Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 2022; 19(1), s.36-64.

Van Yüzüncü Yıl University Journal of Education Faculty, 2022; 19(1), p.36-64. DOI: 10.33711/yyuefd.1063106

Öğrencilerin Silindirin Hacmi Konusunda Geliştirdikleri Matematiksel Fikirler: Sınıf İçi Argümantasyon Modeli*

Şule ŞAHİN DOĞRUER[1], Didem AKYÜZ[2]

Öz: Bu çalışmanın amacı, silindirin hacmi konusu kapsamında sekizinci sınıf öğrencilerinin geliştirdikleri matematiksel fikirleri saptamak ve bunun için uygulanan içeriğin etkililiğini sekizinci sınıf matematik dersinde test etmektir. Bu bağlamda, bir varsayıma dayalı öğrenme yörüngesinin rehberliği ile bir öğretim dizisi kullanılmıştır. Konu olarak silindirin hacmi belirlenmiştir. Sınıf içi argümantasyon, dinamik geometri yazılımı ve günlük yaşam örnekleri sınıf etkinliklerini desteklemiştir. Verilerin analizi için Krummheuer'in (2015) argümantasyon modeli kullanılmıştır. Analiz sonucunda dört matematiksel fikir elde edilmiştir; (a) hacim üçüncü boyut ile ilgilidir, (b) hacim bir cismin içini doldurmaktır, (c) hacim hesabı yükseklik, genişlik ve uzunluk kavramlarını içerir, (d) hacim taban alanı ile yüksekliğin çarpımıdır.

Anahtar kelimeler: Matematiksel fikirler, Argümantasyon, Silindir, Tasarım tabanlı çalışma, Varsayıma dayalı öğrenme yörüngesi

Mathematical Ideas Developed by Students on Volume of Cylinder: A Classroom Argumentation Model

Abstract: The aim of this study was to determine the mathematical ideas developed by eighth-grade students in the context of the volume of cylinders and to test the effectiveness of the applied content in an eighth-grade mathematics course. An instructional sequence guided by a hypothetical learning trajectory was used. The volume of cylinders was the subject. Classroom argumentations, dynamic geometry software, and daily-life examples supported instructional activities. The argumentation model of Krummheuer was used to analyze the classroom argumentations. The analysis of the data collected from the study revealed four mathematical ideas: (a) volume is related to the third dimension; (b) volume fills the solid; (c) volume calculation includes the concepts of height, width, and length; and (d) volume equals the multiplication of base area and height.

Keywords: Mathematical ideas, Argumentation, Cylinder, Design-Based study, Hypothetical learning trajectory

Geliş Tarihi: 26.01.2022 Kabul Tarihi: 23.03.2022 Makale Türü: Araştırma Makalesi

---

*Bu çalışma birinci yazarın "Developing Eighth Grade Students' Mathematical Practices in Solids Through Argumentation: A Design-Based Study" isimli doktora tezinin bir parçasıdır.

[1] Dr., Yenimahalle Bilim ve Sanat Merkezi, sule_sahinn@hotmail.com, 0000-0002-6663-5370

[2] Doç. Dr., Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Matematik Eğitimi Ana bilim Dalı, dakyuz@metu.edu.tr, 0000-0003-3892-8077

Atıf için/To cite: Şahin Doğruer, Ş. & Akyüz, D. (2022). Öğrencilerin silindirin hacmi konusunda geliştirdikleri matematiksel fikirler: Sınıf içi argümantasyon modeli. *Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *19*(1), 36-64. https://doi.org/10.33711/yyuefd.1063106

Giriş

Okul matematiğinde geometri öğretimi önemli bir yer tutmaktadır. Geometrik düşünme becerisinin en önemli parçası iki veya üç boyutlu uzayda geometrik şekiller ve bunları çeşitli yönlerden incelemeyip yorumlayabilme olarak belirtilir (National Teachers of Council of Mathematics [NCTM], 2000). Geometri derslerinde, öğrenciler geometrik şekiller ve yapılar arasındaki ilişkileri değerlendirdikleri için (Keşan & Çalışkan, 2013), etkili bir şekilde öğrenme ve öğretimin sağlanması önemlidir. Tersi durumda, öğrenciler anlamaya çalışmak yerine geometrik kavramları ve formülleri ezberlemeyi tercih edebilirler (Fuys vd., 1988). Fiziksel dünyamız sadece iki boyutlu Öklid geometrisi ile açıklanamaz (Baki vd., 2011). Çünkü kullandığımız, gördüğümüz, ürettiğimiz, yani etkileşimde olduğumuz her şey üç boyutlu geometrik bir şekle sahiptir (Güven & Kosa, 2008). Baki vd. (2011), öğrencilerin uygun problem çözme stratejilerini kullanarak fiziksel dünyayı anlayarak ve anlatarak geometriyi öğrenmeleri gerektiğini belirtir. Aynı şekilde, Pittalis ve Constantinou (2010), geometrik düşünme becerisi için "bireylerin uzamsal imgeler oluşturmaları ve çeşitli pratik ve teorik problemleri çözmede manipüle etmelerini sağlayan bir zihinsel aktivite biçimi" olduğunu söyler (s. 191). Bu nedenle, birçok uluslararası önemli belge de (NCTM, 2000), öğrencilerin günlük yaşamda ve gelecekteki kariyerlerinde kritik olması sebebiyle, uzamsal becerilerini geliştirmek için görselleştirme yoluyla üç boyutlu şekillerle çalışma fırsatına sahip olmaları gerektiğini vurgular. Ancak, katı cisimler, çokgenler, üçgenler, geometrik oran, geometrik dönüşüm konuları öğrenciler tarafından anlaşılması zor olarak tanımlanır (Adolphus, 2011).

Bu bağlamda, araştırmalar, bu tür uzamsal düşünme yeteneklerinin uygun öğrenme deneyimleri yoluyla öğrenilebileceğini göstermiştir (Alqahtania & Powell, 2017; Ganesh vd., 2009; Marchis, 2012; Dogruer & Akyuz, 2020). Örneğin, Yackel ve Cobb (1996) matematiğin doğasının, hem bireysel çalışmayı, hem de argümantasyon sürecine katılarak, fikirlerini daha geniş bir topluluk içinde açıklayarak ve kanıtlayarak işbirlikçi çalışmayı içerdiğini iddia ederler. Yine alana ait çalışmalarda (Bauersfeld vd., 1988; Giannakoulias vd., 2010; Mueller, 2009), matematik sınıflarında argümantasyon ortamının oluşturulmasının önemi ve sınıf normlarının açıklama, gerekçe gösterme ve sınıf içi argümantasyon süreçleriyle karakterize edildiği belirtilir. Dolayısıyla, argümantasyona dayalı sınıf ortamını geometri derslerine de uyarlamak uygundur. Bu sayede öğrencilerin geometrik yapı ve teoremler arasındaki ilişkileri fikir alışverişinde bulunarak etkin bir şekilde anlamaları mümkün olabilir. Ek olarak, Driver vd. (2000) bilimsel argümantasyon sürecini tartışırken, argümantasyon temelli matematiksel içeriğin derin kavramsal öğrenmeyi desteklediğini savunmuştur. Dahası, çeşitli araştırmalar argümantasyon ortamının başkalarının fikirlerini doğrulayarak ve/veya eleştirerek matematiğin ve geometrinin kavramsal anlaşılırlığını artırdığını desteklemektedir (Abi-El-Mona & Abd-El-Khalick, 2011; Jonassen & Kim, 2010; Osborne vd., 2004; Zembaul-Saul, 2005). Bu bağlamda, öğrencilerin kavramsal öğrenmelerini desteklemek için geometri derslerine argümantasyon ortamını dahil etmek yararlı olabilir.

Araştırmalar yıllardır matematik öğretimi ve öğreniminin sosyolojik yönüne, daha spesifik olarak ise ortak matematiksel argümanlar oluşturarak iş birlikçi öğrenmeyi sağlamaya odaklanmıştır (Ball & Bass, 2000; Cobb vd., 2011; Stephan & Rasmussen, 2002; Solar vd., 2020). Bu çalışmalar, genel olarak matematik öğretimi ve öğreniminin sosyal yönüne odaklanmayı tercih ederler, çünkü matematiğin, matematik yaparak topluluk içinde daha iyi öğrenileceği savunurlar (Cobb vd., 1992; Yackel & Cobb, 1996; Sriraman & Umland, 2020; Johnson, 2021). Literatürdeki çalışmalar, sınıf içindeki matematiksel argümanların farklı yönlerine ve tanımlarına odaklanmıştır. Örneğin, Bowers vd. (1999), bu argümanları "fikir birliğine varılmış ve dolayısıyla gerekçelendirmenin ötesinde matematiksel olarak harekete geçme ve akıl yürütme biçimlerindeki değişimlere odaklanma" olarak tanımlamıştır (s.28).

Sınıf içerisindeki *matematiksel fikirler* ise belirli matematiksel konular üzerinde yapılan fikir alışverişi sırasında ortaya çıkar ve bu konuların paylaşılması, tartışılması ve akıl yürütülmesinin bir yoludur (Cobb vd., 2011). Benzer bir tanım, Bowers vd. (1999) tarafından "öğretmen ve öğrencilerin problemlerin ve çözümlerin üzerinde akıl yürüttükleri yollar" olarak tanımlanır ve bu uygulamalar duruma ve konuya göre simgeleştirme, tartışma ve doğrulama araçlarını içerir (s.28). Bu tanımların başlangıç noktaları, öğrenme sürecinin bireysel ve sosyal yönleridir. Tanımlarda da belirtildiği gibi, matematiksel fikirler, matematiksel olarak akıl yürütme, argümantasyon ve argümantasyonun ortak yollarını içerir. Cobb vd. (1992), matematiksel fikirleri, matematiksel açıklamalar, gerekçeler, sembolleştirmeler olarak tanımlar. Buna göre, matematiksel fikirlerin ortaya çıkmasının sınıf üyeleri arasındaki sosyal etkileşim ile güçlü bir şekilde ilişkili olduğu sonucuna varılabilir. Sosyal açıdan aktif bir sınıf ortamı yaratıldığında, öğrenciler matematik öğretimi sürecine gönüllü olarak katılmaya ve öğrenmeye motive olabilir (Cobb & Yackel, 1996). Dolayısıyla, matematiksel fikirleri tanımlamak için, öğrencilerin akıl yürütme yolları ve yansımaları başlangıç noktası olarak alınır. Öğrencilerin fikirleri ve akıl yürütmeleri, sınıf diyalogları ve belirli bir içerikteki aktiviteler sırasında ortaya çıkar (Stephan vd., 2003). Böylece, öğrencilerin bireysel çalışmalarını ve fikirlerini de içeren sosyal öğrenme, matematiksel fikirlerin odak noktasıdır. Buna göre, sınıf içi argümantasyon ve öğrenme araçlarının kullanımı da dahil olmak üzere öğrenme ortamı hakkındaki veriler, matematiksel fikirlerin ortaya çıkmasını sağlayan sınıfın sosyal yönünü oluşturur (Stephan & Rasmussen, 2002).

Geometri dersleri için varsayıma dayalı bir öğrenme yörüngesi ile öğretim dizisinin hazırlanarak öğrencilere sunulması, onların içerik üzerinde etkili bir şekilde düşünmelerine ve öğrenmelerine yardımcı olabilir. Dahası, bu etkinlikler sınıf içi argümantasyon ile desteklenirse öğrenciler fikirlerini başkalarıyla paylaşma şansına sahip olacaklardır. Yine, belirli bir içerik hakkındaki yorumlar, öğrenciler arasındaki fikir alışverişi ve matematiksel fikirlerin ortaya çıkmasını sağlar (Cobb vd., 1997a). Bu bağlamda, mevcut çalışmada, argümantasyon yoluyla ortaya çıkan matematiksel fikirler silindirin özellikleri ve hacmi konusu kapsamında değerlendirilmiştir.

MEB (2018), matematik ve geometri derslerinde teknolojinin kullanımının öğrencilerin üç boyutlu düşünme ve uzamsal yeteneklerini geliştirdiğini vurgulamıştır. Geometri öğretimi, üç boyutlu katı cisimlerin öğrenimine dikkat çekmektedir. Özellikle, katı cisimleri görselleştirme becerileri ve somut temsil biçimleri sürekli vurgulanmaktadır. Ben-Chaim vd. (1988), ortaokul ve lise öğrencilerine uygun stratejiler kullanarak uzamsal düşüncenin başarılı bir şekilde öğretilip geliştirilebileceğini belirtmektedir. Bu bağlamda eğitimciler, teknolojinin uygun bir strateji olarak kullanılmasının, matematiğin ve özellikle geometri öğrenim ve öğretimini etkili bir şekilde destekleyebildiğine inanmaktadır (McClintock vd., 2002).

