DOI:10.25092/baunfbed. 1055987 **J. BAUN Inst. Sci. Technol., 24(2), 728-737, (2022)**

Yakın esnek ayırma aksiyomları ve kuratowski kapanış operatörü üzerine

Koray YILMAZ[1*] , Hatice TAŞBOZAN[2], Aydın GÜZELKOKAR[3] ,

[1,3]Kütahya Dumlupınar Üniversitesi Fen Edebiyat Fak., Merkez kampüs, Kütahya.
[2]Mustafa Kemal Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak. Matematik Böl., T.Sökmen kampüsü, Hatay.

Geliş Tarihi (Received Date): 10.01.2022
Kabul Tarihi (Accepted Date): 14.06.2022

Öz

Bu çalışmada ilk bölümde kullanacağımız temel kavramlar verilmiştir. Daha sonra yakın esnek topolojik uzay ve bu yapının bazı özellikleri verildi. Üçüncü bölümde yakın esnek topolojik uzayın ayırma aksiyomları ile ilgili bağlantısı incelenmiş olup yakın esnek topolojik uzayının ayırma aksiyomları verildi. Kuratowski kapanış operatörü ile yakın esnek topoloji olma aksiyomlarının sağlandığını gösterdik.

Anahtar kelimeler: *Ayırma aksiyomları, hausdorff uzayı, kuratowski kapanış operaötürü, regüler uzay.*

On near soft seperation axioms and kuratowski closure-operator

Abstract

In this study, the basic concepts that we will use in the first chapter are given. Next, the near soft topological space and some properties of this structure are given. In the third chapter, the connection of the near soft topological space with the separation axioms is examined, the separation axioms of the near soft topological space are shown and some examples are given. We have shown that with the Kuratowski closure operator the axioms of being a near soft topology are satisfied.

Keywords: *Hausdorff space, kuratowski closure operator, seperation axioms, reguler space.*

*Koray YILMAZ, koray.yilmaz@dpu.edu.tr, http://orcid.org/0000-0002-8641-0603
Hatice TAŞBOZAN, htasbozan@mku.edu.tr, http://orcid.org/0000-0002-6850-8658
Aydın GÜZELKOKAR, aydiin1903@gmail.com, http://orcid.org/0000-0003-3791-8248

1. Giriş

Gerçek yaşamda karşılaştığımız birçok problemi çözmek için matematiksel modeller ve bununla ilgili bir yaklaşıma ihtiyaç duyarız. Pawlak [1], bir nesne kümesini başka bir nesne kümesine, nesnenin özellik değerleri arasındaki bir karşılaştırmaya dayanarak bir ayırt edilemezlik ilişkisini kullanarak yaklaşmayı denedi ve sert küme teorisini elde etti. Benzer bir kavram olan yakın kümeler kavramı, yakınlıklara sahip nesneleri inceleyen Peters [2] tarafından tanıtıldı. Esnek küme teorisi ise Molodtsov [3] belirsiz kavramlar hakkında genel bir çerçeve olarak karşılaştırma yapmak için elde edilen bir teoridir. Tasbozan [4] bunlardan esnek küme ve yakın küme kavramlarının birleştirilmesiyle yeni bir kavram olan yakın esnek küme kavramını elde etmiştir.

Esnek küme uygulamaları, parametreli alternatif değerlerle başa çıkmak için güçlü ve etkili bir yöntemdir. Bu yöntemler, esnek kümelerin genişletilmiş bir modeli ve belirsiz bilgilerle başa çıkmada büyük avantajları olan ve esnek kümelerin uygulamalarla birleştirilmesiyle önerilen yeni birer matematiksel araçlardır. Klasik yöntemlerin ekonomi, mühendislik, tıp ve diğer alanlardaki tüm belirsizlik karar verme problemlerini çözemeyeceği için klasik yöntemlerin çözemediği bazı belirsizliklerde esnek kümeler ile uygun çözümler bulmak mümkündür. Örneğin yatırım türüne karar verme problemi üzerine [11,12] ve çeşitli günlük hayat problemlerine karar verme üzerine uygulamaları [13,14] mevcuttur.

Bu çalışmada yakın esnek topolojik uzaylar için Kuratowski metodu tanımından yola çıkarak Kuratowski dönüşümünün yakın esnek küme üzerinde bir tek yakın esnek topoloji belirlediğini gösterdik.

