

Sağdan Kesilmiş Lomax Dağılımının İstatistiksel Özellikleri ve Bir Uygulama

Ceren Ünal¹, Gamze Özel²,

^{*1,2} Hacettepe Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik, ANKARA

(Alınış / Received: 29.05.2022, Kabul / Accepted: 20.07.2022, Online Yayınlanma / Published Online: 23.08.2022)

Anahtar Kelimeler
Lomax Dağılımı,
Kesilmiş Dağılım,
Parametre Tahmini.

Öz: Bu çalışmada yeni bir dağılım olan kesilmiş Lomax dağılımı tanıtılmıştır. Dağılımın elde edilmesinde, Lomax dağılımı kullanılmıştır. Elde edilen dağılımın temel istatistiksel özellikleri açıklanmış ve olasılık yoğunluk fonksiyonu, birikimli dağılım fonksiyonu, hazard fonksiyonu, yaşam fonksiyonu ve kantil fonksiyonu verilmiştir. Ayrıca momentlerine ulaşılmış, çarpıklık ve basıklık katsayıları elde edilmiştir. En çok olabilirlik tahmin yöntemi ile dağılımın parametre tahmini bulunmuştur. Daha sonra bir uygulama çalışması ile kesilmiş Lomax dağılımının literatürde var olan dağılımlardan ilgilenilen veri kümesine daha iyi uyum gösterdiği sonucuna ulaşılmıştır.

Statistical Properties of Right-Truncated Lomax Distribution and an Application

Keywords
Lomax Distribution,
Truncated Distribution,
Parameter Estimation.

Abstract: In this study, a new distribution, truncated Lomax distribution, is introduced. The Lomax distribution was used to obtain the distribution. The basic statistical properties of the obtained distribution are explained and probability density function, cumulative distribution function, hazard function, survival function, and quantile function are given. In addition, moments of skewness and kurtosis coefficients were obtained. The parameter estimation of the distribution was found using the maximum likelihood estimation method. Then, with an application study, it was concluded that the truncated Lomax distribution fits the data set of interest better than the distributions available in the literature.

*İlgili Yazar, email: cerenunal91@gmail.com

1. Giriş

Olasılık dağılımları zamana karşı arızalanma ya da bozulma modelleri biçiminde sistemler veya bileşenleri için yaygın olarak kullanılırlar [1, 2]. Sistemlerin yaşam süreleri, üretim için kullanılan madde, miktar ya da çevresel koşullarda meydana gelen değişim gibi birçok farklı nedenlere bağlıdır. Süre, rastgele değişken olarak alınarak sistem, alt sistem veya bir bileşeni için zamana karşı arızalanma yada bozulma için uygun bir olasılık modeli oluşturulur. Devamında, oluşturulan bu olasılık modelinde yer alan parametreler tahmin edilir ve risk (hazard) fonksiyonu, sağ kalım (survival) fonksiyonu gibi özellikler incelenir [3].

Gerçek yaşamda karşılaşılan birçok farklı karakteristiğe sahip veri setlerini tanımlamak ve hakkında tahminler yapmak için olasılık dağılımları kullanılmaktadır. Son yıllarda yapılan çalışmalardan yola çıkarak, iyi bilinen dağılımlara göre daha esnek olup bu dağılımların özelliklerini taşıyan, modelleme uygulamalarında çok yönlü olan, farklı yapıya sahip verileri modelleyebilecek yeni dağılımlara yönelme olduğu görülmektedir. Çalışmalarda yeni dağılımların tanımlanmasında temel dağılım, üretici dağılım ve bağ fonksiyonu yöntemleri kullanılmaktadır. Bu tanımlamada kullanılan ek parametre ya da parametreler, üretici olasılık dağılım ailesinin uyum iyiliğini iyileştirmek ve kuyruk özelliklerini temsil edebilmek için kullanılmaktadır. Aynı zamanda, dağılımın kesilmesi ile yeni bir dağılım elde edilmektedir [4].