Geometri derslerinde kullanılabilecek, kelime işlemci ve elektronik tablolar gibi birçok çeşitli teknolojik araçlar vardır. Ancak, dinamik geometri yazılımı (DGY) daha öğrenci merkezli öğrenme ortamları oluşturmak için daha etkili bir araçtır (Hannafin vd., 2008). NCTM (2000), geometrinin etkili bir şekilde öğrenilmesini sağlamak için somut nesneler, çizimler ve DGY kullanmasının önemli olduğunu belirtmektedir. DGY'yi eğitim alanında kullanarak ve dinamik bilgisayar ekranına aktararak, öğrenciler için kâğıt ve kalem kullanmadan yapılar arasındaki ilişkileri değerlendirmek, hipotez geliştirmek, teoremleri test etmek mümkün hale gelmiştir. Bu uygulamalar öğrencilerin zihinde canlandırma faaliyetlerini arttırır. Bu artış sezgi yolunu açar ve bu yollar kullanıldığında, öğrenci analiz edebilir, hipotez geliştirip genelleme yapabilir. Geometri öğretiminde, DGY kullanılarak, öğrenciler geometrik çizimler oluşturabilir veya öğretmen tarafından hazırlanan dinamik geometrik şekiller üzerinde etkileşimli araştırmalar yapabilir (MEB, 2018); ve bu sayede DGY, öğrencilerin geometri öğrenme faaliyetlerine aracılık ederek onları bu bağlamda destekleyebilir (Alqahtania & Powell, 2017).

Bu çalışmanın amacı argümantasyon destekli bir ortamda DGY ile silindir konusunu öğretirken öğrencilerin geliştirdikleri fikirleri ortaya çıkarmak ve bu fikirlerin ne şekilde oluştuğunu araştırmaktır. Birçok çalışma, DGY destekli bir ortamda TTA modeli kullanmış olsa da, bu çalışmların çoğu argümantasyonu ortamı destekleme ve analiz etmede kullanmamıştır. Bu çalışmada, öğrencilerin silindirin hacmi bağlamında sorgulama, ilişkilendirme ve analiz etme becerilerini argümantasyon ortamının ne şekilde desteklediği araştırılmıştır. Çalışmanın araştırma sorusu ise: "Argümantasyon destekli sınıf ortamında sekizinci sınıf öğrencilerinin DGY destekli işlenen silindirin hacmi konusunda geliştirdikleri matematiksel fikirler nelerdir?" şeklindedir.

Yöntem

Mevcut araştırmada, sınıf içi argümantasyon ve DGY'nin desteğiyle silindir konusu kapsamında sekizinci sınıfların öğrenme ortamının derin bir şekilde araştırılması için tasarım tabanlı araştırma (TTA) yaklaşımı kullanılmıştır. Çalışma yaklaşık 5 hafta süren ve katı cisimleri kapsayan öğretim dizisinin bir parçasıdır. Bu çalışmada odaklanılan silindirin hacmi konusu bu öğretim dizisinin yaklaşık iki haftasını oluşturmaktadır.

Araştırmanın Deseni

Eğitim araştırmalarında için yeni bir yöntem olarak TTA'nın ortaya çıkışı, mevcut yüzyılın başlarına denk gelmektedir (Anderson & Shattuck, 2012) ve bu süre boyunca artan bir popülerlik kazanmıştır (Barab & Squire, 2004). Birçok saygın dergi, yazar ve akademisyenler, eğitim alanlarındaki kaliteyi artırmak için TTA'nın potansiyelini keşfetmiştir (Anderson & Shattuck, 2012). Böylelikle bu yönteme eğitim bilimleri alanında ve özellikle matematik eğitiminde giderek artan bir ilgi gösterilmeye başlanmıştır (Cobb, 2003). Tasarım Tabanlı Çalışma Topluluğu (2003), TTA'nın bazı temel özelliklerini şöyle ifade etmiştir; genellikle belirlenen bir süre boyunca tek bir ortamda yürütülür; tasarım, uygulama, analiz ve yeniden tasarım döngülerini içerir; tüm çalışma sürecine ilişkin belgelerin ve sonuçların bağlanması; araştırmacı ve katılımcı iş birliği ve pratikte kullanılabilecek bilgi birikimidir.

TTA, eğitim pratiğinde karmaşık problemler için araştırma temelli çözümlerin geliştirilmesi ile ilgilidir, çünkü öğrenme ve öğretme süreçleri teoriler geliştirmeyi veya doğrulamayı amaçlamaktadır. TTA'nın amacı ne olursa olsun, araştırma süreci her zaman sistematik eğitim tasarım süreçlerini içerir (Plomp, 2013). Yazarlar, TTA'ların ayrıntılarını resmetmek için çeşitli gösterimler kullanabilirler, ancak genellikle benzer aşamalara sahip olduklarını kabul ederler (Plomp, 2013). Örneğin Gravemeijer ve Cobb (2013), TTA'yı hazırlama, çalışmayı yürütme ve daha sonra geriye dönük analiz olmak üzere üç aşamada değerlenirmiştir. Ayrıca, çeşitli araştırmacılar raporlarında benzer gruplandırmayı kullanmışlardır (Cobb vd., 1997b). Bu çalışmada Gravemeijer ve Cobb (2013)'un önerdiği üç aşama temelinde bir TTA deseni (Şekil-1) uygulanmıştır.

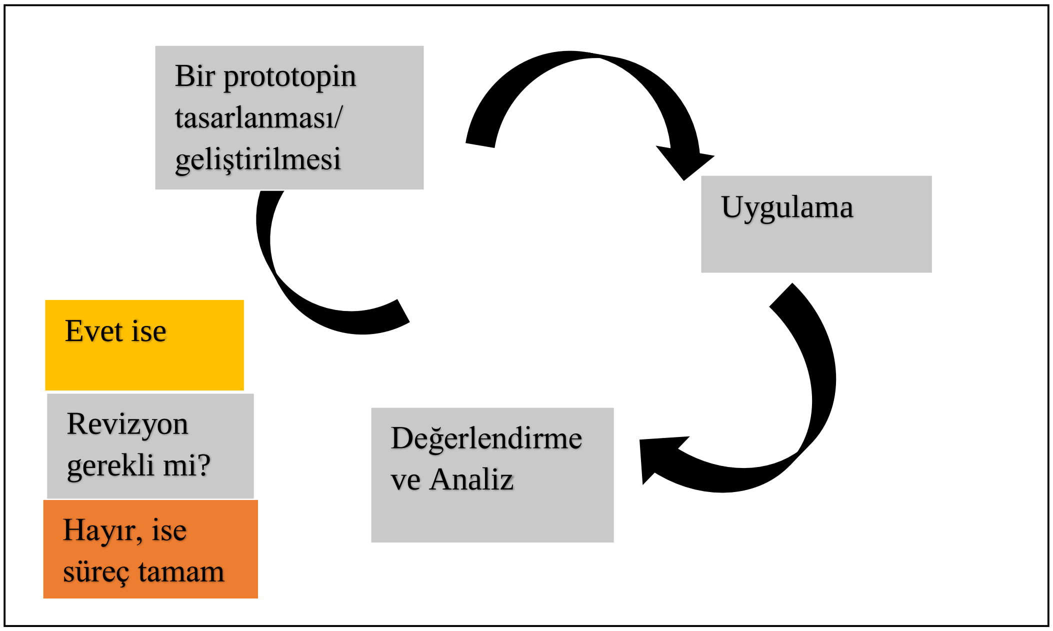
Bu bağlamda, TTA'nın ilk aşamasına göre, hazırlanmış bir öğretim dizisinin sınıftaki uygulamaları sırasında değerlendirilip gözden geçirilebileceği vurgulanmaktadır. Devam eden süreçte öğrenme hedefleri netleştirilmeli, öğretim başlangıç ve bitiş noktaları belirlenmelidir. Öğrenme hedeflerinin belirlenmesi, değerlendirme veya tarih yoluyla olabilir. Bir okul müfredatının verildiği şekilde kullanılmaması önemlidir. Program iyice incelenmeli, öğrenciler için en uygun olacak şekilde yeniden düzenlenmeli ve tanımlanmalıdır. İçeriğin ana fikri burada da önemli bir noktadır (Gravemeijer & Cobb, 2013). Bu çalışma, silindirin hacmi bağlamında tasarlanmıştır. Sınıfın öğrenme geçmişine bakıldığında, sekizinci sınıf öğrencilerinin ve üç boyutlu şekilleri içerik ile ilişkilendirebilecekleri iki boyutlu şekiller konusu hakkında ön öğrenmeleri vardır. Ayrıca, bir prizmanın, küpün ne olduğu ve özellikleri hakkında bilgi sahibidirler. Bu mevcut çalışma için önemli bir konudur, çünkü katılımcı öğrencilerden konu hakkında fikir üretip sınıf içi tartışmalara katılabilmeleri ve matematiksel fikirler üretebilmeleri için, önceden sahip oldukları bilgileri kullanabilmeleri beklenmiştir.

Başlangıç noktasının belirlenmesi için Gravemeijer ve Cobb (2013), bütün sınıfın yazılı testleri, görüşmeleri veya performans değerlendirmeleri gibi değerlendirmeler yapmayı önermektedir. Mevcut çalışma için, çalışmaya başlamadan önce katılımcı sınıfa ön test uygulanmıştır. Yine, mevcut çalışmanın hazırlanma süreci için, sınıf kültürü, interaktif tahtalar, DGY, somut öğrenme materyalleri ve çalışma sayfaları gibi öğretim sürecinde kullanılabilecek mevcut öğretim araçları öğretim dizisine eklenerek, öğrenci ihtiyaçlarına göre ulusal müfredat ile tutarlı olarak tasarlanmıştır. Ayrıca, planlar, eğer gerekliyse, içerikte herhangi bir değişiklik veya gelişme yapmanın mümkün olabileceği şekilde esnek bırakılmıştır. Çalışma formüle edilirken sınıf kültürü ve öğretmenin yönlendirici rolü dikkate alınmıştır. "Sınıf normları nelerdir, ne tür tartışmalar olabilir, ne tür aktiviteler öğrencileri sınıf tartışmalarına katılmaya motive edebilir, konuyu dikkatleri üzerine çekerek, sınıf tartışmalarını nasıl başlatabilir ve uygulayabilir" mevcut çalışmanın tasarımını formüle etmek için oluşturulan temel sorulardır. Ayrıca, çalışmanın tasarımını formüle etmek için bir yol olarak varsayıma dayalı öğrenme yörüngesi oluşturulmuştur. Bu öğrenme yörüngesi, toplamda iki hafta olarak planlanmıştır.

TTA modelinin ikinci kısmında oluşturulan öğretim dizisinin ve varsayıma dayalı öğrenme yörüngesinin uygulanma süreci gerçekleşir (Gravemeijer & Cobb, 2013). Bu çalışma için, veri toplama ve üretim süreci, varsayıma dayalı öğrenme yörüngesinin aşamalarının uygulanmasını içermiştir. Öğretim dizisi ve öğrenme aktiviteleri hazırlanırken yapılmış araştırmalar, öğrencilerin düşünme ve öğrenme düzeyleri dikkate alınmıştır. İlk hazırlanan aktiviteler, katılımcı olmayan sekizinci sınıftan on rastgele seçilmiş öğrenciye uygulanmıştır. On öğrenciden toplanan bu veriler doğrultusunda, araştırma ekibi çalışma sayfaları ve öğretim dizileri üzerinde düzeltmeler, eklemeler yapmış ve ana çalışma bununla başlamıştır. Revize etme, öğrenme yörüngesi ve içerik ana çalışmada uygulanmıştır. Ancak, bu süreçte, öğretim dizisinde, varsayıma dayalı öğrenme yörüngesinde ve sonraki derslerin etkinliklerinde öğrencilerin ihtiyaçları doğrultusunda yapılan bazı değişiklikler olmuştur. Öğretim dizisi boyunca öğrenciler bireysel olarak ve bazen çiftler halinde çalışmaya devam etmişlerdir. Bu çalışmalar sırasında, katılımcı öğretmen ve araştırmacı, çalışmaların ilerleyişini, öğrencilerin nasıl farklı düşündüklerini ve sınıfta tartışabilecekleri konuları belirlemek için öğrencileri veya çalışma gruplarını kontrol etmişlerdir. Öğrencilerin bireysel veya ikili grup çalışması tamamlandıktan sonra sınıf tartışmaları başlamış ve öğrencilerin farklı yorumları, gösterileri, soruları nedenleriyle birlikte değerlendirilmiştir. Bu süreç, tüm çalışma boyunca takip edilmiştir.

Şekil 1

TTA Şeması (Plomp, 2013)



TTA'nın son aşamasında geçmişe yönelik değerlendirme ve analiz yapılır. Bu bölüm, öğrencilerin ihtiyaçlarına göre yapılan öğretim dizisinin uygulanması sırasında ortaya çıkan revizyonları açıklamaktadır. TTA'nın amacı, bilgi edinme ve öğrenme ortamı ile öğrencilerin öğrenmesi arasındaki ilişkiyi anlamaya yönelik olduğundan, çeşitli kaynaklardan çeşitli veri setlerini toplamak ve bu çalışma sırasında öğrencilerin düşünme sürecini değerlendirmek bir zorunluluktur (Gravemeijer & Cobb, 2013). Ana amaç, büyük veri setini sistematik ve doğru bir şekilde analiz etmektir. Veri analizi sürecinin güvenilirliğini sağlamak için, çalışmanın tüm adımlarının belgelenmesi gerekir. Çalışmanın başlangıcından itibaren, çalışma boyunca ve geriye dönük analiz olarak çalışmanın sonunda değerlendirmeler yapılmalıdır. (Gravemeijer & van Eerde, 2009). Buna göre, çalışmanın başlangıcında, çalışma boyunca ve bitişte geriye dönük olarak araştırmacı ve katılımcı öğretmen tarafından değerlendirmeler yapılarak öğrenci ihtiyaçları doğrultusunda gerekli değişiklikler yapılmıştır.