2. Temel kavramlar

Bu bölümde esnek küme, yakın yaklaşım uzayı, yakın esnek küme ve ilgili kavramları vereceğiz.

2.1 Tanım

$P(U)$, U kümesinin kuvvet kümesi ve $A \subseteq E$ olsun. $F: A \to P(U)$ dönüşümü verilsin, $G = (F, A)$ ikilisine U kümesi üzerinde bir esnek küme denir [6].

2.2 Tanım

$NAS = \left(O, F, B, \sim B_r, V_r, V_{N_r}\right)$ yakın yaklaşım uzayı ve $\sigma = (F, B)$; O kümesi üzerinde bir esnek küme olmak üzere, NAS yakın yaklaşım uzayındaki $\sigma = (F, B)$ kümesinin alt ve üst yaklaşımları sırasıyla;

$N_{r_*}(\sigma) = (F_*, B)$ ve $N_r^{\ *}(\sigma) = (F^*, B)$

esnek kümeleri ile gösterilir. $\forall \varphi \in B$ için

$$F_*(\varphi) = N_{r_*}\big(F\ (\varphi)\big) = \{x \in O \colon [x]_{B_r} \subseteq F\ (\varphi)\}$$

$$F^*(\varphi) = \ N_r^{\ *}\big(F\ (\varphi)\big) = \{x \in O \colon [x]_{B_r} \cap F\ (\varphi) \neq \emptyset\}$$

$$Bnd_{N_r}(B) = (N_r^{\ *}(\sigma) - N_{r_*}(\sigma)) \geq 0$$

eşitlikleri sağlanıyorsa bu kümeye yakın esnek küme denir [4]. (O üzerindeki tüm yakın esnek kümeler ailesi $NSS(O,B)$ olarak göstereceğiz.)

2.3 Tanım

$(F,B) \in NSS(O,B)$ olarak verilsin. (F,B) Yakın esnek kümesinin tümleyeni $(F,B)^c$ ile ifade edilir ve her $\varphi \in B$ için $(F)^c(\varphi) = O - F(\varphi)$ eşitliği sağlanır [4].

2.4 Tanım

$(F,B) \in NSS(O,B)$ olarak verilsin. (F,B) ikilisi (G,B) ikilisinin yakın esnek alt kümesi olsun. her $\varphi \in B$ için

$$N_{r_*}(F,B) \subseteq N_{r_*}(G,B)$$

olur. (G,B) ikilisi (F,B) ikilisinin yakın esnek alt kümesi olduğunda (F,B) ikilisine (G,B) ikilisinin yakın esnek üst kümesi olarak adlandırılır ve

$$(F,B) \supseteq (G,B)$$

şeklinde gösterilir [4].

2.5 Tanım

$(F,B),(G,B) \in NSS(O,B)$ olarak verilsin. (F,B) ve (G,B) birbirlerinin yakın esnek alt kümesi ise eşittir denir ve

$$(F,B) = (G,B)$$

şeklinde gösterilir [4].

2.6 Tanım

$(F,B),(G,B) \in NSS(O,B)$ olmak üzere

i. $((F,B) \cup (G,B))^c = (F,B) \cap (G,B)$
ii. $((F,B) \cap (G,B))^c = (F,B) \cup (G,B)$

eşitlikleri sağlanır [4].

3. Yakın esnek topoloji ve bazı özellikleri

Bu bölümde yakın esnek topolojik uzay tanımını ve bu uzaydaki açık ve kapalı kümelerin tanımını vererek bu topolojik yapının bazı özelliklerini literatürden hatırlattık. Ayrıca 5.bölümde kullanmak üzere yakın esnek topolojik uzaydaki kompaktlık tanımını verdik.

3.1 Tanım

$\sigma = (F,B)$, (O,B) üzerinde yakın esnek küme olsun. τ ailesi, σ ailesinin yakın esnek alt kümelerinin koleksiyonu ve $B \subseteq F$ boş olmayan parametrelerin kümesi olsun. τ ailesi aşağıda verilen aksiyomları sağlıyorsa (O,B) üzerinde yakın esnek topoloji olarak adlandırılır.

i. Her $\varphi \in B$ için $(\emptyset,B),(O,B) \in \tau$ öyleki $\emptyset(\varphi) = \emptyset$ ve $F(\varphi) = F$ olur.
ii. τ ailesine ait yakın esnek kümelerin sonlu kesişimleri yine τ ailesine aittir.
iii. τ ailesine ait yakın esnek kümelerin herhangi birleşimleri yine τ ailesine aittir.

