METAZİHİN YAPAY ZEKA VE ZİHİN FELSEFESİ DERGİSİ

METAMIND: JOURNAL OF ARTIFICIAL INTELLIGENCE AND PHILOSOPHY OF MIND

ISSN: 2651-2963
www.dergipark.org.tr/metazihin

Cilt: 5, Sayı: 1, Haziran 2022, 41-66
Volume: 5, Issue: 1, June 2022, 41-66

Gödel'in Tamamlanamazlık Teoremleri Bakımından Biçimsel Dillerde İspatlanabilirlik-Doğruluk İlişkisi

[The Provability-Truth Relation in Formal Languages in Terms of Gödel's Incompleteness Theorems]

Ümit TAŞTAN
Aksaray Üniversitesi

Received: 04.01.2022 / **Accepted:** 27.06.2022
DOI: 10.51404/metazihin.1053120
Research Article

Abstract: In this article, we try to show the limits of formalism based on Gödel's incompleteness theorems. The most fundamental debate in our study is shaped by the tension between formal provability and truth. The studies that started with Frege's project to reduce arithmetic to logic and continued with Hilbert's formalist program aimed to establish a solid foundation for mathematics. But when Gödel proved that some propositions could not be decided formally, the pervasiveness of Hilbert's formalist program took a hit. On the other hand, Gödel's theorems initiated a discussion on the relation between provability and truth, since it showed that there were propositions for which a proof could not be provided, but nonetheless were said to be true. In our study, we try to show the limits of provability in a formal language based on Gödel's theorems. Thus, our study concludes that formal provability could not encompass reality.

Keywords: mathematical paradox, Gödel, Hilbert, truth, undecidability, formalism, incompleteness theorems, provability.

Öz: Bu makalede Gödel'in tamamlanamazlık teoremlerinden hareketle biçimselciliğin sınırlarını göstermeyi amaçlıyoruz. Çalışmamızdaki en temel tartışma biçimsel olarak ispat edilebilirlik ile doğruluk arasındaki gerilime dayanmaktadır. Frege'nin aritmetiği mantığa indirgeme projesiyle başlayan ve Hilbert'in biçimselcilik projesiyle devam eden çalışmalar matematiğe sağlam bir temel oluşturma amacını taşıyordu. Fakat Gödel bazı önermelere biçimsel olarak karar verilemeyeceğini ispatlayınca Hilbert'in biçimselcilik projesinin kuşatıcılığı da darbe almış oldu. Diğer taraftan

Author Info: Ümit Taştan
Aksaray University, Faculty of Arts and Sciences, Department of Philosophy, 68100 Aksaray, TURKEY.
E-mail: umit16tastan@gmail.com

To Cite This Paper: Taştan, Ü. (2022). "Gödel'in Tamamlanamazlık Teoremleri Bakımından Biçimsel Dillerde İspatlanabilirlik ve Doğruluk İlişkisi." *MetaZihin, 5*(1): 41-66.

Gödel'in teoremleri ispatı verilemeyen ama yine de doğruluğundan bahsedilebilen önermelerin olduğunu gösterdiği için ispatlanabilirlik-doğruluk tartışmasını başlattı. Çalışmamızda Gödel'in teoremlerine dayanarak biçimsel bir dilde ispat edilebilirliğin sınırlarını göstermeye çalışıyoruz. Böylece çalışmamız biçimsel olarak ispat edilebilirliğin doğruluğu kuşatamadığı sonucuna varmaktadır.

Anahtar Kelimeler: matematiksel paradoks, Gödel, Hilbert, doğruluk, karar verilemezlik, biçimselcilik, tamamlanamazlık teoremleri, ispat edilebilirlik.

1. Giriş

Bilginin kesinliği ve doğruluğu konusunda ilk filozoflardan bu yana en çok kabul gören bilgi türlerinden birisi matematiksel bilgidir. Özellikle Öklid'in oluşturduğu aksiyomatik yöntem ile matematiğin evrensel olarak geçerli simgelerine tutarlı kurallar ekleyerek doğru önermeler elde edileceği düşüncesi, 19. yüzyıla kadar matematikçiler için sorgulanmaya bile gerek duyulmayan bir hakikatti. Fakat 19. yüzyıl başlarında ortaya çıkan Öklidçi olmayan geometriler ve matematiksel mantığa dayalı paradokslar, matematiğin tutarlılığına ilişkin sarsılmaz güveni zedeledi.

Bu çalışmada ilk olarak matematiğin tutarlılığının sorgulanmasına zemin hazırlayan matematiksel paradoksların ortaya çıktığı bağlam ele alınacaktır. Daha sonra matematiğin tutarlılığını tekrardan temin etmeye dönük en önemli çalışmalardan birisi olan Hilbert'in *biçimselcilik* (İng. *formalism*) programı ele alınacaktır. Sonrasında ise incelememizin esas konusunu teşkil eden Gödel'in Hilbert'in programına karşı eleştiri olarak ortaya attığı tamamlanamazlık teoremleri (İng. *incompleteness theorems*) ve matematiksel doğruluk (İng. *mathematical truth*) konusundaki görüşlerine yer verilecektir. Hilbert'in biçimselcilik anlayışı matematiksel doğruluğu ispatlanabilirlik ile özdeşleştiren bir anlayıştır. Fakat Gödel'in biçimsel olarak ispat edilemeyen ama doğru olan önermeler olduğunu göstermesiyle birlikte doğruluk ile ispatın özdeşliği de tartışmaya açılmıştır.

Matematikte bir teorinin veya ulaşılan sonucun ispat edilmesi o teorinin doğru (ya da yanlış) olduğunun gösterilmesi anlamına gelmektedir. Fakat burada bizim çalışmamız için de önemli olan bir nüans vardır. Mantık ve matematikte teoremlerin ispatı için yeterli ve doğru olduğu kabul edilen tamdeyim ya da formüllere aksiyom denilmektedir. Böylece bir teoremin ispatıyla kastedilen şey o teoremin doğru olduğunun gösterilmesi değil, bir veya birkaç aksiyomdan çıkarılabilir olduğunun gösterilmesidir (Yıldırım, 2017: 113). Başlangıçta doğru olduğu varsayılan aksiyomlardan türetilen önermeler zorunlu olarak başka önermeleri gerektirirler ve bir önermeyi başka önermelerin zorunlu sonucu yapan mantıksal ispat süreci kurulmuş olur.

Bahsettiğimiz bu mantıksal ispat yöntemi matematiğin teoremlerinin ispatı için de kullanılan bir yöntemdir. Pythagoras teoremine göre, dik açılı bir üçgende hipotenüsün uzunluğunun karesi, üçgenin diğer kenar uzunluklarının karelerinin toplamına eşittir. Bu durumda bu teorinin doğru olduğu nasıl ispat edilebilir? Bu teorinin doğru olduğunu cetvel ve açıölçer yardımıyla göstermek mümkündür. Fakat bu deney ispat için yeterli değildir. Çünkü belli bir dik açılı üçgen üzerindeki bulgumuzun tüm dik açılı üçgenler için de doğru olduğu, tamamlanamayacak bir sorgulamadır. Kaldı ki matematikçiler için bir teorinin deneyle doğrulanmasına ihtiyaç yoktur. Matematikçiler doğru kabul ettikleri aksiyomlardan yola çıkarak türettikleri önermeler arasında bir çelişki ortaya çıkmamasını arzu ederler. Böyle bir aksiyomatik sistemin tutarlı olduğunu ve matematiksel doğruluğun da teminatı olduğunu düşünmektedirler (Yıldırım: 113-114). Nitekim Hilbert'in de yapmak istediği şey matematiğin tüm önermelerinin çelişkisiz bir biçimde ilişkiye gireceği sistemi oluşturmaktır. Hilbert'in oluşturduğu biçimsel sistem matematiğin tutarlılığı için büyük bir potansiyel barındırıyordu ama Gödel'in teoremleri ortaya çıkınca bu potansiyel büyük bir zarar gördü.

Çalışmamızda Gödel'in Hilbert'e karşı savunduğu matematiksel doğruluğun inşa edilen "biçimsel dil" tarafından kuşatılamayacağına yönelik tezleri ele alınacaktır. Dolayısıyla çalışmamızın birincil hedefi Gödel'in tamamlanamazlık teoremlerinden hareketle matematiksel doğruluk ile ispat edilebilirlik arasındaki farkı incelemektir.

2. Matematiksel Doğruluğun Kâbusu: Paradokslar

Matematiğin temellerinin niçin sarsılmaya başladığını ele alabilmek için Öklid'den bu yana matematiğin kullandığı aksiyomatik yöntemi tanımak gereklidir. Çünkü aksiyomatik yöntem, matematiksel doğruların kendisinden yola çıkılarak inşa edildiği çok temel bir sistemi teşkil eder.

Aksiyomatik sistem, geometri ya da aritmetik gibi matematiğin belirli bir alanındaki doğruların aksiyomlarla, çıkarım kurallarıyla ve teoremlerle düzenlenmesine imkân sağlar. Aksiyomlar sistemin sezgisel olarak anlamlı temel doğruları olduğu için anlatmaya çalıştıklarını anlıyor olmamız doğru olduklarına inanmamız için yeterlidir. Eldeki aksiyomlardan diğer doğrulara ulaşabilmek için, mevcut bilinenlerin sonucu olan teoremlerden yola çıkarak doğruluğu koruyan çıkarım kurallarını kullanmak gerekmektedir (Goldstein, 2018: 111-112).

Öklid meşhur eseri *Elementler*'de, aksiyomatik sistemi kurarak ve bu sistem içerisinde çeşitli ispatları göstererek matematiğin mutlak doğru olduğu inancına asırlar boyunca kaynaklık etmiştir. Fakat 19. yüzyılın ilk yarısında Öklid'in postülalarından beşinci postüla ile çeliştiği halde diğer dört postüla ile tutarlı olan başka geometrik dizgeler geliştirilmiştir. Öklid'in en sorunlu postülası olarak bilinen beşinci postülayı tekrar hatırlayalım: "Eğer bir doğru iki doğruyu kestiğinde bu doğrunun aynı tarafındaki iç açılar iki dik açıdan küçükse, bu iki doğru o yönde uzatıldıklarında kesişir" (Sertöz, 2019: 3).

On dokuzuncu yüzyılın başlarında Janos Bolyai ve Nikolai Lobachevski adlı geometriciler noktalar ve çizgiler hakkında Öklid'den tamamen farklı bir biçimde bahsetmenin tutarlı yollarını göstermişlerdir. Daha sonra öklitdışı geometriler olarak anılan bu gösterimde "üçgen" denilen bir şeyin açılarının toplamı 180 dereceden az (hiperbolik geometri) veya fazla (eliptik geometri) olabilmektedir (Casti ve Depauli, 2004: 31).

Öklid'in beşinci postülası dünyanın düz bir haritası gibi düzlemsel alanlarda geçerli olan bir geometriyi ileri sürmektedir. Fakat dünyanın düz olmayan, küresel bir alana sahip olduğu düşünüldüğünde paralellik postülası olarak da ifade edilen beşinci postülanın bu alanlarda yanlışlandığı görülmektedir. Aynı zamanda beşinci postülaya denk bir ifade olan "üçgenin iç açıları toplamı 180 derecedir" gibi önermeler de küresel cisimlerin incelendiği eliptik geometri sisteminde yanlışlanmaktadır.