Çalışma Grubu

Nitel bir araştırma çalışmasının özellikleriyle ilgili olarak, katılımcı sayısı sınırlı kalmıştır. Çalışma Ankara ili, Yenimahalle ilçesinde bir devlet okulunda gerçekleştirilmiştir. Mevcut çalışma, araştırmacının çalıştığı okulda gerçekleştirilmiştir. Bu okul ve katılımcı öğretmen gönüllülük ve kolay erişilebilirlik nedeniyle seçilmiştir (Fraenkel vd., 2012). Katılımcı sınıf, toplamda 16 kız ve 19 erkek, 35 öğrenciden oluşan ve katılımcı öğretmen tarafından, sınıf içi iletişim becerileri ve sınıf etkinliklerine ve tartışmalarına katılmaya istekli olmalarına göre seçilmiştir. Araştırma ekibi ise belirtilen okuldan seçilen sınıfın matematik derslerini yürüten öğretmen ile araştırmacıdan oluşmaktadır.

Van Yüzüncü Yıl University Journal of Education Faculty, 2022; 19(1), p.36-64. DOI: 10.33711/yyuefd.1063106

Veri Toplama Araçları

Toplanan veriler; (a) tüm derslerin videokasetleri, (b) öğrenim ortamından ayrıntılı alan notlarını ve öğrencilerin yazılı çalışmalarını içeren sınıf temelli veriler; (c) araştırma ekibi toplantılarından gelen tartışmaların ses kayıtlarından oluşmaktadır. Çalışma için gerekli izinler yasal olarak tamamlanmış, etik kurul onayı çalışma ile birlikte sunulmuş olup, öğrenci katılım formu, veli izin belgesi ve öğretmen gönüllü katılım formu katılımcılar tarafından doldurulmuştur. Makale içerisinde katılımcı isimleri kullanılmamış ve alfabetik kodlama tercih edilmiştir.

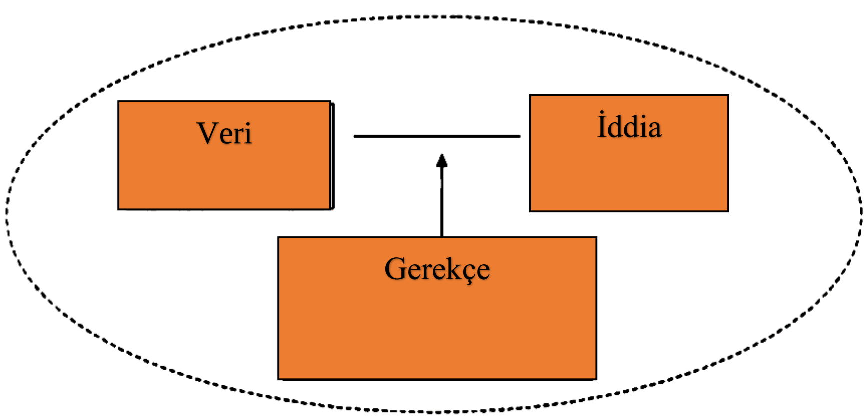
Veri toplama araçlarının en önemli kısmını oluşturan öğretim dizisinin hazırlanması sürecinde sekizinci sınıf öğrencilerine yönelik ulusal matematik müfredatı, derslerde kullandıkları ders kitapları ve üç boyutlu şekillerin öğretme-öğrenilmesine yönelik literatürde yer alan etkinlikler kullanılmıştır. Stephan'ın (2015) orijinal adı "Surface Area" olan çalışması ise bu öğretim dizisinin temelini oluşturmaktadır. Etkinlikler baştan taslak olarak hazırlansa da TTA ile uyumlu olarak öğretim dizisi ile eş zamanlı olarak süreç içerisinde şekillenmiştir. Etkinlik kâğıdının sıralanmasında öğrencilerin düşünme düzeyleri ve ulusal müfredattan elde edilen öğrenme hedefleri göz önünde bulundurulmuştur.

Verilerin Analizi

Argümantasyon analizi için, Toulmin'in modeline göre uyarlanmış Krummheuer'in (2015) argümantasyon modeli (Şekil-2) kullanılmıştır. Bu model, argümantasyonu veri, iddia ve gerekçe olmak üzere üç ana unsurdan oluşur ki, bu da Krummheuer'in modelini Toulmin'in modelinden ayırır. Çünkü Toulmin kendi modelini dört ana unsurda belirlemiştir. *İddia*, tartışılan konu ile ilgili öne sürülen sonuç fikirdir. *Veri*, öne sürülen iddiayı savunmak için sunulan bilgilerdir. *Gerekçe* ise sunulan veriyi açıklamak için kullanılır. Ayrıca veriler ile iddialar arasındaki ilişkiyi gösterir (Akyüz, 2016).

Şekil 2

Krummheuer (2015) Argümantasyon Modeli



Rasmussen ve Stephan (2008), sınıf tartışmasını bu yolla analiz etmek için, matematiksel fikirleri belgelemek için üç aşamalı bir yöntem geliştirmişlerdir. Bu yöntem, verilerin düzenlenmesi için yardımcı olup, sınıftaki etkinlik ve argümanların nasıl matematiksel fikirlere dönüştüğünü ortaya çıkarır. Her üç aşama kendi içerisinde farklı uygulama adımlarının içerir.

Rasmussen ve Stephan'nın (2008) yöntemine göre bu çalışmanın analizinde, ilk aşamada süreç, tüm sınıf kayıtlarının yazılı dökümlerinin oluşturulmasıyla başlanmıştır. Daha sonra araştırmacı tüm video kayıtlarını izlemiş ve öğretmen veya öğrencilerden herhangi biri tarafından ileri sürülen iddiaları not almıştır. Güvenilirliği sağlamak için katılımcı öğretmen kendi argümantasyon notlarını oluşturmuştur. Daha sonra araştırmacı ve katılımcı öğretmen, alınan notlar üzerinde tartışmak ve iki argümantasyon şemasını karşılaştırmak için bir araya gelmiş; veri, iddia ve gerekçeler üzerinde tartışarak, sonunda argümantasyon şeması üzerinde fikir birliğine varmışlardır.

İkinci aşama, argümantasyon notlarını, veri kümesi olarak görür ve ortaya çıkan matematiksel düşünme biçimlerinin, grupların fikirlerini paylaşma yolu olup olmadığına bakar. Bunu anlamak için Rasmussen ve Stephan (2008) iki kıstas tanımlamışlardır: (1) öğrencilerin açıklamalarında herhangi bir destek ya da gerekçeye ihtiyaç olmadığında (ki bu, sınıftaki hiç kimsenin bu argümanla ilgili bir itirazı olmadığı anlamına gelir, matematiksel fikir haline gelir); ve (2) önceden gerekçelendirilmiş bir iddia, sonraki tartışmalarda veri olarak kullanılmıştır (bu, matematiksel fikrin grubun düşünceleri ifade etme yollarından biri haline geldiği anlamına gelir).

Analizin üçüncü aşamasında artık tüm sınıf tarafından kabul edilmiş, matematiksel olarak anlamlı düşünceler *matematiksel fikirler* olarak tanımlanabilir (Rasmussen & Stephan, 2008).

Verilerin analizinin geçerliği ve güvenirliği için ek olarak, veriler sınıf gözlemleri, video kayıtları, alan notları gibi çeşitli ve zengin kaynaklardan toplanmış, veri kodlaması için yukarıda değinildiği gibi araştırma ekibi üyelerinin karşılıklı kontrolu şeklinde yapmış, verilerin analizi neticesinde yapılan yorumlar tartışılmıştır. Bu süreçte, araştırmacı ve öğretmen öncelikle kendileri transkriptleri değerlendirerek, kodlarını oluşturmuşlardır. Tüm transkriptlerin incelemesi yapıldıktan sonra, üyeler bir araya gelerek oluşturulan kodların üzerinde tartışmış, ortak kodlar kategorilere dönüştürülmüştür. Üzerinde anlaşmazlık olan kodlamalar varsa ya analiz dışı bırakılmış ya da ortak kanıya varılabilmişse analize dahil edilmiştir. Ayrıca, analiz sonuçları ayrıntılı ve zengin açıklamalar kullanılarak sunulmuştur.

Bulgular

Bu araştırmanın ana odak noktası, bir öğretim dizisi ve varsayıma dayalı öğrenme yörüngesinin uygulanması sırasında sekizinci sınıf öğrencilerinin silindir konusunda matematiksel fikirleri çıkarmaktı. Öğretim dizisi, öğrencilerin geometrik kavramları anlamalarını geliştirmek amacıyla öğretimi desteklemek için argümantasyon ve DGY ile tasarlanmış öğretim etkinlikleri ile oluşturulmuştur. Buna göre, mevcut çalışmanın öğrenme yörüngesi sınıf ortamında meydana gelebilecek matematiksel fikirleri göstermek için bir temel olarak kullanılmıştır. Matematiksel fikir şeması, sınıf tartışmaları yoluyla formüle edilen matematiksel fikirleri analiz etmek için kullanılmıştır (Andreasen, 2006). Bu öğretim sürecinde silindirin hacmi konusu işlenmiş ve matematiksel fikirler bu kapsamda üretilmiştir. Birinci konu (çalışmaya dahil olmayan), silindirin temel elemanları üzerinde çalışılmıştır. Bu süreçte, öğrenciler, silindirin açınımı, temel özellikleri ve elemanlarına dayanan etkinlik sayfaları üzerinde çalışmışlardır. İçerik, öğrencilerin silindirin yapısını anlamalarına temel oluşturmak için hazırlanmıştır. Bu bölümden sonra, silindir ve parçaları açık olarak çalışılmış ve tartışılmıştır. Bu adım, öğrencilerin bir silindirin daire tabanları ve dikdörtgen yan yüzü arasındaki ilişkiyi anlamaları açısından önemlidir. Tüm süreçlerde, öğrencilere çalışmak için içeriğe göre değişiklik göstermekle birlikte 5-10 dk aralığında süre verilmiş ve daha sonra ilgili konularda sınıf içi tartışmalarda bulunmaya başlamışlardır. Öğrenciler hem bireysel hem de gruplar halinde çalışmış ve öğrenme süreci boyunca GeoGebra dosyaları içeriği desteklemiştir.

Matematiksel Fikir 1: Hacim Üçüncü Boyut ile İlgilidir

İlk matematiksel fikir, hacim tartışması sırasında paylaşıldı. Öğretmen, hangi hacmin ne olduğu hakkında bilgi vererek oturumu başlatmıştır. Öğrenciler önceki sınıf düzeylerinden hacim bilgisine sahipti. Zaten küpün ve dikdörtgen prizmanın hacmini altıncı sınıf seviyesinde öğrenmişlerdi ve hacim ile ilgili kavramsal anlayışa sahip olmaları bekleniyordu.

Ö: Şimdi, hacim hakkında konuşacağız. Hacim dediğimizde ne anlıyorsunuz? Herhangi bir fikriniz var mı?

K: Bir şeklin yeryüzünde veya uzayda kapladığı yer.

Ö: Bir şeklin yeryüzünde kapladığı yer. Nasıl? Örnek ver.

K: Örneğin bir şişe su. Boşlukta bir yeri var.

Ö: Yani, bu şekilde hacmi olduğunu söylüyorsun. Başka fikri olan var mı? Daha önce alan hakkında konuştuk. Alan ve hacim arasındaki fark nedir?

Z: Örneğin, bir dikdörtgenin alanını buluyoruz. Ancak, bir hacmi yok. Çünkü düz.

Bu bölümde, öğretmen öğrencilere hacmin anlamını sormuş, cevaplar öğrencilerin, hacim hakkında önceden bilgi sahibi olduklarını, ancak kendilerini ifade etmekte zorlandıklarını göstermiştir. K'ın şişe örneği iyi bir hacim örneğiydi, ancak düşüncesinin nedenini açıklayamamıştır. Ayrıca Z, düz olduğundan dikdörtgenin alanını hesaplamanın mümkün olduğunu belirtmiştir. Bu fikir, 2 boyutlu hesaplamalardan 3 boyutlu düşünceye geçişi anlamak için bir adımdı. Böylece öğretmen tartışmayı bu şekilde yönlendirmek istemiştir. Diyalog aşağıdaki şekilde devam etmiştir.

Ö: Z arkadaşımız diyor ki, hacim cismin uzaydaki kapladığı yerdir ancak alan düz şekillerle ilgilidir. Düz şekil nedir mesela? Daha net açıklamalar yapmanızı istiyorum. Ne diyorsunuz arkadaşınızın bu fikri ile ilgili?