(O,τ) ikilisi yakın esnek topolojik uzay olarak adlandırılır. Yakın esnek topolojik uzayın elemanlarına yakın esnek açık kümeler denir [4].

3.2. Örnek

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
σ_1	1	2	2	1	2
σ_2	2	3	3	2	5
σ_3	3	3	4	3	4
σ_4	4	2	2	4	2

$O = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}, F = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4\}, B = \{\sigma_1, \sigma_2\}$ olsun.
$(F, B) = \{(\sigma_1, \{y_1, y_2, y_3, y_4\}), (\sigma_2, \{y_1, y_2, y_3, y_4\}), (\sigma_3, \{y_1, y_3, y_4\})\}$ yakın esnek kümesi olmak üzere;

$$(F_1, B) = \{(\sigma_1, \{y_1\}), (\sigma_2, \{y_2, y_3\})\},$$
$$(F_2, B) = \{(\sigma_1, \{y_1\}), (\sigma_2, \{y_2, y_3, y_4\})\},$$

$\tau = \{(\emptyset, B), (F, B), (F_1, B), (F_2, B)\}$ olup τ ailesi (O, B) üzerinde yakın esnek topolojidir.

3.3 Tanım

(O, B) üzerinde bir yakın esnek topolojik (O, τ) ve bir yakın esnek küme $e(F, B)$ verilsin. Eğer $(F, B)^c \in \tau$ ise (F, B) ikilisine yakın esnek kapalı küme denir [4].

3.4 Tanım

(O, B) üzerinde yakın esnek topolojik uzay (O, B, τ) olmak üzere:

i. $(\emptyset, B)^c$ ve $(O, B)^c$, (O, B) üzerinde kapalı kümelerdir.
ii. Yakın esnek kümelerin rastgele kesişimleri (O, B) üzerinde yakın esnek kapalıdır.
iii. Yakın esnek kümelerin sonlu birleşimleri (O, B) üzerinde yakın esnek kapalıdır [4].

3.5 Tanım

(O, B, τ) yakın esnek topolojik uzay, $(F, B) \in NSS(O, B)$ olsun.

i. $\bigcap \{(G, B) \supseteq (F, B)$: $(G, B), (O, B)$ üzerindeki yakın esnek kapalı kümeler$\}$ kümesi (F, B) ikilisinin (O, B) de yakın esnek kapanışı olarak adlandırılır. $cl_n(F, B)$ olarak gösterilir.
ii. $\bigcup \{(C, B) \subseteq (F, B)$: $(C, B), (O, B)$ üzerindeki yakın esnek açık kümeler$\}$ kümesi (F, B) ikilisinin (O, B) üzerinde yakın esnek içi olarak adlandırılır. $int_n(F, B)$ olarak gösterilir [7].

3.6 Önerme

(O, B, τ) yakın esnek topolojik uzay, $(F, B), (G, B) \in NSS(O, B)$ olsun.

i. $int_n(int_n(F, B)) = int_n(F, B)$
ii. $(F, B) \subseteq (G, B)$ ise $int_n(F, B) \subseteq int_n(G, B)$
iii. $int_n(F, B) \cap int_n(G, B) = int_n((F, B) \cap (G, B)$
iv. $int_n(F, B) \cup int_n(G, B) \subseteq int_n((F, B) \cap (G, B)$
v. $cl_n(cl_n(F, B)) = (F, B)$
vi. $(F, B) \subseteq (G, B)$ ise $cl_n(F, B) \subseteq cl_n(G, B)$

vii. $cl_n(F,B) \cap cl_n(G,B) \subseteq cl_n((F,B) \cap (G,B)$
viii. $cl_n(F,B) \cup cl_n(G,B) = cl_n((F,B) \cup (G,B)$

yakın esnek kapanış ve yakın esnek iç kısım arasındaki ilişki aşağıdaki teorem ile verilmiştir [8].

