T}\left(B \otimes C\right)J\right)\right)J \\
&= J^{T}\left(\left(IAI\right) \otimes \left(J^{T}\left(B \otimes C\right)J\right)\right)J \\
&= J^{T}\left(I \otimes J^{T}\right)\left(A \otimes B \otimes C\right)\left(I \otimes J\right)J \\
&= J^{T}\left(I \otimes J\right)^{T}\left(A \otimes B \otimes C\right)\left(I \otimes J\right)J \\
&= \hat{J}^{T}\left(A \otimes B \otimes C\right)\hat{J}
\end{aligned}$$

olur ki, ispat tamamlanır. Burada $\hat{J} = \left(I \otimes J\right)J,\ n^{3} \times n$ matrisidir. ($\hat{J}^{T}\hat{J} = I$)

$A,\ n \times n$ tipinde bir matris olsun. Eğer *B* negatif olmayan $n \times n$ matris ve negatif olmayan λ reel sayıları için, $A = \lambda I - B$ ve $\lambda \geq p\left(B\right)$ ise *A*'ya *M*- matris denir. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için $\det A_{k} > 0$ oluyorsa *A*'ya *M*- matris denir.

Teorem 5. $A = \left(a_{ij}\right)$ ve $B = \left(b_{ij}\right)$ matrisleri *M* matris veya $n \times n$ tipinde pozitif tanımlı reel simetrik matrisler ise

$$\det\left(A \circ B\right) \geq \det\left(AB\right)\prod_{k=2}^{n}\left(\frac{a_{kk}\det A_{k-1}}{\det A_{k}} + \frac{b_{kk}\det B_{k-1}}{\det B_{k}} - 1\right)$$

dır [5].

İspat: $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\left(a_{kk} - \frac{\det A_{k}}{\det A_{k-1}} + \varepsilon\right)\left(b_{kk} - \frac{\det B_{k}}{\det B_{k-1}} + \varepsilon\right) > a_{kk}b_{kk} - \frac{\det\left(A_{k} \circ B_{k}\right)}{\det\left(A_{k-1} \circ B_{k-1}\right)}$$

dır. $\varepsilon \to 0$ iken

$$\left(a_{kk} - \frac{\det A_{k}}{\det A_{k-1}}\right)\left(b_{kk} - \frac{\det B_{k}}{\det B_{k-1}}\right) \geq a_{kk}b_{kk} - \frac{\det\left(A_{k} \circ B_{k}\right)}{\det\left(A_{k-1} \circ B_{k-1}\right)}$$

elde edilir. Buradan da

$$\frac{\det\left(A_{k} \circ B_{k}\right)}{\det\left(A_{k-1} \circ B_{k-1}\right)} \geq \frac{\det A_{k}.\det B_{k}}{\det A_{k-1}.\det B_{k-1}}\left(\frac{a_{kk}\det A_{k-1}}{\det A_{k}} + \frac{b_{kk}\det B_{k-1}}{\det B_{k}} - 1\right)$$

$$\prod_{k=2}^{n}\frac{\det\left(A_{k} \circ B_{k}\right)}{\det\left(A_{k-1} \circ B_{k-1}\right)} \geq \prod_{k=2}^{n}\frac{\det A_{k}.\det B_{k}}{\det A_{k-1}.\det B_{k-1}}\left(\frac{a_{kk}\det A_{k-1}}{\det A_{k}} + \frac{b_{kk}\det B_{k-1}}{\det B_{k}} - 1\right)$$

olur. Sonuç olarak

$$\det\left(A \circ B\right) \geq \det\left(AB\right)\left(\frac{a_{kk}\det A_{k-1}}{\det A_{k}} + \frac{b_{kk}\det B_{k-1}}{\det B_{k}} - 1\right)$$ bulunur.

Bir matrisin şart sayısı, o matrisin spektral normu ile o matrisin tersinin spektral normunun çarpımına eşittir. Yani, bir *A* matrisinin şart sayısı $K(A)=\|A\|_2 . \|A^{-1}\|_2$ dir.

Teorem 6. Herhangi *D* singüler olmayan köşegen matrisi için *A* pozitif tanımlı kompleks matris ise

$$K(DAD) \geq 2\|A \circ A^{-1}\|_2 - \|A \circ A^{-1}\|_2^{-1}$$

dir [2].

Bu teoremlerin ışığında elde ettiğimiz sonucu bir teorem olarak verelim.

Teorem 7. $A=[a_{ij}],\ B=[b_{ij}]$ $n \times n$ matrisler ise

$$iz(A \otimes B) = n.iz(A \circ B) - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+\imath}^{n} (a_{ii}-a_{jj})(b_{ii}-b_{jj})$$

eşitliği geçerlidir [6].

Sonuçlar ve Öneriler

Bu çalışma bir derleme olup matrislerin Hadamard çarpımını içeren eşitsizlikler üzerinde duruldu. Matrislerin Hadamard çarpımlarının determinantlarını, normlarını içeren eşitsizlikler verildi. Kronecker çarpım ile Hadamard çarpım arasındaki ilişki üzerinde duruldu. Sonuç olarak; iki matrisin Kronecker çarpımlarının izi ile Hadamard çarpımlarının izi arasında bir ilişki elde edildi.

Kaynaklar

[1] Horn, R.A., **The Hadamard Product**, in; Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, vol. 40, American Mathematical Society Providence, (1990).

[2] Visick, G., **A quantitative version of the Observation that the Hadamard product is a principal submatrix of the Kronecker product**, Linear Algebra and Its Applications 304, 45-68, (2000).

[3] Mond, B. and Pecaric, J.E., **Inequalities For The Hadamard Product of Matrices,** Siam J. Matrix Anal. Appl., Vol. 19, No. 1, 66-70, Zagreb, (1998).

[4] Mond, B. and Pecaric, J.E., **On Inequalities Involving The Hadamard Product of Matrices**, The Electronic Journal of Linear Algebra, Volume 6 56-61, Zagreb, (2000).

[5] Chen, S., **Some determinantal inequalities For Hadamard Product of Matrices**, Linear Algebra and Its Applications 368, 99-106, Fuzhou, (2003).

[6] Gumus, I.H., **Yüksek Lisans Tezi**, S.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya (2005).