M: Bir zemine fayans döşemek gibi düşünebiliriz. Örneğin, bu sınıfın zeminin bir alanı vardır ve burayı fayans döşeyebiliriz. Sanki böyle bir şey söylüyorduk. Fayans sayısı bize o zeminin alanını verir (Veri).

Z: Ayrıca, şekerlerimizi ambalajladık (bir önceki çalışmadan bahsediyor). Bu da alan hakkındaydı. Hacim, şeklin iç kısmını içerir (Gerekçe).

K: Bu yüzden alan iki boyutlu şekillerle ilgilidir. Hacim, üç boyutlu şekiller içindir (İddia).

Ö: Güzel. Aslında dikkat edin. Düzlemsel şekillerden bahsediyoruz. Düzlemsel şekiller için alan hesabı yapıyoruz değil mi? Evet, T.

T: İşte bu yüzden bir dikdörtgenin veya bir üçgenin alanını hesaplıyoruz. Ama bir prizmanın ya da silindirin hacmi var.

Bu bölüm ile öğrenciler fikirlerini daha açık bir şekilde ifade etmeye başlamışlardır. Öğrencilerin "düz şekil" ifadesi onlar için aslında anlam olarak "düzlemsel şekil" olsa da öğretmen matematiksel olarak doğru ifadeler kullanmalarını teşvik etmek amacıyla "düz şekil ne mesela?" şeklinde bir soru yöneltmiştir. Öğrenci M, prizmaların yüzey alanı üzerinde çalışırken bir zeminin döşenmesi örneğini hatırlatmıştır. Bu, alanın ana fikrini ifade etmenin bir örneğiydi. Ayrıca Öğrenci Z, önceki derslerde yaptıkları şekerleme ambalajı ile ilgili çalışmaların yine alanla ilgili olduğunu belirtmiştir. Birbirlerinin fikirlerini tartışarak, iki boyutlu ve üç boyutlu düşünceyi kavramışlardır. Hacim düşüncesi, bu kısımda ortaya çıkan üç boyutlu şekillerdir, ancak öğrencilerin söylemlerinde öğretimin sonraki bölümlerinde kullanılmıştır.

Şekil 3

D*iyaloğun Krummheuer'in (2015) Tartışma Modeline göre gösterimi*

M: Bir zemine fayans döşemek gibi düşünebiliriz. Örneğin, bu sınıfın zeminin bir alanı vardır ve burayı fayans döşeyebiliriz. Böyle bir şey söylüyorduk. Fayans sayısı bize o zeminin alanını verir (Veri).

K: Bu sebepten dolayı alan iki boyutlu şekillerle ilgilidir. Hacim, üç boyutlu şekiller içindir (İddia).

Z: Ayrıca, şekerlerimizi ambalajladık. Bu da alan hakkındaydı. Hacim, şeklin iç kısmını içerir (Gerekçe).

Ö: Bir şey sormak istiyorum. Açıklamalarınıza göre, bir kâğıt parçasının hacmi hakkında ne söylerdiniz? Hesaplayabilir miyiz?

M: Hayır, iki boyutlu.

Ö: Evet, iki boyutlu. Neye ihtiyacımız var?

M: Bir hacme sahip olması için şekil üç boyutlu olmalı. Yüksekliği yok (İddia).

Ö: Evet, güzel. Ama boşlukta yer kaplamasından bahsettik, kâğıt boşlukta yer kaplamıyor mu?

B: Kaplıyor ama düz, her şey boşlukta yer kaplar. Bu tam doğru olmayabilir.

Şekil 4

Diyaloğun Krummheuer'in (2015) Tartışma Modeline Göre Gösterimi

M: Bir hacme sahip olması için şekil üç boyutlu olmalı. Yüksekliği yok (İddia).

Bu diyalogda, öğretmen öğrencilerin hacim ve üçüncü boyut kavramını anlayıp anlamadıklarını görmek istemişlerdir. Bazı nesneler, şekiller ve boyutları hakkında sorular sormuştur. Kâğıdın hacminin olup olmadığı sorusuna Öğrenci M, kâğıdın iki boyutlu olduğu ancak hacim hesaplamak için yükseklik kavramına ihtiyaç olduğu cevabını vermiştir. Süreç içinde öğrenciler fikri benimsemişlerdir. Bir sonraki matematiksel fikrin ortaya çıkışında bu fikrin benimsenmesi ve uygulamaya dönüşmüş olması önemli olmuştur. Örneğin, öğrenciler hacim için yükseklik kavramının düzlemsel şekle bir derinlik getirdiği fikrini kabul ettikten sonra, hacmi yüzey alanından ayıran olguyu gerçek manada anlamışlardır.

Matematiksel fikir 2: Hacim bir cismin içini doldurmaktır

Bu fikir, aynı dersteki önceki diyaloglardan hemen sonra ortaya çıkmıştır. Sınıf hacmin anlamı hakkında konuşmaya devam etmiş, öğretmen, öğrencilerin üç boyutlu bir şeklin hacim hesaplama gereksinimlerini düşünmelerini istemiştir.

Ö: Evet, çoğunuzun dediği gibi, hacim iç ve yüzey ile tüm şekil hakkındadır. Fakat alan yüzeyle ilgilidir. Bahsettiğiniz gibi, daha önce etkinlik sayfalarınızda yüzey alanı üzerinde çalıştık. Ambalaj kâğıtları ile şekerlerin yüzeyini sardık. Hepsi yüzey alanının hesaplanmasıyla ilgiliydi. Şimdi, düşünmenizi istiyorum. Bu sınıfın hacmini nasıl hesaplardınız?

………… (bir süre sessizlik)

Ö: Alan hesabından yola çıkabilir miyiz?

A: Bu sınıfı doldurabilecek şeylerin sayılması gerekiyor. Bu şeyler eşit olmalı.

Ö: O şeyler nelerdir?

A: Adlarını unuttum. Etkinlik sayfalarımızda kullandık.

Ö: Birim küpler.

A: Evet. Birim küpler. Bu sınıfı dolduran birim küp sayısını bulursak, bize bu sınıfın hacmini verir (İddia).

K: Biz buna üç boyutlu diyoruz, değil mi? *(Veri)*

Ö: Evet. Bu, hacmi olur mu o zaman? Bu, bir şeklin uzayda kapladığı yeri söylemenin diğer bir yolu.

B: Bu bir zemin döşemeye benzer (Şekil 5a). Burada da küplerle bir yeri dolduruyoruz (Şekil 5b) *(Gerekçe)*. Evet, anladım.

Ö: Şimdi ilişkiyi gördünüz mü? Ya da fark?

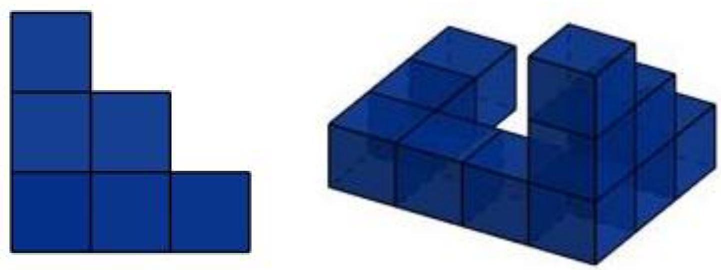
Sınıf: Evet.

Yukarıda diyalog konusu yine hacmin anlamı ile ilgiliydi. Öğretmen tartışmayı hacmin üçüncü boyut ile ilgili olduğu etrafında tutmaya yönelik sorularına devam etti. Diyaloğun başında, öğretmen öğrencilerin alanın anlamı ile ilgili ürettikleri önceki söylemi doğruladı. Şekilleri kâğıt ile kaplama ile ilgili çalışmalarının yüzey alanının hesaplanması ile ilgili olduğunu tekrar hatırlattı. Ayrıca, alan ve hacim arasındaki farkı anladıktan sonra, öğrencilerin buna göre hacim hesaplama fikrini düşünmesini istedi. Sınıfın hacminin nasıl hesaplayabilecekleri konusunda düşünmelerini istedi. Öğrenci A, sınıfın içini doldurmanın onlara sınıfın hacmini verebileceğini iddia etti. Öğrenci K, Öğrenci A'nın iddiasını hacmin üçüncü boyut ilgili olduğunu hatırlatarak destek sağlamış oldu. Bu sayede Öğrenci B, bir zeminin döşenmesi ve bir sınıfın içini doldurma örneklerini hatırlatıp, şimdiki konuya bağlayarak bu argümanı gerekçe ile destekledi.

Ayrıca Öğrenci A'nın "Bu sınıfı doldurabilecek şeylerin sayılması gerekiyor. Bu şeyler eşit olmalı" söylemi bir önceki fikrin kullanımına örnek teşkil etmektedir. Birim küplerin üst üste dizilmesi ve sınıfın doldurulması fikri, yüzeye ek olarak bir yükseklik inşa etme olgusunun uygulamaya geçirilmesidir. Dolayısıyla, hacmin üçüncü bir boyut getirdiği fikri uygulamaya dönüşmüş denilebilir. Bu tartışmalar üzerinden kendi fikirlerini de ekleyerek, öğrenciler hacmin tam olarak ne anlama geldiğini zihinlerinde yapılandırmış oldular.

Şekil 5

Zemin Döşeme ve Sınıfın İçini Doldurma Fikrinin Geogebra Dosyası Gösterimi



a b

Matematiksel Fikir 3: Hacim hesabı yükseklik, genişlik ve uzunluk kavramlarını içerir

Önceki kısımlarda öğrenciler hacim hesabı ile ilgili fikirler ileri sürmüşler ve üzerinde konuşmuşlardı. Hacmin hesaplanması ile ilgili bu fikir, hacmin anlamı üzerindeki konuşmalar tamamlandıktan sonra ortaya çıkan genişlik, uzunluk ve yükseklik bilgisini gerektirir. Öğretmen, öğrencilerin hacim hesaplama için gerekli olan elemanların üzerinde düşünmelerini istemiştir.

Ö: Hmm. Tamam. Hacim fikrini oturttuk biraz. Şimdi. Hacim hesaplaması hakkında düşünelim. Neyi bilmeniz gerekiyor? Evet B.

B: Genişliğe, uzunluğa ve boyuta ihtiyacımız var *(Veri).*

Ö: Neden böyle düşünüyorsun?

B: Çünkü üç boyut, genişlik, uzunluk ve yükseklik anlamına gelir *(Gerekçe).*

Ö: Genişlik ve uzunluk ile ne hesaplarsınız?

B: Yaptık ya. Bize alan veriyor. Genişliğini ve uzunluğunu çarparak bir şeklin alanını hesaplıyoruz.

Ö: Yüksekliğin rolü nedir? Evet A.

A: Üçüncü boyutu yükseklik veriyor. Örneğin, o alanı yükseklik ile çarparsak, bize hacmi verir.

Ö: Bir örnek verebilir misiniz?

M: Örneğin, bu sınıfı tekrar düşünebiliriz. Sınıfın tüm zeminini kaplarsak, zeminin alanını buluruz. Fakat bu sonucu yüksekliğiyle çarparsak, bize hacim verir *(İddia).*

Bu diyalogda öğrenciler, hacim hesaplaması için gereken elemanları anlamaya çalışmışlardır. Hacmi hesaplamak için genişlik, uzunluk ve yüksekliği çarpmanın nedenleri üzerinde kolaylıkla uzlaşmış oldular. Öğretmen, öğrencilerin hacim hesaplama hakkındaki fikirlerini sorduktan sonra, Öğrenci B, genişlik, uzunluk ve yükseklik gerektiğini savunmuştur. Ancak, öğretmen bunları neden kullanıldıklarını anlamalarını istiyordu. Bunun için Öğrenci B'nin bu açıklaması için bir örnek vermelerini istedi. Buna dayanarak, öğrenci M, sınıfın hacmi hakkında bir örnek verdi. Zemin yüzeyinin alanını hesapladıktan sonra, o alanın yüksekliğiyle çarpılmasının onlara sınıfın hacmini vereceğini belirtti. Ayrıca, Öğrenci A'nın açıklaması hem Öğrenci B'nin iddiasına bir gerekçe ve aynı zamanda hacmin üçüncü boyutla olan ilişkisine dair ortaya çıkan matematiksel fikrinin kullanılmasının bir örneği olması açısından da önemliydi.

Ö: Evet, prizmaların hacminden bahsettik ve önceki yıllardan bu bilgiye sahip olduğunuzu söyledik. Bu konuyu altıncı sınıfta öğrendiniz. Şimdi, silindirin hacmi hakkında düşünelim. Prizmaların hacmini biliyorsunuz ve hacim fikrine sahipsiniz. Neler söylemek istersiniz?

K: Genişlik, uzunluk ve yüksekliği çarparak prizmaların hacmini buluyoruz. Yani, aynı şeyi silindir için yapıyoruz *(İddia).*

Ö: K'ın iddiası için ne diyorsunuz?

T: Ama silindir bir prizma değil, genişlik ve uzunluğa sahip değil.

Ö: İyi nokta. Acaba silindir prizma mıdır? Arkadaşınız prizma değil diyor. Bunu önceden konuşmuştuk. Silindir prizmaların özel halidir demiştik. Ama evet dediğiniz türden doğrusal genişliği yok.