3.7. Önerme

(O,B,τ) yakın esnek topolojik uzay olsun. $(F,B) \in NSS(O,B)$ olmak üzere

i. $cl_n(F,B)^c = O - int_n(F,B)$
ii. $int_n(F,B)^c = O - cl_n(F,B)$

eşitlikleri sağlanır [8].

İspat.

i. $(G,B) \subseteq (F,B)$ yakın esnek kümeler olsun. $(G,B) \supseteq (F,B)^c$ yakın esnek kapalı kümeler olmak üzere;

$int_n(F,B) = \bigcup \{(G,B)^c: (G,B)$ yakın esnek kapalı kümeler ve $(G,B) \supseteq (F,B)^c\}$
$= O - \bigcap \{(G,B): (G,B)$ yakın esnek kapalı kümeler ve $(G,B) \supseteq (F,B)^c\}$
$= O - (F,B)^c$

olup $cl_n(F,B)^c = O - int_n(F,B)$ eşitliği gösterilmiş olur.
Benzer şekilde ii. gösterilebilir.

3.8. Önerme

(O,B,τ) Yakın esnek topolojik uzay olsun. $(F,B), (G,B) \in NSS(O,B)$;

i. (F,B) Yakın esnek kapalı ise $(F,B) = cl_n(F,B)$
ii. (G,B) Yakın esnek açık ise $(G,B) = int_n(G,B)$

eşitlikleri sağlanır [8].

İspat.

i. Kabul edelim ki $(F,B) = cl_n(F,B) = \bigcap \{(C,B): (C,B)$ yakın esnek kapalı küme ve $(C,B) \supseteq (F,B)\}$ olsun. $(F,B) \in \bigcap \{(C,B): (C,B)$ yakın esnek kapalı küme ve $(C,B) \supseteq (F,B)\}$ olduğunda (F,B) yakın esnek kapalı küme olur. Tersine $(F,B), (O,B)$ üzerinde yakın esnek kapalı olsun. O halde $(F,B) \in \bigcap \{(C,B): (C,B)$ yakın esnek kapalı küme ve $(C,B) \supseteq (F,B)\}$ olur. $(F,B) \subseteq (C,B)$ olduğundan $(F,B) = \bigcap \{(C,B): (C,B)$ yakın esnek kapalı küme ve $(C,B) \supseteq (F,B)\} = cl_n(F,B)$ olur .

Yani $(F,B) = cl_n(F,B)$ olduğu gösterilmiş olur. Benzer şekilde ii. de gösterilebilir.

3.9 Tanım

$(F,B) \in NSS(O,B)$ olsun. $\varphi \in B$ ve $\varphi' \in B - \{\varphi\}$ için $F(\varphi) \neq \emptyset$ ve $F(\varphi') = \emptyset$ ise (F,B) ye (O,B) üzerinde yakın esnek nokta denir ve φ_F^N ile gösterilir [8].

3.10 Tanım

(O,B,τ) Yakın esnek topolojik uzay ve $(G,B) \in NSS(O,B)$ olsun. Eğer $\varphi_F^N \in (H,B) \subseteq (G,B)$ olacak şekilde (H,B) yakın esnek açık kümesi varsa (G,B) ikilisinin yakın esnek iç noktası $\varphi_F^N \in (O,B)$ olarak gösterilir [8].

3.11 Önerme
(O, B, τ) Yakın esnek topolojik ve $(F, B) \in NSS(O, B)$ olmak üzere $(G, B) \subseteq (F, B)$ olsun. Her $b \in B$ için $b \in (H, B) \subseteq (G, B)$ yakın esnek kümesi varsa (H, B) yakın esnek açık küme olur [8].

İspat.
$(G, B) \in \tau$ olsun. Her $b \in B$ için $b \in (G, B) \subseteq (F, B)$ olduğu açıktır. $(G, B) \subseteq (F, B)$ olduğundan her $b \in (G, B)$ için yakın esnek açık kümesi vardır öyle ki $b \in (H, B) \subseteq (G, B)$ olur. Buradan,

$$(G, B) = \bigcup \{\{b\}: b \in (G, B)\} \subseteq (H, B) \subseteq (G, B)$$

olarak yazılabileceğinden $(G, B) = \cup (H, B) \in \tau$ elde edilir.