Böylelikle Öklid geometrisinin gerek fiziksel nesneler alanında gerekse de matematiksel nesneler alanında geçerli tek doğru sistem olmadığı ortaya çıkmıştır. Öklid geometrisinin bazı postülalarıyla çelişen ama kendi içinde tutarlı aksiyomatik dizgeler oluşturan bu yeni geometri sistemleri Öklid'den bu yana kullanılagelen aksiyomatik yöntemin sorgulanmasına neden olmuşlardır. Geometri özelinde ortaya çıkan bu çelişkiler matematiksel küme kuramı alanında da *Russell paradoksu* gibi pek çok paradoksun ortaya çıkmasıyla matematiksel akıl yürütmenin evrensel olarak geçerli olduğu inancına büyük darbe vurmuştur. Frege (Frege, 2008) *Aritmetiğin Temelleri* isimli eserinde hayatının en önemli projesi olarak aritmetiği mantığa indirgemeye çalışmaktadır. Ne var ki Frege bu eserinde tanımladığı yasalardan birisinin çelişkiye sebep olduğunu Russell'ın kendisine gönderdiği mektuptan öğrenir (Çevik, 2019: 71).

Nasıl ki Öklid'in beşinci postülası Öklidçi olmayan geometriler tarafından çürütüldüyse, Frege'nin yukarıda ifade edilen beşinci yasası da Russell'ın bu yasadan yola çıkarak bir paradoks ortaya koymasıyla çürütülmüştür.

> Düşündüğümüz her şeyi kapsayan kapsamlı küme, kendi kendisini de onun elemanlarından bir eleman olarak kapsamalıdır. Diğer bir deyişle, eğer "her şey" diye bir şey varsa, o zaman her şey bir şeydir ve "her şey" kümesinin bir elemanıdır. Fakat normal olarak bir küme kendisinin bir elemanı değildir. Örneğin insanlık, insan değildir. Şimdi

> kendi kendisinin elemanı olmayan kümeler topluluğunu düşünün. Bu bir kümedir: bu küme kendisinin bir elemanı mıdır yoksa değil midir? Eğer elemanıysa, kendi kendisinin elemanı olmayan kümelerden birisidir, yani kendisinin bir elemanı değildir. Eğer elemanı değilse, kendisinin elemanı olmayan kümelerden birisidir, yani kendisinin elemanıdır. Dolayısıyla iki hipotezin- yani kendisinin bir elemanı olduğu ve olmadığı- her birisi kendi çelişkisini gösterir. Bu bir çelişkidir. (Russell, 1919: 136-137)

Russell'ın kümeler kuramında bulduğu bu paradoks aritmetiği küme kavramından yararlanarak mantıksal temeller üzerine kurma amacında olan Frege'nin projesinde büyük bir yarık meydana getirmiştir. Böylece Öklid'in beşinci aksiyomunun ortaya çıkardığı tutarsızlık ve Frege'nin küme kavramının ortaya çıkardığı paradoks gibi sorunlar matematiğin temelleri hakkında büyük bir krize yol açmıştır. Asırlarca evrensel ve kesin bilginin temel kaynaklarından birisi olarak görülen matematiğin içerisinde ortaya çıkan tutarsızlıklar, matematiğin temellerini sağlamlaştırmak isteyen matematikçi filozofların en temel uğraş alanı haline gelmiştir.

3. Hilbert'in Biçimselcilik Programı

Kuşkusuz Frege gibi matematiği sağlam temellere dayandırmaya çalışan filozoflardan birisi de Hilbert'den başkası değildir. Hilbert, matematiğin tutarlılığını sağlayabilmek için mantıksal olmayan, gündelik dile ait bütün tanımlamaları matematikten arındırmak ve matematiği tamamen mantıksal sembollerle işleyen bir yapıya büründürmek gerektiğini düşünür. Bunu yaparken önerdiği yol, biçimsel dizgelerin tutarlılığının yine aynı dizgelerin içerisinde sonlu bir bakış açısıyla (İng. *finitary standpoint*) gösterilmesidir.

Bu metodolojik bakış açısı, matematiksel düşüncenin, tamamlanmış sonsuz bütünlüklere başvurmadan, sezgisel olarak tüm düşünceden önce anlık deneyim olarak var olan nesnelerle ve bu tür nesneler üzerindeki akıl yürütme yöntemleriyle sınırlandırılması sonucu elde edilir (Zach, 2019). Hilbert'in önerdiği biçimselcilik programı, matematiği soyut nesneler arasındaki ilişkileri konu edinen simgesel bir sistem haline getirmeyi amaçlamaktadır. Tamamlanmış sonsuz bütünlüklere başvurmadan kurulacak olan biçimsel sistem sayesinde sistemi oluşturan terimler anlamsız birer simge olacağı için sisteme dışarıdan sızacak anlamlı unsurlar önlenmiş olur. Böylece kendi içerisinde anlamsız simgelerin bir araya getirerek oluşturduğu kurallı bir oyun haline gelen bir sistem amaçlanmaktadır.

Hilbert, Öklid dışı geometrilere ve paradokslara karşı matematiğin tutarlılık iddiasını korumak için *Russell paradoksu*, *berber paradoksu*[1] gibi küme-kuramsal paradokslardaki gündelik dile ilişkin ifadelerden matematiği arındırmak gerektiğini düşünüyordu.

Hilbert'e göre standart mantıksal çıkarım yöntemleri matematiksel ispatların inşasında kullanılıyordu. Fakat zamanla görüldü ki klasik mantığın çerçevesi içindeki bu çıkarım yöntemleri yukarıda ifade edilen paradoksların *karar verilemez* olduklarını gösterdi. *Karar verilebilirlik* (İng. *Decidability*) bir aritmetik önermenin doğru veya yanlış olduğunun sonlu sayıda adımda gösterilebilmesi ya da ispat edilebilmesi anlamına gelmektedir (Nabiyev, 2007: 45). Hilbert sadece karar verilebilirliği değil, matematiğin tamlık (İng. *completeness*) ve tutarlılığını (İng. *consistency*) da temin edecek yeterli aksiyomlara dayalı bir biçimsel sistem oluşturmak istemekteydi:

> (i) Sistem tutarlı olmalı. Yani aksiyomlardan çelişki çıkarılamamalı.
>
> (ii) Sistem tam olmalı. Yani sistemin biçimsel dilinde verilen her önerme (ya da değili) aksiyomlardan çıkarılmalı.
>
> (iii) Her önermenin sistem içindeki doğruluk değerine (yani aksiyomlardan çıkarılabilir olup olmadığına) algoritmik olarak karar verilmeli. (Çevik: 82-83)

Dolayısıyla Hilbert, matematiğin hem karar verilebilir olduğunu hem tutarlı olduğunu hem de tam olduğunu göstermek istemektedir. Hilbert matematiğin temellerine ilişkin bu amacını gerçekleştirmek üzere matematiğin tutarlılığını biçimsel dizgelerin sınırları içerisinde biçimsel olarak ispatlamak gerektiğini düşünmektedir.

Hilbert, aksiyomatik sistemleri biçimlendirerek matematiksel olarak neyin apaçık olup neyin olmadığını sezgilerimize bağlı kalmadan belirlemeyi amaçlamaktadır. Böylece matematiksel faaliyetin hiçbir hayal gücü, yaratıcılık ve hatta simgelerin anlamına dair bir kavrayış bile gerektirmeden belli kurallar aracılığıyla mekanik bir şekilde yürütüleceğini düşünmektedir (Goldstein: 116-117).

Hilbert çok açık biçimde matematiksel ispatlarda kullanılan aksiyomların ve çıkarım kurallarının gerekçelendirilebilir olmasını istiyor ve bu yolla matematiği sezgisel (İng. *intuitive*) bağlamlarından kopartıp tamamen mantıksal bir çerçeveye oturtmayı amaçlıyordu (Zach, 2019). Burada ifade edilen sezgiselliğin mantıksal olmayan semantik içeriğe işaret ettiğini ve Kant'ın *görü*süyle (Alm. *Anschauung*) bir ilgisinin olmadığını da belirtmeliyiz. Yukarıda da ifade edildiği üzere, simgelerin ya da işaretlerin anlamlarına gerek duymadan mekanik olarak yapılan ispatların daha

[1] Cantor'un kümeler kuramına ilişkin olarak ortaya çıkan Russell paradoksuna yukarıda değindik. Benzer bir durum berber paradoksu için de söz konusudur. Bir köydeki berber köyde kendi kendisini tıraş etmeyen herkesi tıraş ediyorsa bu berberi kim tıraş edecektir? Berber kendisini tıraş ederse tıraş etmeyecek, etmezse tıraş edecektir. Yanıt ne olursa olsun çelişki ortaya çıkmaktadır.

güvenilir sonuçlar doğuracağını düşünüyordu. Hilbert matematiksel sistemdeki aksiyom ve teoremlerin anlamlı olmak zorunda olmaması gerektiğini ifade ederken mantıksal olan terimler ile olmayan terimler arasındaki farka işaret eder.

Mantıksal terimler *ve* (∧), *veya* (v), *eğer–ise* (→), *vardır* (∃), *her* (∀) gibi terimlerden oluşmaktadır. Mantıksal olmayan terimler ise *nokta*, *küme*, *sayı*, *eleman* gibi konuya bağlı olan terimlerden oluşur. Bir terimin mantıksal olup olmadığını anlamak için anlamına bakmak gerekmektedir. Örneğin "ve" bağlacı gibi mantıksal olan terimler başka bir anlamda kullanılmadığı için kendi anlamlarıyla yorumlanır (Çevik: 80).

Bu yüzden Hilbert, Russell paradoksu gibi küme kuramsal paradoksların ifade edilişinde mantıksal olmayan, anlamlı (İng. *sound*) semantik bir içeriğin sisteme sızmasından dolayı karar verilemez durumların ortaya çıktığını düşünmektedir. Hilbert'in açıkça belirtilen kurallar üzerinden mekanik olarak işleyen sistemle kastettiği şey sonlu (İng. *finitistic*) mantıksal adım aracılığıyla aksiyomlardan türetebilmeyi mümkün kılan biçimsel bir dildir.