K: Ahhh. Evet. Affedersiniz.

Ö: Öyleyse, ne yaparız? Gerçekten de prizmalar için geçerli olan bu tanım silindir için de uygun mudur?

Bu bölümde sınıf, silindirin hacmini tartışmaya başlamış ve altıncı sınıfta öğrendikleri prizmaların hacmine dair önceki bilgilerini tartışmışlardır. Öğretmen, öğrencilerin bu bilgiyi tekrar hatırlatmasını istemiş ve bu bilgiyi silindir hacmi ile ilişkilendirmelerini istemiştir. Öğrenci K, prizmanın hacmini, verilen prizmanın genişliği, uzunluğu ve yüksekliğini çarparak bulduğunu iddia etmiş, böylece, silindir hesaplaması için de aynı yolu takip edeceklerini belirtmiştir. Bir prizmanın hacminin hesaplanması ile ilgili iddiası doğruydu ama silindirin hesaplanması için aynı şekilde kullanılması fikri en- boy bağlamında yanlıştı. Tabi ki matematiksel olarak taban alanı ve yüksekliğin çarpımı fikri silindir için de doğruydu ancak şu nokta net olarak görülebilir ki öğrencilerde prizmanın hacmini bulurken üç ayrıtın çarpılacağı fikri var. Öğrenci T bunu belirlemiş ve bir silindirin herhangi bir genişlik ve uzunluğa sahip olmadığını belirterek bu fikri düzeltme yoluna gitmiştir.

Matematiksel Fikir 4: Hacim taban alanı ile yüksekliğin çarpımıdır

Bu fikir, genişlik, uzunluk ve yüksekliğin çarpımı ile ilgili diyaloglardan hemen sonra ortaya çıkmıştır. Bir önceki bölümde, öğretmen sınıfın silindirin hacmini bulma yolunu düşünmesini istemiştir. Ayrıca, tüm ileriki kısımlarda GeoGebra, öğrencilerin silindir hacmini hesaplama yöntemini anlamalarını sağlamak için kullanılmıştır.

Ö: Şimdi, prizmaların hacmini bulurken, genişlik, uzunluk ve yüksekliğin çarpımını kullandığınızı söylemiştiniz. Genişlik ve uzunluğun çarpımı amacı neydi?

Y: Alan.

Ö: Hangi alan?

Y: Yüzey alanı.

Ö: Evet, yüzey alanı. Bunu taban alanı olarak adlandırıyoruz. Tamam. O zaman sonraki adım nedir? M?

M: Yüzey alanını yükseklik ile çarparak *(Veri).*

Ö: Çok iyi. Yani bunu söyleyebiliriz, hatırlayın. Hacim, taban alanın yükseklik ile çarpımıdır. Şimdi, silindir için aynı mı?

Z: Aynı olmalı *(İddia).*

M: Aynı. Çünkü üç boyutlu *(Gerekçe).*

Ö: Göreceğiz. Bu GeoGebra dosyasına bakalım.

Bu bölümün amacı öğrencilerin ön bilgilerini mevcut durumla ilişkilendirmekti. Öğrenciler önceki yıllardan prizmaların hacmini biliyorlardı. Öğretmen, bu şekilde tartışarak ve yeniden düzenleyerek bu bilgiyi hatırlamalarını sağlamıştır. Ve sonra öğretmen, silindir hacmi için de aynı şekilde takip edilip edilemeyeceğini sormuştur. Araştırmacı, aşağıdaki tartışmayla aynı anda bir GeoGebra dosyasını (Şekil-5) açmıştır. Bu GeoGebra dosyası, silindirin doldurulması fikrine dayanıyordu. Amaç, bu cismin içini doldurmanın formülle nasıl ilişkili olduğunu öğrencilere göstermektir.

Ö: Dediniz ki, silindirin hacmi de prizmaların hacmini bulmakla aynı şey. Genişliği, uzunluğu ve yüksekliği çarpacağız. Ama sonra, bir silindirin doğrusal genişliği ve uzunluğu olmadığını söylediniz. Kenar olmadığını söyleyebiliriz. Peki, çözüm nedir?

K: πr^2

Ö: Neden?

K: Daireyi bulmak için?

Ö: Hangi daire?

K: Silindirin dairesi.

Ö: Taban alanını kastediyorsun.

K: Evet. Taban alanı.

Ö: Öyleyse neden yükseklik ile çarpmanız gerekiyor?

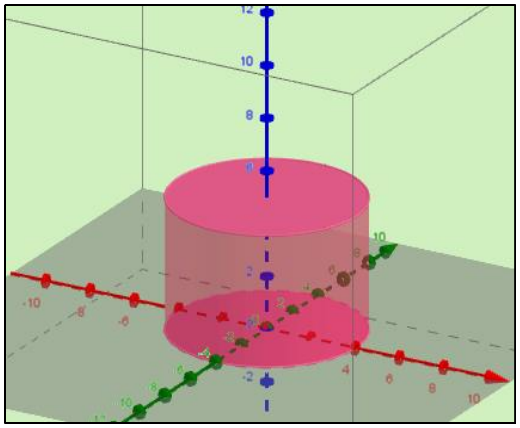
M: Hacmini bulmak için.

B: Çünkü yükseklik, hacim kavramını getiriyor, üçüncü boyut sağlıyor.

Bu bölüm, taban alanının ve yüksekliğin çarpılması mantığının silindirin hacmini nasıl uygulanacağı konusuna bir giriş niteliğindeydi. GeoGebra interaktif tahtada açılmış ve sınıf bu konuyu tartışmıştır. Burada öğrenci B'nin "Çünkü yükseklik, hacim kavramını getiriyor, üçüncü boyut sağlıyor" şeklindeki söylemi birinci ve ikinci matematiksel fikrin sınıf uygulamasına dönüştüğünün bir örneğidir. Artık öğrenciler hacim ile ilgili konuşurken üç boyut ve üç ayrıttan bahsedildiği fikrini benimsemiş ve kullanmaya başlamışlardır. Bundan sonra tartışma şu şekilde devam etmiştir.

Şekil 6

İçi Boş Silindir Gösterimi



Araştırmacı: Şimdi. Taban alanına ihtiyacımız olduğunu söyledin, ama üçüncü boyutu elde etmek için bir yüksekliğe ihtiyacımız var. Verilen cismin hacmini bulmak için prizmayı dolduran birim küp sayısını saydık. Yani, burada neyi sayabiliriz?

T: Daireler.

Araştırmacı: Evet, peki sonsuz sayıda daire yerleştirdiğinizde neler olacağını düşünün.

A: Silindir

Ö: Evet. Öyleyse, silindirin hacmini bulmak için neye bakıyoruz?

A: Dairelerin sayısı *(Veri).*

Ö: Evet, daire sayısı güzel fikir. Belirli bir silindirin hacmini hesaplamak istediğimizde her zaman için daire sayısını sayabilir miyiz? Öğretmeninizin de söylediği gibi sonsuz sayıda dedik ama nasıl sayacağız? Sonsuz sayıda diyoruz değil mi?

……..(Sessizlik)

Ö: Dikkat edin prizmaların hacmini bulurken birim küpler kullanmıştık. Burada ne yapabiliriz?

……(Sessizlik)

Araştırmacı: Sayabilmeliyiz çocuklar dikkatli düşünelim, küpleri sayabilmek için 1br seçtik.

K: 1br'lik daire mi?

Ö: Neresi 1br.

K: Yüksekliği.

Ö: İyi de o zaman daire mi olur? Daire düzlemsel değil mi?

K: O zaman silindir mi?

Ö: Güzel, bakın şimdi. Nasıl prizmalarda birim küplerden yaralandıysak burada da 1br yüksekliğe sahip silindirlerden yararlanabiliriz. (Şekil-6)

Z: Bu yükseklik olur o zaman.

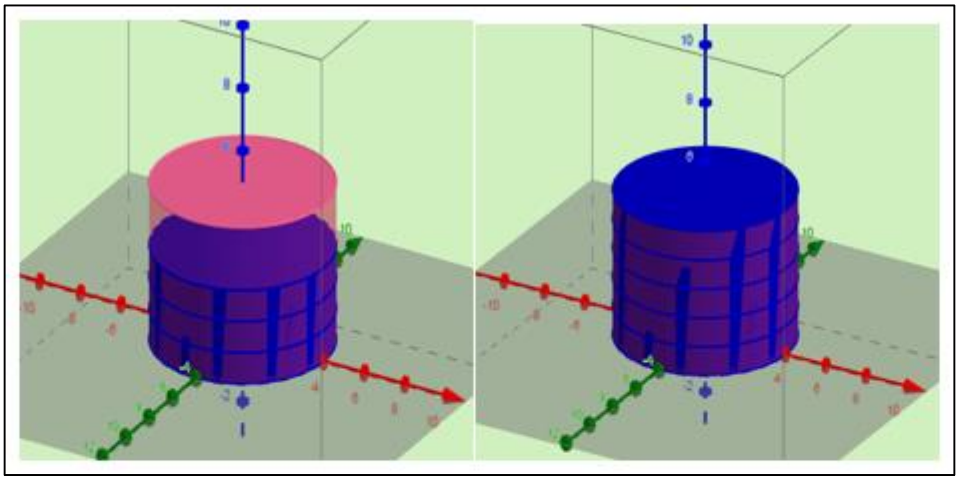
Ö: Peki, şimdi hacim için net bir çıkarımda bulunalım o zaman.

Z: Yani, hacim taban alanı ve yükseklik çarpımıdır *(İddia)*.

Ö: Kesinlikle. Yani, bu formülün çıktığı yer diyebiliriz.

Şekil 7

Boş Silindirin Doldurulmasını Gösteren Geogebra Dosyası



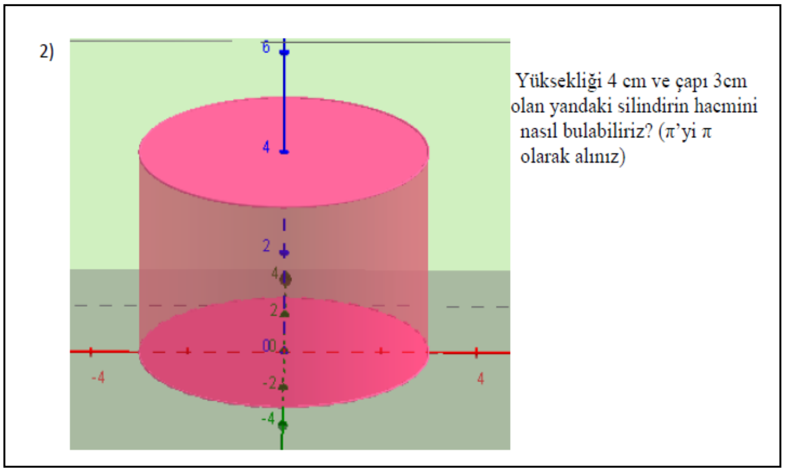
Burada öğrencilerden beklenen, silindiri doldurmak için bir küpleri kullanmak yerine daireler kullanma ve bu daireler sonsuz sayıda olduğu için buradan yola çıkarak, 1br yüksekliğinde silindir kullanmaları gerekliliğini fark etmeleriydi. Öğrenciler silindirin hacmini, belirtilen yükseklikte 1br'lik silindirleri yerleştirerek nasıl doldurabileceklerini anlayabileceklerdi. Ayrıca öğrencilerin "taban alanı ve yüksekliğin çarpımı" olarak formüle edilebilen küp ve dikdörtgen prizmaların hacim bilgisini bu konuya da aktarmaları beklenmiştir. Nitekim öğretmen ve araştırmacı yönlendirmeleri ile Öğrenci T, bir silindirin daire kullanarak doldurulabileceğini belirtti. Öğrenci A, fikrini açıklayarak, bu daireleri koymanın bir silindir inşa etmenin bir yolu olduğunu ekledi. Ancak öğretmenin daireleri sayamayacakları ile ilgili yönlendirmesi öğrencileri biraz süre düşünmeye teşvik etti. Araştırmacının birim küpleri hatırlatması ile 1br'lik bir cisme ihtiyaç duydukları kanısına vardılar. Dairenin bir yüksekliği olmadığı hatırlatıldıktan sonra, Öğrenci K, daire değil 1br yüksekliğe sahip silindir kullanılması gerektiğini belirledi. En son olarak öğrenci Z, birbirleri üzerine konmuş olan 1br yüksekliğindeki silindir sayısının, silindirin ana yüksekliğini verdiğini anlamış oldu ki bu da hacim formülünün temeliydi. GeoGebra dosyası (şekil 6) sayesinde öğrenciler kullanılan birim silindir sayısını gözlemlemiş ve durumun dinamik olarak gösterilmesi, bu sayının silindir yüksekliğini verdiği fikrinin ortaya çıkmasını desteklemiştir.

Bu şekilde, sınıfta silindirin hacim formülüne ait matematiksel fikir elde edilmiş oldu. Tüm sınıf tartışması tamamlandıktan sonra öğretmen silindir formülünü ve nedenini tekrarladı ve etkinlik sayfasının son iki sayfasında çalışmaya başladı.