3.12 Tanım
(O, B, τ) Yakın esnek topolojik uzay ve $(G, B) \subseteq (F, B)$ olsun. Eğer $(G, B) \cup_{i \in I} (H, B_i)$ ise $(H, B_i)_{i \in I} \subseteq \tau$ ailesine yakın esnek açık örtü denir [9].

3.13 Tanım
(O, B, τ) Yakın esnek topolojik uzay olsun, $(F, B) \in NSS(O, B)$ olsun. (G, B) yakın esnek kümesinde, her yakın esnek açık örtünün sonlu bir alt örtüsü mevcutsa (O, B, τ) uzayına yakın esnek kompakt uzay denir.

3.14 Tanım (O, B, τ) yakın esnek topolojik uzay ve $(G, B) \subseteq (F, B)$ olsun. τ ailesi ile (G, B) üzerindeki yakın esnek topoloji;

$$\tau(G, B) = \{(F, B) \cap (G, B): (G, B) \in \tau\}$$

şeklinde (G, B) ikilisinin yakın esnek ailesi $\tau(G, B)$ olur [8].

4. Yakın esnek uzaylar için kuratowski dönüşümü

Bu bölümde kuratowski kapanışı tanımını yakın esnek uzaylar için tanımladık. Bu tanım ile birlikte, yakın esnek küme için α kuratowski operatörü yardımı ile bu yapının bir yakın esnek topolojik uzay olduğunu gösterdik.

4.1 Tanım
O yakın esnek küme $P(O)$ kuvvet kümesi olmak üzere Her $(F, B), (G, B) \in P(O)$ için:

K1 $\quad \alpha(\emptyset) = \emptyset$

K2 $\quad (F, B) \subset \alpha(F, B)$

K3 $\quad \alpha((F, B) \cup (G, B) = \alpha(F, B) \cup \alpha(G, B)$

K4 $\quad \alpha\big(\alpha(F, B)\big) = \alpha(F, B)$

aksiyomlarını sağlayan $\alpha: P(O) \to P(O)$ dönüşümüne kuratowski kapanış operatörü $\alpha(F, B)$ kümesine (F, B) esnek kümesinin kuratowski kapanışı denir.

Şimdi kuratowski kapanış yöntemi ile yakın esnek kümenin topolojik yapı oluşturduğunu göstereceğiz.

4.2 Teorem

$(F,B),(O,B)$ kümesi üzerinde bir yakın esnek küme ve (O,B) yakın esnek kümesi üzerinde tanımlı α kuratowski operatörü yardımıyla (O,B) yakın esnek kümesi üzerinde tanımlanan

$$\mathbf{K} = \{(F,B) \subset (O,B): \alpha(F,B) = (F,B)\}$$

ailesi bir ve yalnızca bir yakın esnek topoloji belirler. Bu topolojiye göre $\alpha(F,B)$ kuratowski kapanışı (F,B) kümesinin yakın esnek kapınışına eşittir.

İspat.

K ailesinin esnek topolojinin kapalı kümeler aksiyomlarını sağladığını göstereceğiz.

i. K1 aksiyomunda $(\emptyset,B) \in \mathbf{K}$ olduğu görülür. K2 aksiyomundan $(O,B) \subset \alpha(O,B)$ kapsaması sağlanır. α operatörünün tanımından göre $\alpha(O,B) \subset (O,B)$ olması $(O,B) = \alpha(O,B)$ eşitliğini gerektirir.. Bu ise $(O,B) \in \mathbf{K}$ olmasıdır.

ii. $(G,B),(H,B) \in K$ olsun K3 alsiyomundan

$$\alpha((G,B) \cup (H,B) = \alpha(G,B) \cup \alpha(H,B) = (G,B) \cup (H,B)$$

olduğundan $(G,B) \cup (H,B) \in \mathbf{K}$ elde edilir..

iii. $\{(F,B_i): i \in I, (F,B_i) \in \mathbf{K}\}$ ailesi verilsin. Bu ailenin arakesitinin yine bu ailede olduğunu göstereceğiz.