> Mantıksal kalkülde, matematiksel önermeleri tamdeyimlerle temsil eden ve mantıksal çıkarımları biçimsel işlemlerle ifade eden bir işaret diline sahibiz. İçeriksel sayı kuramından biçimsel cebire geçişe tam karşılık gelecek bir surette, mantıksal kalkülün işaretlerini ve işlem simgelerini içeriksel anlamlarından yalıtarak ele alırız. Bu yolla, en nihayetinde, gündelik dil yardımıyla iletilen içeriksel matematik biliminin yerine, birbirini belirli kurallara göre takip eden matematiksel ve mantıksal işaretlerden oluşan tamdeyimlerin bir dökümünü elde etmiş oluruz. (Heijenoort'dan aktaran Çitil, 2016: 13)

Hilbert'in projesini Frege'nin aritmetiği mantığa indirgeme projesiyle birlikte düşündüğümüzde her ikisinin de biçimsel bir dizge oluşturmak istediğini söylemek mümkündür. Frege'nin oluşturduğu biçimsel dizge küme kuramsal bir yapıya dayandığı için Russell paradoksu gibi çelişik önermelere matematiksel bir doğruluk olarak izin veriyordu. Hilbert bu sorunun matematiksel ispatlar yaparken küme kuramsal yapının kullandığı semantik içerikten, mantıksal olmayan terimlerden kaynaklandığını düşünmekteydi. Bu yüzden Frege'den farklı olarak biçimsel dizgesini oluştururken semantik terimler yerine anlamlı olmayan mantıksal terimlere yer vererek daha mekanik bir sistem elde etmek istedi. Hilbert'in elde etmek istediği bu sistem içerikli matematiğin (İng. *contentual mathematics*) içeriksiz tamdeyimlerle (İng. *formula*) oynanan bir oyunla yer değiştirmesi olarak yorumlanmıştır (Zach, 2019).

Hilbert'in oluşturmak istediği biçimselleştirme (İng. *Formalisation*) işlemini nasıl gerçekleştirdiğini temel olarak dört basamakta ele almak mümkündür.

> İlkin dizgede kullanılacak imlerin tamamının listesi hazırlanır. Bunlar dizgenin sözcük dağarcığıdır. İkinci olarak "oluşum kuralları" belirlenir. Bu kurallar sözcük dağarcığındaki imlerin hangi yan yana gelişlerinin tamdeyim (formül) olarak kabul

> edilebilir olduğunu belirler. Bu kurallar dizgenin dilbilgisini (gramer) oluşturan kurallar olarak da görülebilir. Üçüncü olarak, dönüşüm kuralları ifade edilir. Bunlar eldeki yapının diğer tamdeyimlerinin türetildiği tamdeyimlerin tam yapısını betimlemektedir. Bu kurallar aslında çıkarım kurallarıdır. Son basamakta da bazı önermeler aksiyom (ya da ilkel tamdeyim) olarak seçilir. Bu aksiyomlar tüm dizgenin temellerini oluştururlar. Dönüşüm kurallarının kullanılmasıyla aksiyomlardan türetilen tamdeyimleri "dizgenin teoremi" olarak adlandıracağız. Biçimsel kanıtlamayla da her biri ya aksiyom ya da dönüşüm kuralları aracılığıyla diğer tamdeyim-lerden türetilmiş bir dizi sonlu tamdeyimi anlıyoruz. (Nagel ve Newman, 1994: 55-56)

Daha önce de ifade edildiği üzere Hilbert oluşturmak istediği biçimsel dizgenin temel ilksel işaretlerini mantıksal terimlerden meydana getirmektedir. Örneğin "2+3 =5" önermesi matematiksel bir önerme ifade etmekle birlikte aynı zamanda düzgün bir tamdeyimdir (İng. *well formed formula*). Bu tamdeyime ait işaretlerin hangi oluşum kurallarına göre yan yana geldikleri konusu bu tamdeyim hakkında konuşabilmeyi gerektirmektedir. Bu yüzden Hilbert matematiksel önerme ile bu önerme hakkında konuşan üst matematiksel (İng. *metamathematical*) önerme arasında bir ayrıma gider. Bu sayede işaretlerin hangi yan yana gelişlerinin tam deyim oluşturduğunu ve diğer tam deyimlerin nasıl türetileceğini belirlerken üst matematiksel akıl yürütmeye başvurur. Hilbert matematiksel kanıtlamada kullandığı üst matematiksel gösterim sayesinde tamdeyimlerin birtakım paradokslar meydana getirecek şekilde bir araya gelmesini de önlemek istemektedir. "Ayrıca bu ayrım, matematiksel çalışmalarda ve çıkarımlarda kullanılan işlemlerin ve mantıksal kuralların kesin tanımlarını gerektirmiştir ki, birçok matematikçi bunları kullanırken nelerden yararlandığının açık seçik farkında olmamıştır" (Nagel ve Newman: 44).

Hilbert, oluşturmak istediği biçimsel dizge üzerinden her matematiksel doğruluğu bir teorem olarak ispatlamak ya da yanlış bir matematiksel önermenin de yanlışlığını ispatlamayı amaçlamaktadır. Bu sayede biçimsel olarak tutarlı bir dizgede, bir aksiyomun ve onun değillemesinin dizge içinde ispatlanabilir olmaması sağlanacaktır. Fakat Hilbert'in, aritmetiğin tutarlılığının biçimsel aritmetik dizge içerisinde gösterilebilir olduğuna yönelik çabaları Gödel'in teoremleriyle birlikte büyük bir yara almıştır.

4. Gödel'in Tamamlanamazlık Teoremleri

Hilbert aritmetiğin aksiyomlarının tutarlılığını göstermek için oluşturduğu biçimsel dizgenin çelişkiye yol açmayacak şekilde tutarlı bir sistem olduğunu öngörmektedir. Gödel ise Hilbert'in oluşturduğu biçimsel dizgede doğru olduğu anlaşılan ama doğruluğu ispat edilemeyen bir önerme inşa eder. Hilbert'in programının temel iddiasına ters olan bu durum Hilbert'in inşa ettiği biçimsel dizgenin tutarlılığının sağlanamadığını da gösterecektir.

Gödel'in tamamlanamazlık teoremlerinde tamamlanamamaktan kastedilen şey, tutarlı olduğu varsayılan bir biçimsel sistemde karar verilemeyen, ispatı verilemeyen ya da çözümsüz kalan aritmetik önermelerinin ortaya çıkmasıdır. Ortaya çıkan bu karar verilemez önermeler sisteme aksiyom olarak eklense bile yeni bir saptanamaz, karar verilemez önerme inşa etmek mümkün olmaktadır. Bu yüzden karar verilemeyen önermelerin biçimsel sistem içinde ortaya çıkmasının engellenememesi, sistemin tamamlanamaz olduğunu göstermektedir.

Gödel'in eksiklik teoremine göre, aritmetiği aksiyomatikleştirebilen herhangi bir sistem içerisinde bu sistemden elde edilemeyen formüller vardır. Yani, matematik sistemlerinde öyle teoremler vardır ki bu teoremlerin doğruluğu veya yanlışlığı o sistem içerisinde gösterilememektedir. Gödel'in bu teoremi matematikte bilinemez bir şeyin olmadığına inanan biçimciler için oldukça sarsıcıdır. Gödel'in ikinci eksiklik teoremi ise bir sistemin tutarlılığının sistemin kendi içerisinde gösterilemeyeceğini ispat ederek biçimcilerin bütün hayallerine son vermiştir (Gür, 2006: 48-49).

Peki, Gödel nasıl olup da teoremlerini ispat edebilmiştir? Gödel teoremlerini ispat ederken kırk altı tanımdan hareket ederek ispat işlemlerini aşama aşama gerçekleştirir. Bu ispat aşamalarını tek tek takip etmek bu çalışmanın kapsamını aşacağından biz ispatın temel mantığını ve ileri sürdüğü savları ele almaya çalışacağız. Gödel, kanıtlamasına önce biçimsel bir dizge inşa ederek başlar. Bu biçimsel dizge de aynı Hilbert'in sisteminde olduğu gibi ilksel işaretleri, oluşum ve dönüşüm kurallarını kullanarak aritmetiğin tüm önermelerini ifade edebilecek bir sistemdir.

Gödel, *Principia Mathematica* gibi kapsamlı bir biçimsel dizgede karar verilemeyecek bir önerme inşa edebilirse bu dizgenin eksik bir dizge olduğunu göstermiş olacaktır. Bu önermenin inşa edilmesinden önce Hilbert'in kullandığı temel, ilksel işaretleri birebir eşleme yoluyla doğal sayılarla eşleştirme yoluna gider.

> İspatlamalar da benzer şekilde biçimsel bakış açısıyla, formüllerin sonlu serilerinden başka bir şey değildir (kesin belirleyici özellikleri ile). Matematiksel amaçlar için, hangi nesnelerin temel işaretler olarak kullanıldıkları elbette önemsizdir ve biz bunların yerine doğal sayıları kullanmayı uygun buluyoruz. O zaman, buna göre bir formül, doğal sayıların sonlu bir serisidir ve belirli bir ispat şeması doğal sayıların sonlu serilerinin bir sonlu serisidir. Matematiksel kavramlar (önermeler) bu yolla doğal sayılara ilişkin kavram (önerme) ya da onların serileri haline gelirler ve sonuçta PM'nin kendi dizgesi içerisindeki semboller olarak en azından kısmen ifade edilebilir duruma gelirler. (Gödel, 2010: 24-25)

Gödel'in doğal sayıları kullanmaktaki amacı bu sayıların izomorfik bir görüntüsü olarak meta-matematiksel önermelerin ispatın gerçekleştirilmesinde daha işlevsel kılınmasıdır. Yani Gödel biçimsel sistemin dilinde ifade edilebilecek bütün önermelerin aritmetikte de karşılık bulmasını istediği için sistemi aritmetikleştirmektedir. Hilbert'in kullandığı biçimsel sistemin aritmetikleştirilmesi işlemi ise sistemin temel işaretlerini bir numara (doğal sayılar cinsinden) ile eşleyerek yapılır.

> Eğer biçimsel bir aritmetik dizgesi hakkındaki üst-matematiksel karmaşık önermeler, Gödel'in umduğu gibi dizgenin içindeki aritmetiksel önermelere çevrilebilirlerse (ya da yansıtılabilirlerse), üst-matematiksel kanıtlamaları kolaylaştırıcı bir kazanç elde edilmiş olacaktı. Çünkü aynen uzay eğrilerinin ve yüzeylerinin içsel geometrik ilişkilerini cebirsel formüllerle temsil etmek (ya da yansıtmak), geometrik ilişkilerin kendileriyle uğraşmaktan nasıl daha kolaysa, karmaşık mantıksal ilişkilerin aritmetiksel karşılıklarıyla uğraşmak mantıksal ilişkilerin kendileriyle uğraşmaktan daha kolaydır. (Nagel ve Newman: 71)

Gödel numaralandırması olarak da ifade edilen bu işlem aslında Hilbert'in biçimsel sisteminde kullanılan mantıksal işaretlerin, operatörlerin devre dışı kalması anlamına gelmektedir. Çünkü Gödel, Hilbert'in yaptığı şekliyle mantığın araçları kullanılarak eksiksiz bir sistemin inşa edilemeyeceğini göstermek istemektedir. Yani matematiğin nihai olarak eksiksiz olmaya mahkûm olduğunu değil de Hilbert'in kullandığı araçlarla bunun böyle olacağını göstermek istemektedir.