Kesilmiş dağılımlar özellikle yaşam analizinde, yaşam süresinin farklı dağılımları için kesilmiş yaşam testine dayalı tek katlı kabul örnekleme planlarında kullanılmaktadır. Kesilmiş yaşam testi ile alakalı olarak ilk çalışma üstel dağılım için Epstein [5] tarafından yapılmıştır. İki parametrelili Pareto dağılımı Baklizi [6] tarafından; Birnbaum-Saunders dağılımı Balakrishnan, Leiva ve Lopez [7] tarafından; ters Rayleigh dağılımı Rosaiah ve Kantam [8] tarafından; log-logistic dağılımı Srinivasa-Rao ve Kantam [9] tarafından; ters Weibull dağılımı ise Singh ve Tripathi [10] tarafından önerilmiş olup kabul örnekleme planları incelenmiştir. Al-Omari [11] tarafından Sushila dağılımı varsayımı ile yaşam süresinin kesilmiş yaşam testine dayalı tek katlı kabul örnekleme planı üzerinde çalışması bulunmaktadır. Benzer olarak, Aslam, Kundu ve Ahmad [12] yine tek katlı kabul örnekleme planı için genelleştirilmiş üstel dağılım için yaşam süresinin medyanına ilişkin kesilmiş yaşam testine dayalı olarak minimum örneklem büyüklüğünü elde etmişler ve Aslam ve Jun [13] ise Gamma, Weibull ve genelleştirilmiş Rayleigh dağılımı için hem tüketici hem de üretici faydasını dikkate almışlardır. Gompertz dağılımı için ürünün ortalamasını Gui, ve Shangli Zhang [14]; ürünün ömrünün medyanı ve yüzdelerini ise Malathi ve Muthulakshmi [15] dikakte almıştır. Çakmakçıyan ve Özel [16, 17] çalışmalarında sırasıyla Lindley-Lomax ve Genelleştirilmiş Lindley-Weibull dağılımlarının özelliklerini incelemişlerdir.

Lomax dağılımı ilk kez Lomax [18] tarafından iş hatalarına ait verileri modellemek için tanımlanmıştır. Bu dağılım ayrıca Pareto 2. tip dağılımı olarak da bilinmektedir. Lomax dağılımı başta ekonomi ve aktüeryal modellemelerde olmak üzere birçok alanda kullanılmaktadır. Lomax dağılımından yola çıkarak çeşitli dağılımlar literatüre kazandırılmıştır. Ghitany vd. [19] Marshall-Olkin genişletilmiş Lomax; Lemonte and Cordeiro [20] McDonald Lomax; Khaleel vd. [21] Gompertz Lomax; Cordeiro vd. [22] Gamma-Lomax; Rady vd. [23] Power-Lomax; Hassan ve Nassr [24] Power-Lomax-Poisson; Hassan ve Abd-Allah [25] üstelleştirilmiş Weibull-Lomax ve Hassan vd. [26] Type II Yarı Lojistik Lomax dağılımlarını çeşitli uygulamalarla incelemişlerdir.