$(G,B) \subset (H,B)$ ise $\alpha(G,B) \subset \alpha(H,B)$ dir. Gerçekten de $(G,B) \subset (H,B)$ ise $(H,B) = (G,B) \cup (H,B)$ olacağından K3 aksiyomundan $(H,B) = \alpha\left((G,B) \cup (H,B)\right) = \alpha(G,B) \cup \alpha(H,B)$ bulunur. Bu ise $\alpha(G,B) \subset \alpha(H,B)$ olmasını gerektirir. Her $j \in I$ için $\bigcap_{i\in I}(F,B_i) \subset (F,B_j)$ olduğunu kabul edelim.

$$\alpha \bigcap_{i\in I}(F,B_i) \subset \bigcap_{i\in I}\left(F,B_J\right)$$

kapsamasını gerektirir. Bu kapsamanın ters yönlüsü K2 aksiyomundan bilinmektedir. O halde

$$\alpha \bigcap_{i\in I}(F,B_i) = \bigcap_{i\in I}(F,B_i)$$

Bu ise $\bigcap_{i\in I}(F,B_i) \in \mathbf{K}$ olmasını gerektirir. **K** ailesi (O,B) üzerindeki yakın esnek kapalı kümelerdir. Bu yapının açık kümeleri

$$\tau = \{(F,B)^c: (F,B) \in k\}$$

ailesidir. Son olarak $(F,B) \subset (O,B)$ yakın esnek kümesinin τ yakın esnek topolojisine göre $cl_n(F,B)$ olarak gösterdiğimiz kapanışın $\alpha(F,B)$ kuratowski metodu ile aynı olduğunu göstereceğiz. Her $(F,B) \subset (O,B)$ için $\alpha(F,B) \in \mathbf{K}$ olur. K2 aksiyomundan ve kapanışın özelliklerinden $\alpha(F,B) \in \mathbf{K}(F,B)$ elde edilir.($k(F,B)$ ailesi (F,B) nin yakın esnek kapalı üst kümelerin oluşturduğu ailedir) Bu ise $cl_n(F,B) \subset \alpha(F,B)$ olmasının gerektirir. Tersine $(G,B) \in \mathbf{K}(F,B)$ için $(G,B) = (G,B) \cup (F,B)$ ve $(G,B) \in \mathbf{K}$ olup

$$(G,B) = \alpha(G,B) = \alpha(G,B) \cup \alpha(F,B) = \alpha(F,B) \cup (G,B)$$

yazılabilir. Bu ise

$$\alpha((F,B) \subset \cap \left(k(F,B)\right) = cl_n(F,B)$$

olmasını gerektirir. Buradan

$$cl_n(F,B) = \alpha(F,B)$$

eşitliği bulunur.

5. Ayırma aksiyomları

Bu bölümde yakın esnek topolojik uzayların ayırma aksiyomlarını verdik. Ayırma aksiyomları ile ilgili bazı örnekler verildi. Bu yapıyla ilgili olarak her yakın esnek kompakt T_2-uzayı yakın esnek regüler uzay olduğunu gösterdik.

5.1 Tanım
(O,B,τ) Yakın esnek topolojik uzay olsun. $x,y \in O$ ve $x \neq y$ olsun. Eğer
$$x \in (F,B), y \notin (G,B)$$
veya
$$x \notin (G,B), y \in (F,B)$$
olacak şekilde (F,B) ve (G,B) yakın esnek açık kümeleri varsa (O,B,τ) uzayına yakın esnek T_0-uzayı denir [10].

5.2 Tanım
(O,B,τ) Yakın esnek topolojik uzay olsun. $x,y \in O$ ve $x \neq y$ olsun. Eğer
$$x \in (F,B), y \notin (G,B)$$
ve
$$x \notin (G,B), y \in (F,B)$$
olacak şekilde (F,B) ve (G,B) yakın esnek açık kümeleri varsa (O,B,τ) uzayına yakın esnek T_1-uzayı denir [10].

5.3 Tanım
(O,B,τ) yakın esnek topolojik uzay olsun. $x,y \in O$ ve $x \neq y$ olsun. (F,B) ve (G,B) yakın esnek açık kümeleri için;
$x \in (F,B), y \in (G,B)$ ve $(F,B) \cap (G,B) = \emptyset$ olduğunda (O,B,τ) uzayına yakın esnek T_2-uzayı denir [10].