Az önce sözünü ettiğimiz eşleme yöntemi sayesinde Gödel herhangi bir "T" dizgesinin temel işaretlerini gayet keyfî bir biçimde doğal sayılarla birebir eşler. Böylece biçimsel sistemin temel işaretleri ve bu yolla kurulan tamdeyimleri de doğal sayılar cinsinden temsil edilir. Gödel biçimsel sistemi doğal sayılar cinsinden temsil ettikten sonra bu sistem hakkında konuşan üst-matematiksel (İng. *metamathematical*) dili de aritmetikleştirme yoluna gider. Bunu yapmakta ki amacı ise doğal sayılar cinsinden temsil edilen tamdeyimler ile bu tamdeyimler hakkında konuşan üst-matematiksel dil arasında işlem yapma kolaylığını elde etmektir. Böylece "T dizgesi tutarlıdır" şeklindeki üst-matematiksel önermeye karşılık gelen aritmetiksel tamdeyimi inşa etmeyi ve bu tamdeyimin biçimsel olarak karar verilemez olduğunu ispat etmeyi amaçlamaktadır. Peki, biçimsel dilin unsurlarının eşleme yöntemiyle doğal sayılarla eşlenmesi sonucu her tamdeyime verilen Gödel numaraları nasıl elde edilmektedir?

4.1. Gödel Numaralandırması

Gödel biçimsel dilde oluşturduğu her cümleyi bir sayı ile kodlayarak dildeki sembollere karşılık bir kod numarası atamaktadır. Bu şekilde yapılmasının sebebi ise sistemde oluşturulan her cümleye karşılık gelen sayısal bir ilişki tanımlamaktır (Çevik:

88). Böylelikle Gödel'in kullandığı biçimsel dizgenin temel işaretleri farklı birer doğal sayı ile numaralandırılmaktadır.[2]

Bu temel işaretlerden meydana gelmiş bir tamdeyim örneği olarak "En az bir x vardır ki, bu x, y'nin ardılıdır" şeklinde okunan (Ǝx) (x = sy) tamdeyimine karşılık gelen Gödel sayısının nasıl elde edildiğine bakabiliriz.

> Bu tamdeyimin on oluşturucu temel imine karşılık gelen sayılar sırasıyla şunlardır: 8, 4, 11, 9, 8, 11, 5, 7, 13, 9. Şimdi bu karşılık gelmeyi gösterelim.

(	Ǝ	x	)	(	x	=	s	y	)	
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
8	4	11	9	8	11	5	7	13	9	(Nagel ve Newman: 79).

Böylece Hilbert'in kullandığı biçimsel tamdeyimin temel işaretlerinin her birine bir doğal sayı karşılık gelecek şekilde aritmetik bir tamdeyim elde edilmektedir. Gödel yukarıdaki tamdeyimi doğal sayılar cinsinden ifade ederek mantıksal araçlar arasındaki işlem karmaşıklığını aşmayı hedefler. Fakat yukarıdaki tamdeyime karşılık gelen sayılar topluluğu yerine tamdeyime sadece bir sayının karşılık gelmesinin tamdeyimler arası işlemleri daha da kolaylaştıracağını düşünmektedir. "Bir doğal sayı böylece yalnızca her temel işarete değil aynı zamanda bu işaretlerin her sonlu serisine de birebir eşleştirilir." (Gödel: 33). Fakat temel işaretlerin doğal sayılarla numaralandırılmasındaki keyfilik sayılar topluluğunu temsil edecek olan bir sayıyı oluştururken söz konusu değildir. Çünkü Gödel her bir tamdeyimi temsil eden bir sayıyı oluştururken bu sayının yalnız ve yalnız o tamdeyimi temsil etmesi gerektiğini ifade eder. Aksi takdirde tamdeyimlerin diğer tamdeyimlerle karışması sonucu matematiksel işlemler yapmak olanaksız hale gelmektedir.

> Bir tamdeyime karşılık gelecek tek bir sayı, büyüklük sırasına göre dizilen asal sayıların, tamdeyimde karşılık geldikleri Gödel sayısına göre kuvvetleri alındıktan sonra birbirleriyle çarpılmasıyla bulunacak sayı olacaktır. Böylece yukarıdaki tamdeyime şu sayı karşılık gelecektir: $2^{8} \times 3^{4} \times 5^{11} \times 7^{9} \times 11^{8} \times 13^{11} \times 17^{5} \times 19^{7} \times 23^{13} \times 29^{9}$. (Nagel & Newman: 79)

Böylece Gödel yukarıdaki tamdeyime karşılık gelen sayılar topluluğunun kalabalık yapısını bir sayıda temsil etmektedir. Tamdeyimin işaretlerini temsil eden doğal sayılar, büyüklük sırasına göre yazılan her asal sayının üslü kuvveti olacak şekilde yazılıp yan yana çarpıldığında ortaya çıkan sayı tamdeyimin Gödel sayısı olmaktadır. Gödel'in asal sayıları kullanmasının temel sebebinin biçimsel sistemde ifade

[2] Not: Gödel numaralandırmasında temel işaretlere, sayısal değişkenlere, önerme ve yüklem değişkenlerine hangi Gödel sayılarının karşılık geldiğine bakmak isteyenler Nagel ve Newman'ın söz konusu kitabının 76-78 sayfa aralığını okuyabilir.

edilebilecek her önermenin aritmetik olarak temsil edilmesi ve bu temsillerin farklı *yer*lere tekabül etmesidir. Her tamdeyimin sadece tek bir Gödel sayısı olduğu için hem tamdeyimden Gödel sayısını hem de Gödel sayısından tamdeyimi bulmak mümkün olmaktadır.

Böylelikle asal sayıların üssü cinsinden temsil edilen aritmetik önermeler birebir olarak temsil edilmiş olmaktadır. "Birebir olması *Aritmetiğin Temel Teoremi*'nden geliyor: 2'*den büyük veya* 2'*ye eşit her doğal sayı asal sayıların çarpanları ile yazılabilir ve bu çarpanlar biriciktir*" (Çevik: 90).

Gödel'in tamdeyimleri birer sayı ile temsil etmesi hem tamdeyimlerin Hilbertçi anlamdaki biçimsel dilin mantıksal yapısından kurtulmasını sağlamakta hem de tamdeyimler arası ilişkileri ve hesaplamaları kolaylaştırmaktadır.

4.2. Üst Matematiğin Aritmetikleştirilmesi

Çalışmamızın başlarında ele aldığımız Hilbert'in programında üst matematiğin matematiksel tamdeyimler hakkındaki bildirimler olduğunu ifade etmiştik. Bir önceki bölümde Gödel numaralandırmasının ilk adımını ele aldık. Yani Gödel bu aşamada biçimsel dile ait tamdeyimleri birebir olarak doğal sayılarla eşleyerek biçimsel dili aritmetikleştirmiştir. Böylece tamdeyimler arası ilişkileri daha kolay incelemek ve hesaplamak için sayısal ilişkilere indirgemiş olmaktadır.

Gödel numaralandırmasının bir sonraki aşaması ise tamdeyimler hakkında konuşan üst-matematiğin bu tamdeyimleri biçimselleştirilmiş aritmetik bir dizgede temsil etmesidir. Bu aşamada üst matematiğe ait biçimselleştirilmiş tamdeyimler, hakkında konuştukları matematiksel tamdeyimlere karşılık gelen Gödel sayılarını temsil eder. Böylece belli bir Gödel sayısına sahip olan tamdeyim ya da tamdeyimler dizisi ile bir başka tamdeyim ya da tamdeyimler dizisi arasındaki bağıntı üst matematik dilde biçimsel olarak belirlenebilmektedir.

> Şimdi şu aşağıdaki üst matematiksel önermeye dikkat edelim: "x Gödel sayılı tamdeyimler dizisi, z Gödel sayılı tamdeyimin kanıtlamasıdır." Bu önerme x ile z arasındaki saf aritmetiksel bağıntıları ifade eden aritmetiksel biçimsel dizge içinde belirli bir tamdeyim tarafından temsil edilir (yansıtılır). ---- x ile z arasındaki bu bağıntıyı, ona karşılık gelen üst-matematiksel önermeyi bize anımsatması için 'Dem (x, z) tamdeyimi olarak yazıyoruz (yani, "x Gödel sayılı tamdeyimler dizisi, z Gödel sayılı tamdeyimin kanıtlamasıdır." Üst matematiksel önermesini). (Nagel & Newman: 83.84)

Bu örnekte de görüleceği üzere x Gödel sayılı tamdeyimler dizisi ile z Gödel sayılı başka bir tamdeyim arasında kanıtlama (İng. *demonstration*) bağıntısı kurulmaktadır. Gödel bu sayede x ve z Gödel sayıları arasında kurulması gereken kanıtlama bağıntısını 'Dem' fonksiyonu sayesinde biçimselleştirir. Bu bağıntı üst-matematiksel bir dizgede biçimsel olarak "Dem (x, z)" şeklinde ifade edilen tamdeyim tarafından temsil edilebilmektedir. Yani bir sayı çifti arasındaki aritmetiksel bağıntıların sağlanıp sağlanmadığı, sayılar arasındaki bağıntılarla yansıtılmış (eşlenmiş) üst-matematiksel önermenin doğru olduğu gösterilerek yapılmaktadır (Nagel ve Newman: 84) .

Yukarıda nasıl ki "Dem (x, z)" tamdeyimi iki ayrı Gödel sayısına sahip olan tamdeyim ve tamdeyimler dizisi arasında "x, z'nin kanıtlamasıdır" anlamına geliyorsa bu tamdeyimin değillemesi de üst-matematikte temsil edilebilir. "~Dem (x, z)" şeklinde üst-matematikte temsil edilen tamdeyim, "x, z'nin kanıtlaması değildir" olarak okunmaktadır.

Ayrıca "~Dem (x, z)" tamdeyimine (x) öneki getirilerek "(x) ~Dem (x, z)" tamdeyimi elde edilir. Bu tamdeyim "tüm x'ler için x Gödel sayılı tamdeyimler dizisi, z Gödel sayılı tamdeyimin kanıtlaması değildir" biçiminde okunmaktadır. Oluşturulan bu yeni tamdeyim üst-matematiksel dilde "z Gödel sayılı tamdeyim kanıtlanamaz" ifadesini temsil etmekte ya da yansıtmaktadır. Gödel bu üst-matematiksel ifadeye benzer biçimde kanıtlanamayan bir 'G' tamdeyimini inşa etmek istemektedir.

> '(Ǝx) (x = sy)' tamdeyiminin Gödel sayısı m'dir, y'nin Gödel sayısı ise 13'tür. Gödel sayısı 13 olan değişkenin (yani y'nin) yerine m sayısını koyalım. Elde ettiğimiz tamdeyim (Ǝx) (x = sm), m'in ardılı olan bir x sayısı vardır, demektedir. Bu tamdeyimin de kolaylıkla hesaplanabilecek bir Gödel sayısı vardır. Fakat hesaplamayı yapmak yerine, bu sayıyı seçik bir üst-matematiksel nitelendirme ile belirleyebiliriz: bu, 13 Gödel sayılı değişkenin yerine m sayısı koyularak bulunan m Gödel sayılı tamdeyimden elde edilmiş tamdeyimin Gödel sayısıdır. Bu üst-matematiksel nitelendirme, m ve 13 sayılarının bazı aritmetiksel fonksiyonları olan belirli bir sayıyı tam olarak belirlemektedir; bu fonksiyonun kendisi de biçimsel dizge içinde ifade edilebilir. --- Bu gösterim 'sub(m,13, m) olarak yazılacaktır, bu biçimin amacı, temsil ettiği üst-matematiksel nitelendirmeyi anımsatmaktır, yani, 13 Gödel sayılı değişkenin yerine m sayısı koyularak bulunan m Gödel sayılı tamdeyimden elde edilmiş tamdeyimin Gödel sayısıdır' önermesini. (Nagel ve Newman: 85)

"~Dem (x, z)" tamdeyiminin üst matematiksel biçimsel dizgede x ile y sıralı ikilisi arasında bir kanıtlama fonksiyonunu icra ettiğini daha önce ifade etmiştik. Gödel 'Dem' fonksiyonuna ilaveten yerine koyma fonksiyonunun kısaltılmışı olan 'Sub' (İng. *substitution*) fonksiyonunu da kullanmaktadır.