Daha sonraki soru çözümlerinde yine taban alanı ve yüksekliğin çarpımı şeklindeki söylem artık öğrenciler tarafından kullanılmaya başlanmış ve uygulamaya dönüşmüş durumdadır. Aşağıdaki diyalog bu duruma bir örnek teşkil etmektedir.

Şekil 8

Çalışma Kâğıdından Bir Soru Örneği



Ö: Soruya bakalım. Yükseklik 4 cm, çap 3 cm'dir. Silindirin hacmini soruyor.

Y: Çapı 3 cm ise yarıçapı 1,5 cm'dir.

Ö: Evet

Y: Taban alanı ve yüksekliğini çarparak 9 buldum *(İddia).*

Ö: Evet. Bekle. Tamam. Tekrar, lütfen.

Y: Taban alanı $\pi. r2. \pi$ için herhangi bir şey söylememiş. Yani, 1,5 çarpı 1,5, 2,25 olur. Yükseklik 4'tür. Sonuç 9 π'dur.

Bu en son örnekte görüldüğü gibi artık silindirin hacim hesabı ile ilgili matematiksel fikir herkes tarafından kabul görmüş ve sınıf uygulamasına dönüşmüş durumdadır. Sorunun çözümü ile ilgili diyalog incelendiğinde, Öğrenci Y çözümünü açıklarken taban alanı ve yüksekliğin çarpımı şeklinde yaptığını ifade etmiş ve sınıfta bunu onaylamıştır.

Sonuç ve Tartışma

Bu çalışmanın amacı, sekizinci sınıf matematik dersinde silindir konusu bağlamında argümantasyona dayalı bir öğretim ortamı hazırlamak ve bu bağlamda ortaya çıkan matematiksel fikirleri değerlendirmek, yani sınıfın sosyal ve kolektif öğrenme ortamlarında matematiksel fikirlerin nasıl ortaya çıktığını ve öğretim devam ederken nasıl uygulamaya dönüştüğünü analiz etmek ve belgelemektir. Bu fikirleri elde etmek için, silindir konusunda bir varsayıma dayalı öğrenme yörüngesi ile bir öğretim dizisi hazırlanmıştır. Bu öğretim dizisi argümantasyona dayalı sınıf ortamı ve GeoGebra'nın desteği ile çalışma boyunca uygulanmıştır. Böylelikle silindirin hacmi konusu kapsamında geometri derslerine bir bakış açısı sağlamayı, öğrencilerin bu içeriği öğrenmelerini, kavramsal anlayışlarını geliştirmeye yönelik olası yeni öğrenme yollarını göstermeyi amaçlamıştır. Ayrıca, çalışma, katılımcıları bu öğrenme topluluğuna dahil etmek için doğal sınıf ortamında TTA olarak yürütülmüştür (Cobb, 2000).

Sınıf içi argümantasyon öğrencilerin kavramsal bilgileri ve ders içeriğini daha iyi anlamalarını sağlar (Güçler vd., 2013). Öğrenciler bu çalışma dahilinde, argümantasyon sürecine katılarak eksik/yanlış noktaları belirlemiş ve öğretmen desteğiyle diğer fikirleri de yorumlayarak, kabul veya reddetme yoluyla çıkarımlara ulaşmışlardır. Literatürde bu bulgularla tutarlı araştırmalar yapılmıştır (Fukawa-Connelly & Silverman, 2015; Kosko vd., 2014; Mueller vd., 2014). Ek olarak, araştırma, sınıf üyeleri arasındaki bütün diyalogları desteklemiş (Abi-El-Mona & Abd-El-Khalick, 2011; Duschl & Osborne, 2002), katılımcıların diğer sınıf üyelerinin fikirlerini daha bilimsel olarak yorumlamalarını sağlamıştır. (Flores vd., 2016; Osborne vd., 2004). Mesela bu sayede silindirin hacmini bulurken matematiksel olarak anlamlı ("Bu yükseklik olur o zaman. Yani, hacim taban alanı ve yükseklik çarpımıdır" gibi) çıkarımlara ulaştılar. Yine diğerlerinin fikirlerini kabul etme ve/veya reddetme yoluyla (Örneğin: "Ama silindir bir prizma değil, genişlik ve uzunluğa sahip değil") kavramsal anlayışlarını geliştirme yollarını (Cramer, 2011; Jonassen & Kim, 2010; Wheeldon, 2008) keşfetmelerine yardımcı olmuştur. Öğretim sürecini argümantasyon ile destekleyerek, öğrencilerin silindir konusunu kavramalarına yardımcı olmuştur. Zira literatürde argümantasyonla geometrik kavramların öğrenilebileceği desteklenmiştir (Kosko vd., 2014; Prusak vd., 2012). Dahası argümantasyona dayalı olarak planlanan ders içi öğretim etkinlikleri, öğrencilerin destekleme, gerekçelendirme ve kanıtlama gibi becerilerini de geliştirilebilir (Asterhan & Schwarz, 2007; Sadler & Fowler, 2006). Bu çalışmada da öğrencilerin ortaya çıkan fikirleri destekleme veya karşı çıkma; kendi öne sürdükleri fikirleri de kanıtlama ile ilgili örnekleri diyaloglarda net olarak görünmektedir.

Argümantasyonun doğası ve kolektif bir öğrenme ortamının gereklilikleri ile tutarlı olarak, öğrenciler, bireysel olarak, akranlarıyla veya tüm sınıf tartışmalarına katılırken kendilerini ifade etmekte özgürdüler. Çalışma süresince, öğrenciler kendinden emin olduklarında, matematiksel olarak uygun ve kabul edilebilir olan yeni ve farklı fikirlerin ortaya çıktığı görülmüştür. Örneğin silindirin, aslında aynı yarıçaplı 1br yüksekliğe sahip silindirlerin üst üste dizilmesi ile oluştuğu fikrinden yola çıkarak taban alanı çarpı yükseklik çıkarımına ulaştılar. Bu nedenle, literatürle uyumlu olarak, argümantatif bir yaklaşım, öğrencilerin düşüncelerini ifade etmelerinin teşvik edilmesinde özellikle etkili olabilir (Boaler, 2016; Fujita vd., 2017).

Ek olarak, öğretmenlerin rolü sınıfta gelişen argümantasyon ortamının devamlılığını sağlamak ve öğrencilerin sınıf etkinliklerine katılımını arttırmak açısından önemlidir. Çalışma süresince, katılımcı öğretmen, öğrencileri dinleyerek ve diğerlerinin farklı fikir ve argümanlarını göz önünde bulundurarak, öğrencilerin iddialarını ve gerekçelerini sağlamaya teşvik ederek matematiksel normlarını oluşturmaya çalışmıştır (Kosko vd., 2014). Dahası, matematiksel fikirleri ilgili bağlamda inşa etmek için diyalogları başlatmış ve yönetmiştir. Öğretmenin bu faaliyetleri, önceki araştırmalarla tutarlıdır (Conner vd., 2014; Forman vd., 1998; Mueller vd., 2014). Ek olarak, önceki araştırmalar, öğretmenlerin matematik dersinde nasıl bir argümantasyon ortamı oluşturacaklarını da göstermiştir (Asterhan & Schwarz, 2016). Wood vd. (2006) ile tutarlı olarak, mevcut çalışmada, öğrencilerin matematiksel düşünme biçimlerini ve fikirlerini sınıf ortamında paylaşmalarına olanak tanıması ile öğretmenin matematiksel argümantasyondaki rolünün önemini ortaya çıkarmıştır.

GeoGebra'nın bir öğretim aracı olarak kullanılması, öğrencilerin üç boyutlu şekilleri kavramsal olarak anlamalarını desteklemiştir. Çalışma sırasında, öğrenciler şekilleri farklı açılardan görme şansına sahip olmuşlardır. GeoGebra'nın desteğiyle şekillere ilişkin bu gözlem, öğrencilerin kâğıt ve kalem ortamında göremedikleri eksik noktaları yakalamalarını sağladı ve bu şekilde, konu ile ilgili fikirler üretebilmişlerdir. Örneğin, sınıf, silindirin hacminin formülünü bulmaya çalışırken, taban alanı ile prizmaların hacminden gelen yükseklik hakkında konuşuyorlardı. Aynı formülü silindirin hacmi için uygulamanın mümkün olup olmadığını tartışmışlardı. Bu nedenle, bu fikrin uygunluğunu kontrol etmek ve onaylamak için araştırmacı, bir silindiri nasıl dolduracağını gösteren (Şekil 6) bir GeoGebra dosyası açmıştı. Bu resimleme göz önüne alınarak, öğrenciler taban alanı ile yüksekliği çarpma fikrini ve bunun da silindirin hacmini vereceği fikrini doğrulamıştı. Böylece, GeoGebra dosyasının desteğini, silindirin hacmini bulma fikrini ve buna bağlı olarak formülü elde etmiş oldular. Dolayısıyla, DGY kullanımının öğrencilerin geometrik düşüncesini geliştirdiği ve matematiksel fikirlerin ortaya çıkmasını desteklediği açıktır (Pei vd., 2018). Dahası, DGY'nin kullanımı geometri öğrenimini kâğıt-kalem yönteminden çok daha zengin ve daha güçlü hale getirmiştir (Battista, 2007). Öğrencilere matematiksel fikirleri destekleyen düşünme, muhakemelerini açıklama ve haklı çıkarma şansı vermiş (Clark-Wilson & Hoyles, 2017); ve bu sayede öğrencilerin geometrik ve uzamsal düşüncelerini olumlu yönde etkilemiş, bu da aynı zamanda başarılarının artmasını sağlamıştır (Ng & Sinclair, 2015; Owens & Highfield, 2015; Sinclair & Moss, 2012). Ayrıca, derslerde GeoGebra kullanımı öğrencilerin sınıf etkinliklerine katılımını desteklemiştir. Her ders sırasında, kısa veya uzun bir süre boyunca argümantasyon süreci işlemiştir. Öğrenciler fikirlerini ilgili bağlamda ifade etmiş, çözümlerini kanıtlamış ya da başkalarının düşüncelerini reddetmişlerdir. GeoGebra'nın kullanımı, öğrencilerin fikirlerini sözlü olarak ifade etmelerine izin vermiştir. Bu nedenle, DGY kullanımı öğrencilere görselleştirme ve fikirlerini kanıtlama imkânı sağlayarak sınıf tartışmalarına katılımlarını artırmıştır (Ng & Sinclair, 2015).

Nursyahidah ve Albab'ın (2021) çalışmasıyla paralel olarak birden fazla içerik ile zenginleştirilmiş öğrenme ortamlarında öğrencilerin öğrenme ve kendilerini ifade etme becerilerinin desteklenmiş olduğu söylenebilir. Adı geçen çalışmada da silindirin alanı ve hacminin öğretiminde TTA temelli ve GeoGebra destekli bir öğretim uygulaması kullanılmıştır. Bulgular öğrencilerin süreç içerisinde düşünme ve kavramlar arasındaki bağlantıları keşfetme açısından oldukça başarılı olduklarını vurgulamaktadır. Bu çalışmada ise aynı bulgular izlenmiş olmakla birlikte buna ek olarak öğrenciler argümantasyon içerikli derslerle başka fikirleri de duyma, anlama, analiz etme, kabul etme veya reddetme süreçlerine dahil olmuşlardır.

Weinhandl vd.(2020) öğrencilerin kendilerini ifade etme fırsatlarının daha fazla olduğu öğrenme ortamlarının öğrenmeye olan pozitif etkilerini vurgulamışlardır. Araştırmacılar, TTA temelinde GeoGebra ve ters yüz sınıf modeli ile yaptıkları çalışmada öğrencilerin kendilerini özgür hissettiklerini ve bunun da öğrenmeye olumlu yansıdığını söylemişlerdir. Bu çalışma ise TTA olarak kurgulanmış, GeoGebra ve argümantasyon içeriği ile desteklenerek öğrencilerin farklı fikirleri inceleme ve eleştirmelerine olanak sağlamıştır. Bu ortamın da yine öğrenmeyi pozitif olarak etkilediği gözlemlenmiştir.

Argümantasyon ortamı, öğrencilerin geometri ve özellikle katı cisimlerin anlaşılmasında etkilidir (Hollebrands vd., 2010). Bu çalışmada öğrenciler fikirleri paylaşarak, başkalarının fikirlerini kanıtlayarak, yorumlayarak ya da reddederek, silindirin yapısını ve hacmini kavramsal olarak anlamışlardır (Latsi & Kynigos, 2012). Öğrencilerin konu üzerindeki tartışmaları bu olumlu etkileri dikkate alındığında, geometri dersleri için ders planları tasarlarken öğretmenler tarafından kullanılabilir. Bu aktif öğrenme ortamını göz önünde bulundurarak, tüm sınıf argümanlarını öğretimin amacına göre yönlendirmek önemlidir. Bu nedenle, öğretmenin rolü, önemli noktaların altını çizmek, kavram yanılgılarını veya öğrenci hatalarını belirlemek ve yönünü buna göre değiştirmek açısından tartışmanın akışının yöneticisi olarak kritiktir. Bu şekilde, öğretmen ayrıca öğrencilerin ilgili bağlamı anlamalarını ve öğrenmelerini sağlamaktan sorumludur. Bu bağlamda, öğretmenin bir yönetici olarak bilgisi ve rolü önemlidir (Yackel, 2002). DGY, geometri öğretmek ve öğrenmek için etkili bir öğretim aracıdır (Agyei, & Benning, 2015; Pittalis vd., 2012).