5.4 Tanım
(O,B,τ) Yakın esnek topolojik uzayı ve (G,B) yakın esnek kapalı kümesi verilsin. $x \in O$ ve $x \notin (G,B)$ olacak şekilde eğer (F_1,B) ve (F_2,B) yakın esnek açık kümeleri için;
$x \in (F_1,B)$, $(G,B) \subset (F_2,B)$ ve $(F_1,B) \cap (F_2,B) = \emptyset$ oluyorsa (O,B,τ) uzayına yakın esnek regüler uzay denir [10].

5.5 Tanım
(O,B,τ) Yakın esnek topolojik uzayı, hem yakın esnek regüler hem de yakın esnek T_1-uzayına yakın esnek T_3-uzayı denir [10].

5.6 Tanım
(O,B,τ) Yakın esnek topolojik uzay ve $(G,B),(F,B)$ yakın esnek kapalı kümeler olsun öyle ki $(F,B) \cap (G,B) = \emptyset$ (F_1,B) ve (F_2,B) yakın esnek açık kümeleri için $(F,B) \subset (F_1,B)$ ve $(G,B) \subset (F_2,B)$ ve $(F_1,B) \cap (F_2,B) = \emptyset$ olduğunda (O,B,τ) yakın esnek normal uzay denir [10].

5.7 Tanım
(O,B,τ) Yakın esnek topolojik uzayı, hem yakın esnek normal hem de yakın esnek T_1-uzayına yakın esnek T_4-uzayı denir [10].

Yakın esnek T_3-uzayı uzay ve yakın esnek T_4-uzayı örnekleri [10] çalışmasında verilmiştir. Yakın esnek kompakt ve yakın esnek T_2-uzayının hem yakın esnek T_3-uzayı hemde yakın esnek T_4-uzayı olduğunu göstereceğiz.

5.8 Önerme

Her yakın esnek kompakt T_2-uzayı yakın esnek regüler uzaydır.

İspat.

(O, B, τ) Yakın esnek kompakt T_2-uzayı olsun. $x \in O$ herhangi bir nokta ve (G, B) yakın esnek kapalı kümesini alalım. $x \in (G, B)^c$ olup $y \in (G, B)$ dir. (O, B, τ) yakın esnek kompakt T_2-uzayı olduğundan $x \neq y \in O$ olur öyleki x'i içeren yakın esnek açık küme (F, B) ve y elemanını içeren yakın esnek açık küme (H, B) olsun.
$(F, B) \cap (H, B) = \emptyset$ dir.

$$\{(H, B), y \in (G, B)\}$$

(G, B) nin yakın esnek açık örtüsü olsun. Ancak (G, B) ikilisinin yakın esnek kapalı olan, yakın esnek kompakt alt kümesi yakın esnek kompakttır.

$$\bigcup (H, B_i) \supseteq (G, B)$$

olur.

$$\{(F_1, B), (F_2, B), \ldots, (F_n, B)\}$$

x elemanını içeren yakın esnek açık kümelerin örtüsü olsun. $\bigcap (F_i\,, B)$ x elemanını içeren yakın esnek açık kümedir.

$$(F_i, B) \cap (H_i, B) = \emptyset$$

$F = \bigcap (F_i\,, B)$ ve $H = \bigcap (H_i\,, B)$ olsun. $F \cap H = \emptyset$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $F \cap H \neq \emptyset$ olsun. $F \cap H \neq \emptyset$ ise $p \in F \cap H$ olacak şekilde bir p elemanı vardır. Dolayısıyla $p \in F$ ve $p \in H$ olur. Bu ise $p \in \bigcap (F_i\,, B)$ ve $p \in \bigcap (H_i\,, B)$ olmasını gerektirir. $p \in (F_k, B)$ ve $p \in (H_k, B)$ $(i \leq k \leq n)$ için $p \in (F_k, B) \cap (H_k, B)$ olduğundan

$$(F_k, B) \cap (H_k, B) \neq \emptyset$$

olur. Ancak

$$(F_i, B) \cap (H_i, B) = \emptyset$$

olduğunda $F \cap H = \emptyset$ elde edilir. Böylece her $x \in O$ ve her yakın esnek kapalı (G, B) için x elemanını içermez. En az bir x elemanını içeren yakın esnek açık küme (F, B) ve $(H, B) \supseteq (G, B)$ olur.

$$(H, B) \cap (F, B) = \emptyset$$

olduğundan (O, B, τ) uzayı yakın esnek regülerdir.