"(Ǝx) (x = sy)" tamdeyiminin Gödel sayısının 'm' olduğunu tekrar hatırlayalım. Bu tamdeyimdeki Gödel sayısı 13 olan y[3] değişkeninin yerine m sayısı koyulmaktadır. Böylece elde edilen yeni tamdeyim "(Ǝx) (x = sm)", m'in ardılı olan bir x sayısı vardır

[3] Not: Gödel x,y,z gibi sayısal değişkenleri sırasıyla 11, 13, 17 gibi asal sayılarla eşlemektedir. Bu yüzden y değişkeninin Gödel sayısı 13 olarak eşlenmektedir.

anlamına gelmektedir. Gödel y değişkeninin yerine m sayısını koyarken bahse konu olan 'Sub' fonksiyonunu kullanmaktadır.

Bu durumda m Gödel sayılı tamdeyim olan '(Ǝx) (x = sy)' tamdeyiminde y'nin yerine m sayısını koyduğumuzda "(Ǝx) (x = sm)" m'nin ardılı olan bir tamdeyim vardır şeklinde okunan yeni bir tamdeyim elde edilir. Gödel bu yeni tamdeyimde Gödel sayısının daha önce gösterdiğimiz yöntemle hesaplanabileceğini ama bunu yapmak yerine bu tamdeyimin Gödel sayısını üst-matematiksel bir ifadeyle belirleyebileceğimizi ifade eder. Dolayısıyla bu yeni tamdeyimin Gödel sayısı üst-matematiksel ifadede şöyle belirtilir: m Gödel sayılı tamdeyimdeki 13 Gödel sayılı değişken olan y'nin yerine m sayısı koyularak elde edilen yeni tamdeyimin Gödel sayısıdır. Böylece bir tamdeyimdeki değişkenin yerine o tamdeyimin Gödel sayısı koyularak elde edilen yeni bir tamdeyimin Gödel sayısına, hiç hesaplamadan üst-matematiksel bir dilde erişilmektedir.

Yerine koyma fonksiyonunun bir tamdeyim olmasa da bir deyim olarak herhangi bir sayıyı nasıl belirlediğini (İng. *identify*) "sub (y, 13, y)" deyimi üzerinden açıklayabiliriz. "Bu sayı, 13 Gödel sayılı değişkenin yerine y değişken sayısı koyularak bulunan y Gödel sayılı tamdeyimden elde edilen tamdeyimin Gödel sayısıdır" (Nagel ve Newman: 89) .

Gödel artık bu aşamada öyle bir tamdeyim inşa etmek istemektedir ki bu tamdeyim biçimsel olarak karar verilemez bir tamdeyim olsun. Bunun için önce sub (y, 13, y) deyimini içerecek şekilde biçimsel dizgede üst-matematiksel bir önermeyi temsil edecek bir tamdeyim inşa edilir: (1) (x) ~Dem (x, sub (y, 13, y)). Bu tamdeyim "'sub (y, 13, y)' Gödel sayılı tamdeyim kanıtlanabilir değildir" olarak okunan ve üst matematiksel bir tamdeyimi temsil eden bir tamdeyimdir. Fakat (x) ~Dem (x, sub (y, 13, y)) tamdeyimi biçimsel bir dizgede ifade edildiğinden bu tamdeyimin hesaplanabilen bir Gödel sayısı olmak durumdadır.

"Bu sayının n olduğunu varsayalım. Şimdi (1)'deki tamdeyimin 13 Gödel sayılı değişkeninin (yani 'y' değişkeninin) yerine 'n' sayısını koyalım. Bu yeni tamdeyime Gödel'e atfen "G" diyelim; G aşağıdaki biçimi alacaktır: (G) (x) ~Dem (x, sub (n, 13, n))" (Nagel ve Newman: 89).

Böylece Gödel üst-matematikte biçimsel bir dizgeye ait kanıtlanamayan bir tamdeyim inşa etmiş olmaktadır. Bu tamdeyimin niçin kanıtlanamaz olduğunu birkaç adımda incelemek mümkündür. Daha önce incelediğimiz tamdeyimlerde olduğu gibi G tamdeyiminin de bir Gödel sayısı olmak durumundadır. Öyleyse G tamdeyiminin Gödel sayısı nedir?

Bu sayının sub (n, 13, n) olduğunu görebiliriz. Hatırlanacağı üzere bu sayı, 13 Gödel sayılı değişkenin (yani 'y' değişkeninin) yerine n sayısı koyularak elde edilen tamdeyimin Gödel sayısıdır. Ancak G tamdeyimi, (1)'deki tamdeyimde 'y' değişkeninin yerine 'n' koyularak bulunan 'n' Gödel sayılı tam deyimden elde edilmişti. Dolayısıyla G'nin Gödel sayısının aslında sub (n, 13, n) olduğu görülmektedir (Nagel ve Newman: 90).

Daha önce de ifade edildiği üzere ~Dem (x, sub (y, 13, y)) tamdeyiminin Gödel sayısının n olduğu varsayılmıştı. Ayrıca ~Dem (x, sub (y, 13, y)) tamdeyiminde 13 Gödel sayılı değişken olan y'nin yerine n sayısı koyularak G tamdeyiminin elde edildiği hatırlanmalıdır. Bu durumda G tamdeyiminin Gödel sayısının, sub (y, 13, y)'nin 13 Gödel sayılı y değişkeninin yerine n sayısı koyularak elde edilen tamdeyimin Gödel sayısı olduğu açık olarak ortadadır. G tamdeyiminin de (x) ~Dem (x, sub (y, 13, y)) tamdeyimindeki 'y' değişkeninin yerine n sayısı koyularak elde edildiğini hatırlayalım. Bu durumda G'nin Gödel sayısının sub (n, 13, n) olduğu söylenebilir.

G'nin Gödel sayısının sub (n, 13, n) olduğunu bir kenarda tutalım. Bu durumda G tamdeyiminin biçimsel dizgedeki gösterimi olan (x) ~Dem (x, sub (n, 13, n)) tamdeyimi açıkça kendisinin yani G'nin kanıtlanamaz olduğunu öne sürmektedir. Burada yapılan şey kısaca söylenirse, kendisinin kanıtlanamaz olduğunu ifade eden bir G tamdeyimi hakkında konuşan üst-matematiksel önerme, G'nin kanıtlanamaz olduğunu söylediğinde ortaya çıkan paradokstur. Bu paradoks yalancı paradoksuna benzer bir biçimde karar verilemeyen bir durumu ortaya çıkarmaktadır. Gödel G'nin kanıtlanamaz olduğunu ifade eden üst-matematiksel tamdeyimi biçimsel olarak inşa ederek bu tamdeyimin kanıtlanabilir olduğunu göstermektedir. Gödel bu kanıtlamayı yaparken neyin biçimsel olarak kanıtlanabilir olduğunu neyin olmadığını göstermek için bu sınırları karakterize eden özyineli fonksiyonlar (İng. *recursive functions*) kümesinin tespitini yapmaktadır. Özyineli fonksiyonlar kümesi bir biçimsel dizgede temsil edilebilir olan fonksiyon ve bağıntıları içeren küme olarak düşünülmelidir.

Fakat biçimsel bir dizgede kendi kendisinin kanıtlanamaz olduğunu ileri süren tamdeyim kendi kendisinin Gödel numarasına gönderme yaptığı için paradoksal bir durum ortaya çıkmaktadır. Bu paradoksal durumu ortaya çıkartan G tamdeyimi, hakkında anlamlı olarak konuşamadığımız karar verilemeyen bir tamdeyim olduğu için özyineli fonksiyonlar kümesinin dışında kalmaktadır.

Hilbert'in programının ana hedefinin aritmetiğin tutarlılığını göstermek olduğunu biliyoruz. Gödel bu projeye karşıt bir taraftan yaklaşarak aritmetiğin tutarlılığını göstermek yerine tutarlı olmadığını gösterecek bir tamdeyimi ispatlamaktadır. Böylece Hilbert'in hedeflediği *T* gibi bir aksiyomatik sistemin tutarlı olmadığını kanıtlamıştır.

Gödel'in aritmetiğin tutarsız olduğunu (x) ~Dem (x, sub (n, 13, n)) tamdeyimi üzerinden nasıl gösterdiğini incelemeye çalıştık.[4] Gödel'in biçimsel olarak karar verilemez olduğunu gösterdiği tamdeyimin aritmetiğin tutarsızlığı ile ilgili ne anlam taşıdığına biraz daha genel bir çerçeveden baktığımızda Gödel'in devrimsel buluşu ortaya çıkmaktadır.

Aritmetiği kapsayan *T* gibi bir aksiyomatik dizge düşünelim. Bu dizgenin tutarlı olduğu varsayımı altında (x) ~Dem (x, sub (n, 13, n)) gibi bir tamdeyimin kanıtlanamaz olduğunu Gödel ispatlamıştır. Bir aritmetik sistemin tutarlı olmasının aksiyomlardan çelişki çıkarılamaması ile mümkün olduğunu daha önce ifade etmiştik. Gödel'in inşa ettiği tamdeyim ise biçimsel bir aritmetik dizgesinde karar verilemeyen bir çelişki ortaya çıkarmaktadır. Dizgede bir çelişkinin yani karar verilemez bir önermenin ortaya çıkması dizgenin tutarsız olduğu anlamına gelmektedir. Gödel'in birinci eksiklik teoremi olarak bilinen incelediğimiz tamdeyim ile Gödel aritmetiğin tutarsız olduğunu göstermektedir.

> *T*'den "Eğer *T* tutarlıysa, G önermesi *T*'den çıkarılamaz" önermesi çıkarılabilir. Ancak daha önce de belirttiğimiz gibi "*G* önermesi *T*'den çıkarılamaz" önermesi aslında *G*'nin kendisidir. O halde *T*'den "Eğer *T* tutarlıysa *G*" önermesi çıkarılabilir. Şimdi *T*'nin tutarlı olduğunu varsayalım. O zaman bu, *G* önermesinin *T*'den çıkarıldığı anlamına gelir. Ancak bu, Gödel'in Birinci eksiklik teoremi ile çelişmektedir. O halde *T* eğer tutarlıysa, *T* kendisinin tutarlı olduğunu kanıtlayamaz. Buna Gödel'in ikinci eksiklik teoremi diyeceğiz. (Çevik: 84-85)

Gödel birinci eksiklik teoremi ile aritmetiğin tutarsız olduğunu ispatlamakla kalmamıştır. Aynı zamanda inşa ettiği tamdeyimin bir sonucu olarak aritmetik dizgenin tamamlanamaz olduğunu da ispat etmiştir. Çünkü inşa edilen karar verilemez önerme bir aksiyom olarak dizgenin aksiyomlarına dahil edilse bile o dizge içerisinde yine karar verilemez önermeler inşa etmek mümkün olmaktadır. Bu durumda karar verilemez olan önermeler bitirilemediği için yeniden ispatlanamazlık durumu dizgenin tamamlanamaz olmasıyla sonuçlanmaktadır. Dizgenin tam olmaması anlamına gelen bu durum da Gödel'in ikinci teoremi olarak bilinmektedir.