Öneriler

Çalışmanın bulguları, bu çalışmanın gerçekleştirildiği ortama ait bulgulardır. Araştırma Türkiye'de bir devlet okulunda yapılmıştır. Bu nedenle, çalışmanın sonuçlarının benzer koşullar için geçerli olduğu düşünülebilir ve öğretmenler için bazı çıkarımlar sunulabilir. Mevcut çalışma, bir varsayıma dayalı öğrenme yörüngesi rehberliğinde bir eğitim dizisi geliştirmiş ve uygulanmıştır. Süreç içinde, öğrencilerin ihtiyaçları ve öğrenimleriyle ilgili içerikte bazı değişiklikler yapılmıştır. İçerik, koşullara göre uygun değişiklikler yaparak herhangi bir sekizinci sınıfta uygulanabilir. Matematik öğretmenleri öğretim dizisini kullanabilir ve derslerini buna göre tasarlayabilirler. DGY ve sınıf tartışmaları haricinde başka öğretim araçları ekleyebilirler.

Mevcut çalışmada, öğrenciler GeoGebra yazılımını bireysel olarak kullanmamışlardır, bunun yerine interaktif tahta üzerindeki hazır dosyaları gözlemlemişlerdir. Bu bağlamda, öğrencilere GeoGebra'yı ya da başka bir DGY'yi bireysel olarak kullanmaları için fırsatlar sunarak ve bu şekilde öğrenmelerine geliştirecek bir başka çalışma yapılabilir. Dahası, bu tür çalışmalara argümantasyona dayalı bir sınıf ortamı eklenebilir ve etkileri birlikte değerlendirilebilir. Ayrıca, öğrencilerin matematiksel fikirleri DGY'yi bireysel olarak kullanırken belirlenebilir.

Katılımcı sınıfta 35 öğrenci vardı ve ders işlenişi sırasında sınıf içi diyaloglar gelişti. Sınıfın kalabalık oluşu argümantasyon kullanımı için bir engel değildi. Yine de daha az mevcutlu sınıf ortamlarında öğrencileri sınıf etkinliklerine daha aktif olarak dahil edilerek çalışma yinelenebilir ya da öğretmenler uygulayabilirler. Öğretmen, öğrencilerin fikirlerini özgürce ifade etmeleri için fırsatlar sağladığında, öğrenciler fikirlerini sınıf ortamında anlamlı bir öğrenme yaratacak şekilde paylaşma şansına sahip olacaklardır. Dahası, GeoGebra'nın bir öğretim aracı olarak kullanılması, bunların içeriğe daha fazla ilgi göstermesini sağlayabilir. Mevcut çalışmada, öğrenciler GeoGebra'yı bireysel olarak kullanmadılar. Ancak bu, öğrencilerin derse daha çok ilgi duymalarını ve daha iyi anlamalarını sağlamıştır. Öğretmenlerin geometri derslerinde bir bilgisayar laboratuvarı kullanma şansı varsa, GeoGebra'yı öğretimin ana öğretim aracı olarak kullanabilirler.

Etik Kurul İzin Bilgisi: Bu araştırma, Orta Doğu Teknik Üniversitesi (ODTÜ) İnsan Araştırmaları Etik Kurulunun 05/12/2016 tarihli 2016-EGT-164 sayılı kararı ile alınan izinle yürütülmüştür.

Yazar Çıkar Çatışması Bilgisi: Bu çalışmada çıkar çatışması yoktur ve finansman desteği alınmamıştır.

Yazar Katkısı: Yazarlar makaleye eşit katkı sağlamış olduklarını beyan ederler.

Kaynakça

Abi-El-Mona, I. & Abd-El-Khalick, F. (2011). Perceptions of the nature and goodness of argument among college students, science teachers and scientists. *International Journal of Science Education*, *33*(4), 573-605. https://doi.org/10.1080/09500691003677889

Adolphus, T. (2011). Problems of teaching and learning of geometry in secondary schools in Rivers State, Nigeria. *International Journal of Emerging Sciences*, *1*(2), 143-152. http://hdl.handle.net/1893/26189

Agyei, D. D., & Benning, I. (2015). Pre-service teachers' use and perceptions of GeoGebra software as an instructional tool in teaching mathematics. *Journal of Educational Development and Practice*, *5*(1), 14-30.

Akyüz, D. (2016). Farklı öğretim yöntemleri ve sınıf seviyesine göre öğretmen adaylarının TPAB analizi. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education (TURCOMAT)*, *7*(1), 89-111.

Alqahtani, M. M., & Powell, A. B. (2017). Mediational activities in a dynamic geometry environment and teachers' specialized content knowledge. *The Journal of Mathematical Behavior, 48*, 77-94. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.08.004

Anderson, T., & Shattuck, J. (2012). Design-based research: A decade of progress in education research. *Educational Researcher*, *41*(1), 16-25. https://doi.org/10.3102/0013189X11428813

Andreasen, J. B. (2006). *Classroom mathematical practices in a preservice elementary mathematics education course using an instructional sequence related to place value and operations*. [Unpublished doctoral dissertation]. University of Central Florida, Orlando. https://www.proquest.com/openview/765e105781f0bb201aad00b8c9947252/1?pq-origsite=gscholar&cbl=18750&diss=y

Asterhan, C. S., & Schwarz, B. B. (2007). The effects of monological and dialogical argumentation on concept learning in evolutionary theory. *Journal of Educational Psychology*, *99*(3), 626. https://doi.org/10.1037/0022-0663.99.3.626

Asterhan, C. S., & Schwarz, B. B. (2016). Argumentation for learning: Well-trodden paths and unexplored territories. *Educational Psychologist*, *51*(2), 164-187. https://doi.org/10.1080/00461520.2016.1155458

Baki, A., Kosa, T., & Guven, B. (2011). A comparative study of the effects of using dynamic geometry software and physical manipulatives on the spatial visualisation skills of pre-service mathematics teachers. *British Journal of Educational Technology, 42(2), 291–310.* https://10.1111/j.1467-8535.2009.01012.x

Ball, D. L., & Bass, H. (2000). Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: Knowing and using mathematics. In J. Boaler (Ed.), *Multiple Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 83-104). Ablex Publishing.

Barab, S., & Squire, K. (2004). Design-based research: Putting a stake in the ground. *The Journal of the Learning Sciences*, *13*(1), 1-14. https://doi.org/10.1207/s15327809jls1301_1

Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In K. Frank & Jr. Lester (Eds), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 843-908). NCTM.

Bauersfeld, H., Krummheuer, G., & Voigt, J. (1988). Interactional theory of learning and teaching mathematics and related microethnographical studies. *Foundations and Methodology of the Discipline of Mathematics Education*, 174-188.

Ben-Chaim, D., Lappan, G. & Houang, R. T. (1985). Visualizing rectangular solids made of small cubes: Analyzing and affecting students' performance. *Educational Studies in Mathematics, 16*(4), 389-409. https://doi.org/10.1007/BF00417194

Boaler, J. (2016). Designing mathematics classes to promote equity and engagement. *Journal of Mathematical Behavior*, (41), 172-178. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.01.002

Bowers, J., Cobb, P., & McClain, K. (1999). The evolution of mathematical practices: A case study. *Cognition and Instruction*, *17*(1), 25-66. https://doi.org/10.1207/s1532690xci1701_2

Clark-Wilson, A., & Hoyles, C. (2017). *Dynamic digital technologies for dynamic mathematics: Implications for teachers' knowledge and practice: Final report*. UCL Institute of Education Press. https://discovery.ucl.ac.uk/id/eprint/1572337

Cobb, P. (2000). Conducting classroom teaching experiments in collaboration with teachers. In A. Kelly & R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 307–334). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Cobb, P. (2003). Investigating students' reasoning about linear measurement as a paradigm case of design research. In M. Stephan, J. Bowers, P. Cobb, & K. Gravemeijer (Ed.), *Supporting students' development of measuring conceptions: Analyzing students' learning in social context* (pp. 1-16). NCTM.

Cobb, P., & Yackel, E. (1996). Constructivist, emergent, and sociocultural perspectives in the context of developmental research. *Educational Psychologist*, *31*(3-4), 175-190. https://doi.org/10.1080/00461520.1996.9653265

Cobb, P., Boufi, A., McClain, K., & Whitenack, J. (1997a). Reflective discourse and collective reflection. *Journal for Research in Mathematics Education,* 258-277. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.28.3.0258

Cobb, P., Gravemeijer, K., Yackel, E., McClain, K. & Whitenack, J. (1997b). Mathematizing and symbolizing: The emergence of chains of signification in one first-grade classroom. In D. Kirshner & J. A. Whitson (Ed.), *Situated cognition theory: Social semiotic, and psychological perspectives* (pp. 151–233). Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Cobb, P., Stephan, M., McClain, K. & Gravemeijer, K. (2011). Participating in classroom mathematical practices. In Sfard, A., Yackel, E., Gravemeijer, K., & Cobb, P. (Eds.), *Journey in mathematics education research* (pp. 117– 782163). Netherlands: Springer.

Cobb, P., Yackel, E., & Wood, T. (1992). A constructivist alternative to the representational view of mind in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education,* 2-33. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.23.1.0002

Conner, A., Singletary, L. M., Smith, R. C., Wagner, P. A., & Francisco, R. T. (2014). Teacher support for collective argumentation: A framework for examining how teachers support students' engagement in mathematical activities. *Educational Studies in Mathematics*, *86*(3), 401-429. https://doi.org/10.1007/s10649-014-9532-8

Cramer, J. (2011). Everyday argumentation and knowledge construction in mathematical tasks. In *Proceedings of the 7th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. Rzeszów, Poland: University of Rzeszów.* http://lettredelapreuve.org/pdf/CERME7/CERME7_WG1_Cramer.pdf

Dogruer, S.S., & Akyuz, D. (2020). Mathematical Practices of Eighth Graders about 3D Shapes in an Argumentation, Technology, and Design-Based Classroom Environment. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *18***,** 1485–1505 https://doi.org/10.1007/s10763-019-10028-x

Driver, R., Newton, P., & Osborne, J. (2000). Establishing the norms of scientific argumentation in classrooms. *Science Education*, *84*(3), 287-312. https://doi.org/10.1002/(SICI)1098-237X(200005)84:3<287::AID-SCE1>3.0.CO;2-A

Duschl, R. & Osborne, J. (2002). Supporting argumentation discourse in science education. *Studies in Science Education*, 38, 39-72. https://doi.org/10.1080/03057260208560187

Flores, A., Park, J., & Bernhardt, S. A. (2016). Learning mathematics and technology through inquiry, cooperation, and communication: a learning trajectory for future. In Niess, M. (Ed.), *Handbook of Research on Transforming Mathematics Teacher Education in the Digital Age* (pp. 324-354). IGI Global.

Forman, E. A., Larreamendy-Joerns, J., Stein, M. K., & Brown, C. A. (1998). "You're going to want to find out which and prove it": Collective argumentation in a mathematics classroom. *Learning and Instruction*, *8*(6), 527-548. https://doi.org/10.1016/S0959-4752(98)00033-4

Fraenkel, J. R., Wallen, N. E. & Hyun, H. (2012). *How to design and evaluate research in education*. McGraw-Hill.

Fujita, T., Kondo, Y., Kumakura, H., & Kunimune, S. (2017). Students' geometric thinking with cube representations: Assessment framework and empirical evidence. *The Journal of Mathematical Behavior*, *46*, 96-111. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.03.003

Fukawa-Connelly, T., & Silverman, J. (2015). The Development of Mathematical Argumentation in an Unmoderated, Asynchronous Multi-User Dynamic Geometry Environment. *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education, 15*(4), 445-488. https://www.learntechlib.org/primary/p/150824/

Fuys, D., Geddes, D., & Tischler, R. (1988). The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph*, *3*, i-196. https://doi.org/10.2307/749957

Ganesh, B., Wilhelm, J., & Sherrod, S. (2009). Development of a geometric spatial visualization tool. *School Science and Mathematics*, *109*(8), 461-472. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2009.tb18293.x

Giannakoulias, E., Mastorides, E., Potari, D., & Zachariades, T. (2010). Studying teachers' mathematical argumentation in the context of refuting students' invalid claims. *The Journal of Mathematical Behavior, 29*(3), 160-168. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2010.07.001

Graveimeijer, K. & Cobb, P. (2013). Design research from a learning design perspective. In Van den Akker, J., Gravemeijer, K., McKenney, S., & Nieveen, N. (Ed.), *Educational Design Research* (pp. 73-112). Routledge.