5.9 Önerme

Her yakın esnek kompakt haussdorf uzayı yakın esnek normal uzaydır.

İspat.

(O, B, τ) Yakın esnek kompakt haussdorf uzayı olsun. Her $(F, B), (H, B) \in O$ ve $(F, B) \cap (H, B) = \emptyset$ için $(F, B) \subset O - (H, B)$ olur. O halde her $x \in (F, B)$ için $x \notin (H, B)$ olur. yakın esnek kompakt her haussdorf uzayı yakın esnek regüler olduğundan $x \in (F, B)$, $x \notin (H, B)$ olacak şekilde en az bir $(F_i, B)(H_i, B) \in O$ ve $x \in (F_i, B)$ olur. Dolayısıyla

$$(F_i, B) \cap (H_i, B) = \emptyset$$

olur. Bu şekilde elde edilen (F_i, B) ailesi (F, B) ikilisinin yakın esnek açık örtüsü olur. (F, B), O üzerinden indirgenen yapısıyla yakın esnek kompakt uzay olduğundan $F = \bigcup (F_i, B)$ ve $H = \bigcap (H, B)$ olur. $i = 1,2, \dots, n$ için $(F_i, B) \cap (H_i, B) = \emptyset$ olduğundan

$$F \cap H = \emptyset$$

elde edilir. Dolayısıyla her yakın esnek kompakt haussdorf uzayı yakın esnek normal uzay olur.

5.10 Sonuç

Yakın esnek kompakt ve yakın esnek T_2-uzayının hem yakın esnek T_3-uzayı hemde yakın esnek T_4-uzayı olur.

Kaynaklar

[1] Pawlak, Z., Rough sets, **International Journal of Computer & Information Sciences**, 11(5), 341–356, (1982).

[2] Peters, J.F., Near sets, General theory about nearness of objects, **Applied Mathematical Sciences**, 1, 2609-2029, (2007).

[3] Molodtsov, D., Soft set theory-first results, **Computers & Mathematics with Applications**, 37(4-5), 19–31, (1999).

[4] Tasbozan, H., Icen, I., Bagirmaz, N. ve Ozcan, A.F., Soft sets and soft topology on nearness approximation spaces, **Filomat**, 31, 4117-4125, (2017).

[5] Çağman, N., Karataş, S. ve Enginoglu, S., Soft topology, **Computers & Mathematics with Applications**, 62, 351-358, (2011).

[6] Molodtsov, D., Soft set theory—first results, **Computers & Mathematics with Applications**, 37, 19-31, (1999).

[7] Tasbozan,H. ve Bagirmaz, N., Near soft continuous and near soft JP-continuous functions, **Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications**, 9(2), 166-171, (2021).

[8] Ozkan, A., On near soft sets, **Turkish Journal of Mathematics**, 43(2), 1005 1017, (2019).

[9] Tasbozan,H., Near Soft Bağlantılılık, **Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergis**i , 20, 815-818, (2020).

[10] Tasbozan,H. ve Bagirmaz, N., Soft separation axioms on nearness approximation Spaces, **Sohag Journal of Mathematics**, 8(2), 57-60, (2021).

[11] Özgür, N. Y., ve Nihal, T. A. Ş. A note on" application of fuzzy soft sets to investment decision making problem. **Journal of New Theory**, (7), 1-10, (2015).

[12] Kalaichelvi, A., & Malini, P. H. Application of fuzzy soft sets to investment decision making problem, **International Journal of Mathematical Sciences and Applications**, *1*(3), 1583-1586, (2011).

[13] Karaca, F., & Taş, N. Decision Making Problem for Life and Non Life Insurances, **Journal of Balıkesir University Institute of Science and Technology**, *20*(1), 572-588, (2022).

[14] Irkin, R., Ozgur, N. Y., & Tas, N., Optimization of lactic acid bacteria viability using fuzzy soft set modelling, **An International Journal of Optimization and Control: Theories & Applications** *(IJOCTA)*, *8*(2), 266-275, (2018).