Belirtilmesi gereken önemli bir ayrıntı da Gödel'in kanıtlanamayan ama doğru olan bir önerme inşa ettiğini ifade etmesidir. Buradaki doğruluktan ne kastedildiği bizim çalışmamızda yürütülen tartışma açısından son derece önemlidir. Daha önce de belirttiğimiz gibi Gödel, aritmetik dizgenin içerisinde biçimsel olarak karar verilemez bir önerme inşa etmektedir. Fakat biçimsel aritmetik dizgenin dışına çıkıldığında, üst-matematiksel gösterim sayesinde aritmetiksel bir doğruluk elde edildiğini

[4] Not: Daha önce de ifade ettiğimiz üzere bu gösterimi yaparken Nagel ve Newman'ın Gödel teoremlerini incelerken kullandıkları modeli esas aldık.

ispatlamıştır. Yukarıda G tamdeyimi olarak incelediğimiz tamdeyim tutarlı olduğu varsayılan bir biçimsel aritmetik dizgede karar verilebilir değildir. Fakat üst-matematiksel gösterim sayesinde doğru olduğu gösterilebilmektedir. "Yani "(x) ~(x+3=2)" tamdeyimi (3 eklendiğinde 2 sonucunu veren hiçbir tamsayı yoktur), nasıl tüm tamsayılar için zorunlu olan (her ne kadar çok basit olsa da) bir özellik formüle ediyorsa G tamdeyimi de zorunlu olarak tüm tamsayılar için tutan belirgin bir sayısal özellik formüle eder" (Nagel ve Newman: 91).

Gödel'in doğru olduğunu gösterdiği ama biçimsel olarak karar verilemeyen G önermesi, *Principia Mathematica* ve *Peano Aritmetiği* gibi aksiyomatik sistemlerin tam (İng. *complete*) ve tutarlı (İng. *sound*) olmadığı gibi bir sonuca işaret etmektedir.

Bu sonuç başka bir biçimde ifade edilirse, doğal sayılar teoreminin tutarlı bir aksiyomatikleştirimi doğal sayılara ilişkin bütün doğrulukları yakalayamamaktadır. Doğal sayılarla ilgili bazı aksiyomatikleştirimler diğerlerinden daha fazla sayıda doğruluğu yakalayabilmektedir. Fakat doğal sayıların tamamına ilişkin tüm doğrulukları tutarlı bir biçimde gösterebilen tek bir aksiyomatikleştirim yoktur. Bu sonuç, matematiksel doğruluğun aksiyomlardan çıkarsanabileceğini savunan görüşe kesin bir darbe vurmaktadır (Barker, 2017: 157-158).

Gödel'in teoremleri sadece biçimsel aritmetik dizgelerde karar verilemeyen önermeler olduğunu göstermemektedir. Aynı zamanda bu sistemlerin aksiyomatik yapısı ne kadar güçlendirilirse güçlendirilsin, yine de aksiyomatik olarak ispat edilemeyen doğrulukların ortaya çıkacağını göstermektedir. Bu ikinci durum aynı zamanda aritmetiğin tam olmadığını gösteren Gödel'in ikinci tamamlanamazlık teoremine karşılık gelmektedir. Dolayısıyla Gödel teoremlerinin esas devrimsel sonucu, aritmetiğin aksiyomatik sistemi hakkında her güçlendirme çabasına karşı ortaya çıkabilecek karar verilemeyen önermelerin tüketilemez olduğunun gösterilmesidir.

Böylece biçimsel aksiyomatik sistemlerde ispat edilemeyen doğrular aksiyomatik sistemlerin yetersiz olup olmadığı, başka ispat sistemlerinin imkânı gibi tartışmaları doğurmaktadır. Matematiksel mantık ve matematiğin temelleri alanlarında özel olarak çalışma yapmayan matematikçiler doğruluk ile ispat edilebilirliğin aynı şey olduğuna ilişkin yaygın bir kanaate sahiptir. Bu iki kavram arasında ayrım yapma gereği duymayan bir başka kesim ise Hilbert'in öncülüğünü yaptığı biçimselcilerdir. Gödel 1968 tarihinde Hao Wang'e yazdığı bir mektupta biçimselcilerin biçimsel olarak ispatlanabilirliği matematiksel doğruluk kavramının bir analizi olarak gördüklerini ve bu yüzden bu ikisi arasında bir ayrım yapmadıklarını ifade etmiştir (Murawski, 2020: 13-14).

Biçimselcilerin biçimsel bir dilde ispatlanabilir olan bir önermeyi aynı zamanda doğru bir önerme olarak telakki etmeleri Gödel'in teoremleri tarafından tartışmaya açılmıştır. Söz konusu tartışma çerçevesinde Gödel'in felsefi pozisyonunun izlerini sürmek biçimsel dilde ispat ile doğruluk arasındaki gerilimi takip edebilmek için önemli bir adım olmaktadır.

5. Biçimsel Dilde İspatlanabilirlik-Doğruluk İlişkisi

Hilbert'in biçimselcilik programının Gödel tarafından çürütülmesi önemli bir felsefi sorunu ortaya çıkarmaktadır. Eğer Gödel haklıysa ve doğru olduğu halde biçimsel olarak ispat edilemeyen önermeler varsa – ki Gödel'in birinci teoremi bunu göstermiştir- matematiğin eksik olduğu söylenebilir. Bu durumda biçimsel kanıtlamanın sınırları doğruluğun sınırlarını kuşatamamaktadır. Yani biçimsel olarak karar verilemeyen ama doğru olan önermeler inşa etmek mümkündür.

Bu yüzden Gödel'in ulaştığı sonuçların ortaya çıkardığı en önemli tartışmalardan birisi matematiksel doğruluk ile biçimsel sistemlerdeki ispat arasında ortaya çıkmış olan gerilimdir. Gödel teoremleri matematiksel doğruluğun biçimsel aksiyomatik yöntem tarafından kuşatılamayacağını gösterir. Bu durumda aksiyomatik olarak ispatı verilemeyen aritmetik önermelerin doğruluk değerinin hangi matematiksel yöntem aracılığıyla verileceği sorusu gündeme gelmektedir.

Gödel bu soruya cevap verebilmek için biçimsel aksiyomatik sistemlerin sınırları dışına çıkılması gerektiğini düşünür. Sınırın dışına çıkıldığında ise Gödel'in de kendini yakın hissettiği matematiksel Platonculuk anlayışının sınırlarına girilmesi kaçınılmazdır. Tabii ki burada ifade edilen, Platonculuğun klasik konumlanışından ziyade Gödel'in kendi felsefi pozisyonuna yakın bir Platonculuk anlayışıdır.

"Bu görüşe göre, mantık ve matematiğin nesneleri gerçek nesneler gibi "kavranabilirler", yani bizim "tanımlarımız ve inşalarımızdan bağımsız olarak vardırlar" (Feferman'dan aktaran Gür, 2012: 96). Gödel'in matematiğin nesnelerini fiziksel nesnelere benzetmesi fiziğin yasaları ile fiziksel nesneler arasındaki ilişkinin bir benzerinin matematiksel yasalar ile matematik nesneler arasında da olduğunu düşünmesinden dolayıdır.

Gödel'in matematiksel doğruluğu nasıl ele aldığını daha net görebilmek için Cantor'un süreklilik hipotezi (İng. *continium hypothesis*) üzerine yazdığı yazıdaki felsefi argümanları izlemek bize Gödel'in felsefi pozisyonu ile ilgili önemli ipuçları vermektedir. Sonsuzluğu ilk defa matematiksel bir kuram olarak ortaya atan Cantor, doğal sayılar, tam sayılar ve rasyonel sayılar kümelerinin sayılabilir sonsuz kümeler olduklarını söyler. Fakat diğer taraftan sayılamaz sonsuz kümelerin de olduğunu ve buna örnek olarak da reel sayıların gösterilebileceğini ifade eder (Cantor, 1874: 258-262). Burada bizim tartışmamız açısından önemli olan ise Cantor'un söz konusu bu iki sonsuz küme arasında başka sonsuz küme olmadığına ilişkin görüşüdür. "Süreklilik Hipotezi'ne göre doğal sayılar kümesinin sonsuzluğundan sonra gelen en küçük sonsuzluk reel sayılar kümesinin sonsuzluğudur" (Çevik: 127). Yani Cantor'un hipotezi; doğal sayıların kümesinden büyük olan, reel sayıların kümesinden de küçük olan sonsuz bir kümenin olmadığına ilişkindir.

1878 yılındaki makalesinde Cantor her ne kadar böyle bir varsayım ortaya atmış olsa da bu varsayımını kanıtlayamamıştır. Bu hipotezin çürütülemeyeceğini gösteren Gödel "Cantor'un Süreklilik Problemi Nedir?" (Gödel, 2004: 217-239) başlıklı makalesinde konuyu detaylıca ele almaktadır. Daha önce bu hipotezin çürütülemeyeceğini gösteren Gödel, aynı zamanda kanıtlanamayacağını da öngörmektedir. Gödel'in bu öngörüsü 1963 yılında Paul Cohen tarafından da doğrulanmıştır. Dolayısıyla bu durumda Cantor'un süreklilik hipotezi ne çürütülebilirdir ne de kanıtlanabilirdir. Gödel teoremlerinden tanıdık olduğumuz bu durum karar verilemezlikten başka bir şey değildir.

Hipotetik-tümdengelimsel olan aksiyomatik bir sistem içinde bir sorunun karar verilemez oluşu, o sorunun mutlak anlamda karar verilemez olmadığı, mevcut sistem içerisinde karar verilemez olduğu anlamına gelmektedir. Başka bir şekilde söylenirse Gödel, karar verilemezliğin eldeki sisteme göre değişken bir şey olduğuna dikkat çeker. Dolayısıyla Gödel, Platonculuğunun da bir sonucu olarak, süreklilik hipotezinin karar verilemez oluşunu sadece eldeki mevcut aksiyomların yetersizliğiyle ilişkilendirmektedir (Gür, 1986: 80).

Görüldüğü üzere Gödel, süreklilik hipotezinin karar verilemez oluşunun mutlak anlamda söz konusu olmadığını, eldeki aksiyomatik sistem dikkate alındığında söz konusu olduğunu ifade eder. Yani *Principia Mathematica* ya da *ZFC*[5] gibi aksiyomatik dizgelerde karar verilemeyen süreklilik hipotezi için karar vermeyi mümkün kılan daha güçlü aksiyomatik sistemler elde edilebilir. Süreklilik hipotezi için geçerli olan bu durum bir başka karar verilemeyen Gödel teoremleri içinde geçerli olmaktadır. Fakat Gödel teoremleri süreklilik hipotezinden farklı olarak doğruluğu bizzat Gödel tarafından üst-matematiksel yolla gösterilebilmiştir.