Gravemeijer, K., & van Eerde, D. (2009). Design research as a means for building a knowledge base for teachers and teaching in mathematics education. *The Elementary School Journal*, *109*(5), 510-524. https://doi.org/10.1086/596999

Güçler, B., Hegedus, S., Robidoux, R., & Jackiw, N. (2013). Investigating the mathematical discourse of young learners involved in multi-modal mathematical investigations: the case of haptic technologies. In D. Martinovic, V. Freiman, & Z. Karadag (Eds.), V*isual mathematics and cyberlearning* (pp. 97–118). Berlin: Springer.

Güven, B., & Kosa, T. (2008). The effect of dynamic geometry software on student mathematics teachers' spatial visualization skills. *The Turkish Online Journal of Educational Technology*, *7*(4), 100-107. https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1102930.pdf

Hannafin, R. D., Truxaw, M. P., Vermillion, J. R., & Liu, Y. (2008). Effects of spatial ability and instructional program on geometry achievement. *The Journal of Educational Research*, *101*(3), 148-157. https://doi.org/10.3200/JOER.101.3.148-157

Hollebrands, K. F., Conner, A., & Smith, R. C. (2010). The nature of arguments provided by college geometry students with access to technology while solving problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 324-350. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.41.4.0324

Johnson, K. L. (2021). Mathematics Education: Good, Bad, & Ugly. *Theses, Student Research, and Creative Activity: Department of Teaching, Learning and Teacher Education*, *128*. https://digitalcommons.unl.edu/teachlearnstudent/128

Jonassen, D., & Kim, B. (2010). Arguing to learn and learning to argue: Design justifications and guidelines. *Educational Technology Research and Development*, *58*, 439-457. https://doi.org/10.1007/s11423-009-9143-8

Kesan, C., & Caliskan, S. (2013). The effect of learning geometry topics of 7th grade in primary education with dynamic geometer's sketchpad geometry software to success and retention. *Turkish Online Journal of Educational Technology-TOJET*, *12*(1), 131-138. https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1008875.pdf

Kosko, K. W., Rougee, A., & Herbst, P. (2014). What actions do teachers envision when asked to facilitate mathematical argumentation in the classroom? *Mathematics Education Research Journal*, *26*(3), 459-476. https://doi.org/10.1007/s13394-013-0116-1

Krummheuer, G. (2015). Methods for reconstructing processes of argumentation and participation in primary mathematics classroom interaction. In A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping, & N. Presmeg (Ed.), *Approaches to qualitative research in mathematics education: Examples of methodology and methods* (pp. 51–74). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6_3

Latsi, M., & Kynigos, C. (2012). Experiencing 3D simulated space through different perspectives. In A. Jimoyiannis (Ed.), *Research on e-Learning and ICT in Education: Technological, Pedagogical and Instructional Issues* (pp. 183–196). Berlin: Springer.

Marchis, I. (2012). Preservıce primary school teachers' elementary geometry knowledge. *Acta Didactica Napocensia*, *5*(2), 33. https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1054293.pdf

Milli Eğitim Bakanlığı (2018). *Matematik Dersi Öğretim Programı*. MEB.

McClintock, E., Jiang, Z., & July, R. (2002). Students' development of three-dimensional visualization in the geometer's sketchpad environment. In *Proceedings of the Annual Meeting [of the] North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (24th, Athens, GA, October 26-29, 2002). Volumes 1-4.

Mueller, M. F. (2009). The co-construction of arguments by middle-school students. *The Journal of Mathematical Behavior*, *28*(2-3), 138-149. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2009.06.003

Mueller, M., Yankelewitz, D., & Maher, C. (2014). Teachers promoting student mathematical reasoning. *Investigations in Mathematics Learning*, *7*(2), 1-20. https://doi.org/10.1080/24727466.2014.11790339

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. NCTM.

Ng, O., & Sinclair, N. (2015). "Area without numbers": using touchscreen dynamic geometry to reason about shape. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 15*(1), 84–101. https://doi.org/10.1080/14926156.2014.993048

Nursyahidah, F., & Albab, I. U. (2021). Learning Design on Surface Area and Volume of Cylinder Using Indonesian Ethno-mathematics of Traditional Cookie maker Assisted by GeoGebra. *Mathematıcs Teachıng Research Journal, 13*(4), 79-98.

Osborne, J., Erduran, S., & Simon, S. (2004). Enhancing the quality of argumentation in school science. *Journal of Research in Science Teaching, 41*(10), 994-1020. https://doi.org/10.1002/tea.20035

Owens K., Highfield K. (2015) Visuospatial Reasoning in Contexts with Digital Technology. In *Visuospatial Reasoning. Mathematics Education Library*, vol 111. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-02463-9_9

Pei, Weintrop & Wilensky (2018). Cultivating computational thinking practices and mathematical habits of mind in lattice land, *Mathematical Thinking and Learning, 20*(1), 75-89. https://10.1080/10986065.2018.1403543

Pittalis, M., & Constantinou, C. (2010). Types of reasoning in 3D geometry thinking and their relation with spatial ability. *Educational Studies in Mathematics, 75*, 191–212. https://doi.org/10.1007/s10649-010-9251-8

Pittalis, M., Christou, C., & Pitta-Pantazi, D. (2012). Enhancing prospective teachers' technological pedagogical content knowledge in 3D shapes' nets. *Conference Proceedings of the 4th International Conference on Education and New Learning Technologies*, Barcelona, Spain.

Plomp, T. (2013). Educational design research: An introduction. In J. Van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney, & N. Nieveen, (Eds.) *Educational Design Research* (pp. 11-50). Routledge.

Prusak, N., Hershkowitz, R., & Schwarz, B. B. (2012). From visual reasoning to logical necessity through argumentative design. *Educational Studies in Mathematics*, *79*(1), 19-40. https://10.1007/s 10649-0 11 -9335-0

Rasmussen, C., & Stephan, M. (2008). A Methodology for Documenting Collective Activity. In A. E. Kelly, R. A. Lesh, & J. Y. Baek, (Eds), *Handbook of Design Research Methods in Education: Innovations in Science, Technology, Engineering, and Mathematics Learning and Teaching* (pp. 195-215). Routledge.

Sadler, T. D., & Fowler, S. R. (2006). A threshold model of content knowledge transfer for socioscientific argumentation. *Science Education*, *90*(6), 986-1004. https://doi.org/10.1002/sce.20165

Sinclair, N., & Moss, J. (2012). The more it changes, the more it becomes the same: The development of the routine of shape identification in dynamic geometry environment. *International Journal of Educational Research*, *51*, 28-44. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2011.12.009

Solar, H., Ortiz, A., Deulofeu, J., & Ulloa, R. (2021). Teacher support for argumentation and the incorporation of contingencies in mathematics classrooms. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *52*(7), 977-1005. https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1733686

Sriraman B., & Umland, K. (2020). Argumentation in Mathematics Education. In: Lerman S. (Ed) *Encyclopedia of Mathematics Education.* Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_11

Stephan, M. (2015). *Surface area.* https://cstem.uncc.edu/sites/cstem.uncc.edu/files/media/files/stephan_surface_area.pdf

Stephan, M., & Rasmussen, C. (2002). Classroom mathematical practices in differential equations. *The Journal of Mathematical Behavior*, *21*(4), 459-490. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(02)00145-1

Stephan, M., Bowers, J., Cobb, P., & Gravemeijer, K. (Eds.) (2003). *Supporting students' development of measuring conceptions: analyzing students' learning in social context*. Journal for Research in Mathematics Education. Monograph, Vol. 12. NCTM. http://www.jstor.org/stable/i30037716

Weinhandl, R., Lavicza, Z., Hohenwarter, M. & Schallert, S. (2020). Enhancing flipped mathematics education by utilising GeoGebra. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology (IJEMST),* *8*(1), 1-15. https://doi.org/10.46328/ijemst.v8i1.832

Wheeldon, D. A. (2008). *Developing mathematical practices in a social context: An instructional sequence to support prospective elementary teachers' learning of fractions.* [Unpublished doctoral dissertation]. University of Central Florida, Orlando.

Wood, T., Williams, G., & McNeal, B. (2006). Children's mathematical thinking in different classroom cultures. *Journal for Research in Mathematics Education*, 222-255. https://doi.org/10.2307/30035059

Yackel, E. (2002). What we can learn from analyzing the teacher's role in collective argumentation. *The Journal of Mathematical Behavior*, *21*(4), 423-440. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(02)00143-8

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 458-477. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.27.4.0458

Zembaul-Saul, C. (2005, April). *Pre-service teachers' understanding of teaching elementary school science argument* [Paper presentation]. Annual Meeting of the National Association for Research in Science Teaching, Dallas.

Extended Summary

Introduction

Geometrical thinking examines various aspects of geometric shapes in two- or three-dimensional space. Working in coordination, teachers (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000) and students evaluate the relationships between geometric shapes and structures (Kesan & Caliskan, 2013). Baki et al. (2011) state that students should learn geometry by understanding and explaining the physical world using appropriate problem-solving strategies. Our physical world cannot be explained solely by two-dimensional Euclidean geometry, since much of what we use, see, and produce has a three-dimensional geometric shape (Güven & Kosa, 2008). Many national documents (NCTM, 2000) state that students should have the opportunity to work with three-dimensional shapes through visualization to improve their spatial skills, which are important for their daily lives and future careers. In this context, Yackel and Cobb (1996) argue that mathematics involves collaborative work by participating in both individual work and whole class discussions where students explain and demonstrate their work to a wider group. Therefore, it is appropriate to adapt argumentation to geometry classes.

Classroom mathematical practices occur when debating specific mathematical ideas and are a way of sharing, arguing, and reasoning about them (Cobb et al., 2011). Accordingly, the emergence of mathematical practices is closely related to the social interaction among class members. By creating a socially active classroom environment, teachers can motivate students to become more willing to be involved in the process of mathematics teaching and learning (Cobb & Yackel, 1996).

A variety of technological tools can be used in geometry classes, including word processors and spreadsheets. However, dynamic geometry software (DGS) is a more effective tool for creating more student-centered learning environments (Hannafin et al., 2008). In geometry instruction, students can create geometrical drawings using DGS or perform interactive research on dynamic geometric shapes prepared by the teacher (MEB, 2018); thus, students' geometry learning can be supported by mediating their activities in DGS environments (Alqahtania & Powell, 2017).

Method

The aim of this study was to determine the mathematical ideas developed by eighth grade students in the context of the basic elements and volume of the cylinder and to test the effectiveness of that content. In this context, an instructional sequence with the guidance of a hypothetical learning trajectory was used. The instructional sequence was processed over two weeks with the support of argumentation and the GeoGebra (a DGS tool). The research was conducted as a design-based study in a natural classroom setting to involve participants in a learning community (Cobb, 2000).

The study was carried out in a public school in Ankara in a class with 16 female and 19 male students. Three types of data were collected: (a) class-based data, including videotapes of all courses; (b) detailed field notes from the learning environment; and (c) students' written work.

In order to document and analyze the class discussion, Krummheuer's (2015) discussion model was used. It consists of three main elements: the claim, the data (or grounds), and the warrant. The *claim* is the result of the discussion. The *data* is the information presented to defend the claim, and the *warrant* is used to describe the data presented. It also shows the relationship between data and claims (Akyüz, 2016). Rasmussen and Stephan (2008) developed a three-phase method for documenting mathematical ideas to analyze classroom argumentation.

Findings and Discussion

Classroom argumentation, DGS, and daily-life examples supported the instructional activities. The analysis of the data collected from the study yielded four mathematical ideas; (a) the volume is related to the third dimension; (b) the volume is used to fill the solid; (c) the volume calculation includes height, width, and length; (d) the volume can be obtained by multiplying the base area by the height.

In-class discussions improve students' conceptual knowledge and understanding of the cylinder topic (Gucler et al., 2013). By joining discussions during the teaching process, they identified missing points and made inferences by interpreting or rejecting other ideas with the support of the teacher. Supporting the teaching process through discussions that involved the entire class helped students understand the cylinder as a topic. Research has found that geometric concepts can be learned by argumentation (Kosko et al., 2014; Prusak et al., 2012); these discussions can be developed to enhance skills like supporting, justification, and proofing (Asterhan & Schwarz, 2007; Sadler & Fowler, 2006).

The use of GeoGebra encouraged students to conceptually understand three-dimensional shapes and gave them the opportunity to look at the different views. Thus, the use of DGS improves students' geometric thinking and supports the emergence of mathematical ideas (Pei et al., 2018). Consistent with the literature, the use of DGS has made learning geometry much richer and stronger than the paper-and-pencil method (Battista, 2007) and given students the opportunity to explain and justify their thinking to support mathematical ideas (Clark-Wilson & Hoyles, 2017). These advantages have positively influenced students' geometric and spatial ideas and thus increased their success (Owens & Highfield, 2015).

In the present study, students conceptually understood the basic elements and volume of the cylinder by sharing, proving, interpreting, and/or rejecting the ideas of others (Latsi & Kynigos, 2012). Given the positive effects of students' discussions demonstrated here, they can be used by teachers when designing lesson plans for geometry courses. The role of the teacher is critical in underlining important points, in managing the flow of discussion to identify misconceptions or student errors, and in changing the discussion's direction as appropriate. The teacher is also responsible for ensuring that students understand and learn the relevant context, which makes the knowledge and role of the teacher as an administrator important (Yackel, 2002).