Gödel'in aksiyomatik sistemler hakkındaki bu esnek görüşleri aksiyomatik yöntemin kesinliği hakkında çoğulcu bir görüşün temsilciliğini yapmaktadır. Yani Gödel hangi

[5] Not: "ZFC" günümüzde pek çok matematikçinin çalıştığı bir aksiyomatik sistem olarak seçim aksiyomunun da dahil olduğu Zermelo-Fraenkel küme teorisinin kısaltmasıdır.

aksiyomatik sistem daha iyi çalışıyorsa onun kullanılabileceğini ve aksiyomatik sistemlerin karar veremeyeceği önermelerin de daima olacağını ifade etmektedir. Bu itibarla bakıldığında Gödel'e göre aksiyomatik sistemler bize olası doğruluklar verir. Çünkü aksiyomatik sistemler matematiksel doğruluğu yakalamaya çalışırken insan zihninden bağımsız bir gerçekliğe sahip olan matematik ile insan zihni arasında bir boşluk oluşmaktadır. "Dolayısıyla insan zihninin eylem ve karakterlerinden bağımsız olarak var olan, sadece insan zihni tarafından algılanan ve muhtemelen de çok eksik algılanan matematiğin duyusal olmayan bir gerçekliği açıkladığını kastediyorum." (Parsons, 2014: 169).

Matematiğin nesnelerinin bizden ve matematikçiden bağımsız olarak var olduğuna ilişkin Platoncu görüşü savunan Gödel, bu durumun ideal bir duruma işaret ettiğini düşünmektedir. Yani matematiğin nesneleri değişmez bir şekilde vardırlar fakat bizim onların doğruluklarına ilişkin kullandığımız sistemler değişken veya eksik olabilir. Diğer taraftan Gödel matematiksel nesneler ile ilgili sahip olduğumuz doğruluk anlayışına bir çeşit matematiksel görü (İng. *mathematical intuition*) aracılığıyla ulaştığımızı düşünür.

> Aksiyomların bize "doğru gibi gelmeleri" olgusunda görüldüğü üzere, duyularımıza olmasa da kümeler kuramının nesnelerini algılarken bir çeşit sezgiye başvuruyoruz. Bu matematiksel sezgiye, fiziksel kuramlar yaratan ve ileride değişmeyeceğine inandığımız duyularımızdan daha az güvenmemiz için bir neden göremiyorum. Şu an için karar veremediğimiz bir sorunun bir anlamı olabileceğine ve doğruluğuna gelecekte karar verilebileceğine inanmamak için de bir neden yok. Olası duyu yanılgıları fizik için ne kadar sorun ise kümeler kuramındaki paradokslarda matematik için o kadar sorundur. Daha önce de değinildiği gibi, gelecekte, Cantor'un süreklilik hipotezi türü problemlerin bir çözümüne yol açacak yepyeni matematiksel sezgiler mümkündür. (Gür, 2006: 80)

Gödel'in matematiksel Platonculuğu ile ilgili genel felsefi pozisyonunu ifade eden bu düşünceleri matematiksel görü ya da sezgi anlayışına dayanmaktadır. Gödel'e göre nasıl fizik teorileri empirik görü faaliyetinin eşliğinde fiziksel gerçeklik ile temas ediyorsa matematik teorileri de matematiksel görü faaliyeti eşliğinde matematiksel nesnelerle temas etmektedir. Matematiksel nesnelerle kurulan bu temas sonucunda elde edilen önermeler aksiyomatik sistem üzerinde gösterilebiliyorsa matematiksel bir doğruluk olarak kabul edilmektedir.

> Matematiksel görü ile fiziksel bir algı arasındaki benzerlik çok çarpıcıdır. "bu kırmızıdır" anlık verisini düşünmek keyfidir, fakat modus ponens veya tam tümevarımı ifade eden önermeyi düşünmek öyle değildir. Burada ilgili olduğu kadarıyla fark yalnızca, ilk durumda bir kavram ile belirli bir nesne arasındaki bir ilişkinin algılanması iken, ikinci durum ise kavramlar arasındaki bir ilişkidir. (Parsons, 2014: 175)

Burada bir kavram (kırmızılık kavramı) ile bir nesne (kırmızı olan her neyse o) arasında kurulan ilişkinin matematiksel nesneler ile matematiksel kavramlar arasında da kurulduğu ifade edilmektedir. Gödel'in biçimsel önermeleri numaralandırıp o numaraları asal sayıların üsleri olarak çarpıp biçimsel dili nasıl aritmetikleştirdiğini daha önce açıkladık. Fakat Gödel'in biçimsel dizgelerin önermelerinin biricik temsillerini asal sayılar üzerinden kurma düşüncesi bazı eleştirilere konu olmaktadır.

Gödel numaralandırması aritmetik tamdeyimlerin *yer*lerini birebir temsil etmesine rağmen *yer*lerin kalıcı bir çokluğunun nasıl kurulduğu konusunda birtakım eleştiriler vardır. Çitil'e göre, Gödel numaralandırmasında asal sayıların üslerinin farklı yerlere karşılık gelmesi bu yerlerin kuruluşu bakımından bazı soruları cevapsız bırakır. Çünkü söz konusu yerlerin kuruluşunu doğal sayılar temin etmediği için işaretlerin kendileri ile sıralamadaki işgal ettikleri yer mahiyet itibariyle farklıdır (Çitil, 2012: 173).

Çitil'e göre asal sayılar ile tamdeyimler arasında sayısal olarak temsil etme-edilme ilişkisi kurulabilmektedir. Fakat bu durum bize tamdeyime ait işaretlerin rastlantısal olarak sıralandıkları mekânın nasıl mevcut olduğunu açıklamamaktadır. Çünkü Çitil'e göre biçimsel bir dizgenin inşa edilmesinde hem dizgenin temel işaretlerine hem de bu işaretlerin belli yan yana gelişlerini temin eden "sıra" kavrayışına ihtiyaç vardır. Çitil açısından tamdeyimlerin ifade edildiği biçimsel dizgelerin nasıl kurulduğunu açıklayabilmek için bu dizgelerin kuruluşunu temin eden yerlerin ontolojik zemininin açıklanması gerekmektedir. Burada ontolojik zeminden kasıt, biçimsel dizgelerin kuruluşunu temin eden doğal sayıların sıral ve sayal anlamda incelenerek dizgelere nasıl zemin hazırladığının gösterilmesidir.[6]

Çalışmamızın başlarında kısaca ele aldığımız üzere Russell paradoksunda bir nesnenin ya da kümenin varlığını yine nesnenin kendisine dayandırmaktan kaynaklanan ontolojik bir döngüsellik ortaya çıkmaktaydı. Çitil'e göre benzer bir ontolojik döngüsellik Gödel teoremleri için de söz konusudur (Çitil, 2012: 179). Gödel doğal sayılara ilişkin tüm doğru önermeleri temsil edebilmek için oluşturduğu biçimsel dizgeyi yine aynı doğal sayılara dayandırmaktadır. Bu durum Çitil'e göre biçimsel yönden herhangi bir döngüsellik barındırmasa da ontolojik bir incelemeyle fark edilecek ontolojik bir döngüsellik barındırmaktadır.

[6] Not: Çitil'in biçimsel dizgelerin ontolojik zeminine ilişkin eleştirisi sadece Gödel teoremlerine yönelik değildir. Frege'nin aritmetiği mantığa indirgeme projesi dahil olmak üzere Hilbert'in biçimselcilik projesi üzerinden devam eden biçimsel kuramların hepsinde aynı incelemenin elzem olduğunu düşünmektedir. Biçimsel dizgelerin kuruluşunun ontolojik olarak gösterilmesi gerektiğine dair Çitil'in görüşleri hakkında detaylı bilgi için adı geçen eserin ilgili bölümüne bakılabilir.

Buradaki eleştirilerin biçimsel dizgelerin zemini ile ilgili olmanın yanı sıra Gödel'in kullandığı "görü" kavramından da kaynaklandığını düşünüyoruz. Çünkü Gödel'in 'matematiksel görü' anlayışının Kant'ın görü anlayışıyla ne bakımdan benzerlik taşıdığı tartışmalıdır. Diğer bir soru da Frege gibi matematiksel Platoncuların şiddetle kaçındığı görü anlayışını savunan Gödel'in nasıl olup da bu anlayış ile Platoncu pozisyonunu muhafaza ettiğidir. Bu yüzden Gödel'in teoremlerini Kantçı görü anlayışı ile Fregeci Platonculuk arasında bir değerlendirmeye tabi tutmak gerektiğini düşünüyoruz.

Gödel'in tamamlanamazlık teoremleri Kant'ın yaptığı kavram- görü ayrımı ile birlikte düşünüldüğünde belli bir açıdan anlaşılırlık kazanmaktadır. Gödel'in inşa ettiği saptanamaz olan "G" önermesini hatırlayalım. Bu önerme Gödel'e göre biçimsel dizge içerisinde saptanamamasına rağmen doğruluğu fark edilen bir önermedir. Peki bu önermenin doğruluğu nasıl fark edilmektedir? Bu soruya Kant'ın yargı yetisi üzerinden bir cevap vermek mümkündür. Çünkü biçimsel bir dizgede dolaysızca bulunan işaret dizilerinden yola çıkarak karar verilemeyen "G" önermesinin doğruluğuna bir dolayım yoluyla erişilebilmektedir. Bu dolayım ise Kant'ın transandantal felsefesindeki bilince sahip Ben'in görüde dolaysızca mevcut olan temsilleri kavramsal olarak kendisine temsil etme kabiliyetinden gelmektedir.

Frege ve Hilbert gibi biçimselliği savunanların amaçlarından birisi de Kant'ın saf görü anlayışına izin vermemektir. Onlar Kant'ta olduğu şekliyle yargı yetisine ve yargı veren bir Ben'e ihtiyaç duymadan işaret dizileri yoluyla önermeleri biçimsel dilde temsil edebileceklerini düşünmüşlerdir. Fakat Gödel'in inşa ettiği saptanamaz önerme biçimsel olarak saptanamaz olup kavramsal olarak doğruluğu saptanabilmektedir. Yani sadece işaret dizilerinin kendilerine ve bu dizilerden diğer dizilere geçmenin kurallarına dayanarak söz konusu önerme hakkında karar verilememektedir. Fakat bir bilincin kavramsal faaliyeti eşliğinde dizgenin dışına çıkıldığında saptanamaz olan önermenin doğruluk değeri saptanabilir hale gelmektedir.

Tabii ki buradaki saptamanın biçimselcilerin sisteminin sınırlarını ihlal edip Kant'ın yargı yetisi sınırlarına girmekle mümkün olduğunu düşünüyoruz. Bu yüzden Gödel'in tamamlanamazlık teoremleri Kant'ın yargı yetisi ile birlikte düşünüldüğünde Kantçı anlamda görüyü ve yargı yetisini savunur görünmektedir. Fakat Gödel'in teoremleri Kantçı yargı yetisi üzerinden anlaşılmaya elverişli olsa da Gödel'in Platoncu tarafını da göz ardı etmemek gerekir. Bilindiği üzere Gödel doğal sayılara Platoncu anlamda varlık atfetmiştir.

Platoncu düşünce matematiksel önermelerin doğruluk değerini uzay-zamanın dışındaki bir dünyaya ait olan Platoncu varlıkların gerçekliğine göre belirler. Platoncu dünyadaki varlıklar ile bizim dünyamızdaki nesneler arasında nedensel bir ilişki olmadığına göre o dünyada ne olup bittiğini nasıl bilebiliriz? Daha somut ifade edecek olursak "iki" gibi özel bir kelimenin o dünyadaki nesnelerin mutlak sonsuzluğundan belirli bir tanesi olması ya da onun yerine geçmesi nasıl mümkün olmaktadır? (Field, 2004: 284).

Gödel'in Kant ile Frege arasında nasıl bir felsefi pozisyonu temsil ettiği konusu bu çalışmanın sınırları dışında kalmaktadır.[7] Matematiksel doğruluk hakkında Tarski'ci doğruluk tanımına yakın bir pozisyonda olan Benacerraf, Gödel'in savunduğu matematiksel doğruluğun yeterince temellendirilmediğini iddia eder. Benacerraf'a göre 'x' gibi bir kişinin 'p' bilgisinin doğruluğunu elde etmesi için x'in p hakkındaki kanaatinin nedensel bir ilişki içerisinde olması gerekmektedir.

> (P'nin açıklandığı dil için yeterli bir hakikat tanımında verildiği gibi) p'nin hakikat koşullarıyla p'nin bilindiği temeller arasında, en azından kişiyi önermelerin kendiliğinden olmadığına inandırabilecek uygun bir çeşit bağlantı kurmak mümkün olmalıdır. Bunun yokluğunda, *bu temellere sahip olmak* ile *doğru olan bir önermeye inanmak* arasında bir bağlantı kurulamamıştır. Bu temellere sahip olmak p'yi *bilmenin* açıklamasıyla uyuşamaz. *Bu temeller üzerinde* p ile p hakkında bir kanaati gerekçelendirme arasında bir bağlantı kurulamaz. (Benacerraf, 2004: 255)

X'in p hakkındaki bilgisinin p'nin doğruluk ya da hakikat koşullarının bilinmesiyle mümkün olduğunu savunan Benacerraf, matematiksel bilginin doğruluk koşulları hakkında böyle bir kavrayışa sahip olamadığımızı düşünmektedir. "Örneğin, sayılar normal addedilmesi gereken bir çeşit varlık ise, sayı kuramının önermelerinin hakikat koşulları ile matematiksel bilgiye sahip olduğu düşünülen kişilerle ilişkili herhangi bir olay arasında bir bağlantı kurulamaz." (Benacerraf, 2004: 255).

Gödel'in duyu tecrübesinden bağımsız olsa da matematiksel bir görü aracılığıyla aksiyomların kendilerini bize doğru gibi kabul ettirdiklerini ifade eden görüşlerine daha önce değindik. Benacerraf ise matematiksel görünün matematiksel önermelerin doğruluğu ile nasıl ilişkilendiğinin cevapsız kaldığını savunmaktadır.

6. Sonuç

Makalemizde Gödel'in gösterdiği doğruluk anlayışının ispat edilebilirlik ile olan bazı farklarını göstermeye çalıştık. Gödel biçimsel bir sistemde doğru olan ama sistem içerisinde doğruluğuna karar verilemeyen önermelerin her daim var olacağını göstererek ispatı verilemeyen matematiksel doğrular olduğunu göstermiştir. Bu durum

[7] Kant, Frege ve Gödel karşılaştırması için Bkz. Heijenoort, J. Van. (1967). *From Frege to Gödel*: *A Source Book in Mathematical Logic*, 1879-1931, Cambridge: Harvard University Press.

başta Hilbert gibi biçimselcilerin ve pek çok matematikçinin ispat ile doğruluk arasında ayrım yapmamasının yanlışlığını da ortaya çıkarmaktadır.

Gödel'in tamamlanamazlık teoremleri matematiğin tutarlılığına dönük çok temel bir eksikliği de gündeme getirmektedir. Bu eksiklik, matematiksel ispatların yapıldığı biçimsel sistemlerde karar verilemez olan önermelerin engellenemez oluşuyla ilgilidir. Böylece doğru olduğu halde ispatı verilemeyen önermeler matematiğin tutarlılığı yolunda büyük bir sorun haline gelirken Hilbert'in biçimselci sisteminin de sorgulanmasına neden olmaktadır. Biçimsel bir sistemde karar verilemeyen ama doğru olduğu bir şekilde bilinen önermelerin olduğunun gösterilmesi, doğruluğun biçimsel sistemlerin dışında mı aranması gerektiği sorusunu ortaya çıkarmıştır.

Diğer taraftan Gödel her ne kadar biçimsel sistemlerin epistemolojik yetersizliğini göstermiş olsa da bu sistemler bilgisayar bilimleri gibi modern bilimin matematiksel olarak modellenmesinde kullanılan diller gibi pek çok alanda kullanılmaya devam etmektedir. Biçimsel sistemler üzerine kurulu yapay zekâ algoritmaları pek çok problemi çözmekte ve bilimsel ilerlemeleri hızlandırmaktadır. Fakat aynı zamanda yapay zekanın çözemediği pek çok sorun bilgisayar biliminin hesap karmaşıklığı kuramı (İng. *computational complexity theory*) alanında artarak devam etmektedir. Bu sorunlar Gödel teoremleri ile birlikte düşünüldüğünde yapay zekanın yetersizliğine dönük yeni bir açılım sağlayabilir mi? Yapay zekanın sınırlılıkları biçimsel bir dil üzerinde programlanmasından kaynaklanıyor olabilir mi? Bu gibi pek çok soru bizim çalışmamızın kapsamında olmasa da potansiyel çalışmalar için kışkırtıcı olabilir.

Gödel'in matematiksel nesneler ile ilgili temel kaygılarından bir tanesi bu nesnelerin Platoncu gerçeklik ile uzay-zamana tabi olan fiziksel gerçeklik arasında nasıl bir yerde durduğudur. Bu yeri göz önünde bulundurarak Gödel'in düşüncelerinin Platoncu ve Kantçı düşünce arasında değerlendirilmesi gerektiğini düşünüyoruz. Matematiksel nesnelerin varlığı söz konusu olduğunda Gödel'in Platoncu varlık anlayışına yakın durduğunu ifade edebiliriz. Çünkü Gödel doğal sayıların varlığının insan düşüncesinin bir yaratımı olmaktan ziyade insandan bağımsız olduğunu savunan kavramsal bir realisttir. Bu yüzden matematiksel nesnelerin Platoncu bir zeminde ortaya çıktığını düşündüğünden olsa gerek bunların nasıl kurulduğuna ilişkin felsefi bir arayışa girmemiş görünmektedir.

Fakat diğer taraftan da Platoncu varlık zeminine yakın olan matematiksel nesnelerin bilgisine ulaşırken Kant'ın transandantal felsefesinden faydalanmanın Gödel teoremlerini anlamayı mümkün kılacağına işaret etmek istiyoruz. Kant'ın transandantal felsefesindeki bilince sahip Ben'in, görüde dolaysızca mevcut olan temsilleri kavramsal olarak kendisine temsil etme kabiliyeti Gödel teoremlerinin anlaşılmasında açıklayıcı rol oynamaktadır. Bu yüzden Kantçı bir okumayla Gödel'in inşa ettiği biçimsel dildeki saptanamaz önermenin doğru olduğunun farkına kavram-görü ayrımı üzerinden erişilebileceğini düşünüyoruz.

5. Kaynakça

Barker, S. F. (2017). *Matematik Felsefesi*. Çev. Yücel Dursun. Ankara: İmge Kitabevi Yayınları.

Benacerraf, P. (2004). "Matematiksel Hakikat." Bekir S. Gür (Der.), *Matematik Felsefesi* içinde (s.239-265). Ankara: Orient Yayınları.

Cantor, G. (1874). "Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffs Aller Reellen Algebraischen Zahlen." *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 77: 258-262.

Casti, J. L. & Depauli, W. (2004). *Gödel*. Çev. Ergün Akça. İstanbul: Kabalcı Yayınevi.

Çevik, A. (2019). *Matematik Felsefesi ve Matematiksel Mantık*. İstanbul: Nesin Yayıncılık.

Çitil, A. A. (2016). "Saf Görü, Biçimsel Dizge, Turing Makinesi ve Frege'nin Kavram-Yazısı." *Felsefi Düşün*, 7 (Ekim): 45- 69.

Çitil, A. A. (2012). *Matematik ve Metafizik Kitap 1: Sayı ve Nesne*. İstanbul: Alfa Yayınları.

Field, H. (2004). "Matematikte Realizm ve Karşı-Realizm." Bekir S. Gür (Der.), *Matematik Felsefesi* içinde (s.265-299). Ankara: Orient Yayınları.

Frege, G. (2008). *Aritmetiğin Temelleri: Sayı Kavramı Üzerine Mantıksal-Matematiksel Bir İnceleme*. Çev. H. Bülent Gözkan, İstanbul: Yapı Kredi Yayınları.

Goldstein, R. (2018). *Gödel'in Tamamlanmamışlık Kuramı*. Çev. Sevcan Seçkin. İstanbul: Alfa Yayınları.

Gödel, K. (2010). *Principia Mathematica ve İlişkili Dizgelerin Biçimsel Olarak Karar Verilemeyen Önermeleri Üzerine I*. Çev. Özge Ekin. İstanbul: Boğaziçi Üniversitesi Yayınevi.

Gödel, K. (2004). "Cantor'un Süreklilik Problemi Nedir?" Bekir S. Gür (Der.), *Matematik Felsefesi* içinde (s.217-239). Ankara: Orient Yayınları.

Gür, B. S. (2006). "Bir Matematik Filozofu Olarak Kurt Gödel." *Matematik Dünyası*, 70: 77-83.

Gür, B. S. (2012). *Matematik Belası Üzerine: Matematik Felsefesinde Köşe Taşları*. İstanbul: Nesin Yayınevi.

Heijenoort, J. Van. (1967). *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*. Cambridge: Harvard University Press.

Murawski, R. (2020). "Proof vs. Truth in Mathematics." *Studia Humana, 9* (3-4): 10-18.

Nabiyev, V. V. (2007). *Algoritmalar*. Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Nagel, E. ve Newman, J. R. (1994). *Gödel Kanıtlaması*. Çev. Bülent Gözkan, İstanbul: Sarmal Yayınevi.

Parsons, C. (2014). "Platonism and Mathematical Intuition in Kurt Gödel's Thought." *Philosophy of Mathematics In The Twentieth Century* içinde, Cambridge: Harvard University Press.

Russell, B. (1919). *Introduction to Mathematical Philosophy*. London: George Allen & Unwin Ltd.

Sertöz, A. S. (2019). *Öklid'in Elemanları*. Ankara: TUBİTAK Popüler Bilim Kitapları.

Yıldırım. C. (2017). *Matematiksel Düşünme*. İstanbul: Remzi Kitabevi.

Zach, R. (2019). "Hilbert's Program." E. N. Zalta (Der.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* içinde. Alındığı URL: http://plato.stanford.edu/archives/fall2019/entries/hilbert-program/