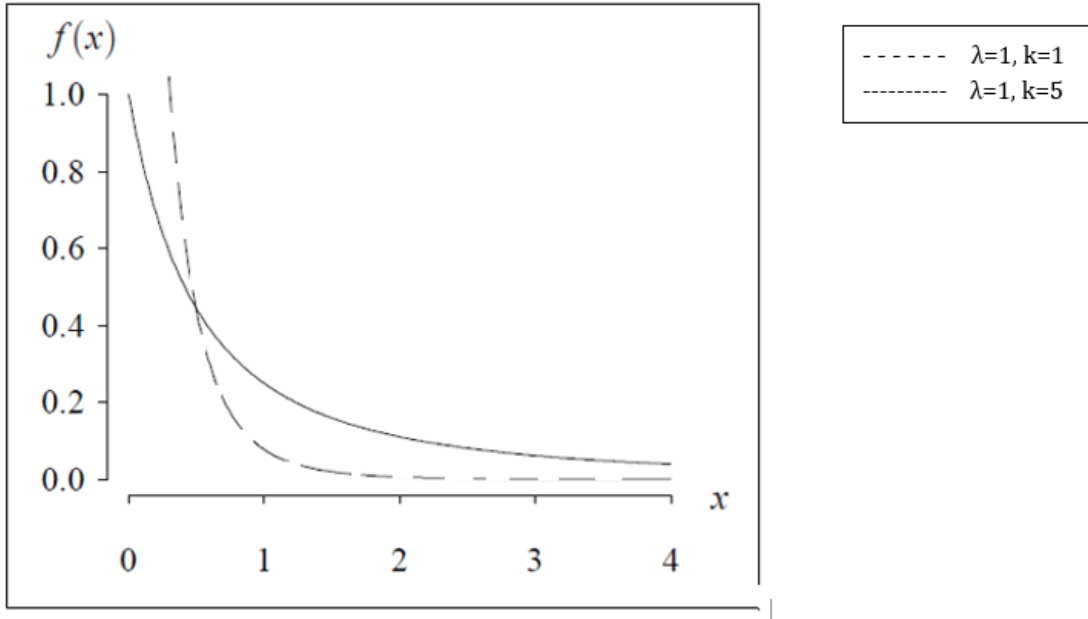
Lomax dağılımı biyoloji, aktüerya bilimi, ekonomi, kuyruk problemleri ve dayanıklılık ve ömür modellemesinde yaygın olarak kullanılır. Aynı zamanda, Lomax Dağılımından yararlanan çalışmalar arasında, kararlılık ve yaşam kontrolü alanındaki verileri firma ölçeği, gelir ve kaynaklar ve sunuculardaki makine dosyalarının boyut dağılımı modelleme yer almaktadır. Bu çalışmada Lomax dağılımının sağdan kesilmesi ile elde edilen yeni olasılık dağılımı üzerinde durulmuştur.

2. Sağdan Kesilmiş İki Parametrelili Lomax Dağılımı

X raslantı değişkeni λ konum parametresi, k şekil parametresi ile Lomax dağılımlı olsun. Buna göre olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \frac{\lambda k}{(1+\lambda x)^{k+1}}, \quad x > 0, k > 0, \lambda > 0, \quad (1)$$

biçimindedir. Olasılık yoğunluk fonksiyonunun farklı parametre değerlerine ait grafiği Şekil 1'de verilmiştir:



Şekil 1. Lomax dağılımı $\lambda=1, k=1$ ve $\lambda=1, k=5$ parametre değerlerine ait grafikleri

Şekil 1’de, olasılık yoğunluk fonksiyonunun farklı parametre değerleri için incelendiğinde özellikle şekil parametresinin değerini azaldığında azalışın daha ani olduğu görülmektedir. Grafikte yer alan her iki durum içinde ilk azalış daha sonra da yatay bir durum gözlenmiştir.

Lomax dağılımlı X raslantı değişkenin dağılım fonksiyonu ise

$$F(x) = P(X \leq x) = 1 - (1 + \lambda x)^{-k}, \quad x > 0, \quad (2)$$

biçiminde elde edilmektedir. Bu çalışmada Lomax dağılımının sağdan 1 noktasında kesilmiş yani, 0 ile 1 Aralığında kesilmiş hali araştırılmıştır. Bu dağılımın 0 ile 1 sınırları arasında kesilebilmesi için ilgili sınırlarda

$$f(t) = \frac{g(t)}{G(B)-G(A)}, \quad F(t) = \frac{G(t)-G(a)}{G(b)-G(a)}, \quad (3)$$

a, b>0 ve 0<t<1 olmak üzere biçiminde verilen formüllerden yararlanılmıştır. Buradan sağdan kesilmiş Lomax dağılımına ait olasılık yoğunluk fonksiyonu Eşitlik (4)’de ki gibi elde edilmektedir.

$$f(t) = \frac{g(t)}{G(1)-G(0)} = \frac{\lambda k / (1+\lambda t)^{k+1}}{[(1-(1+\lambda*1)^{-k}) - ((1-(1+\lambda*0)^{-k})]}. \quad (4)$$

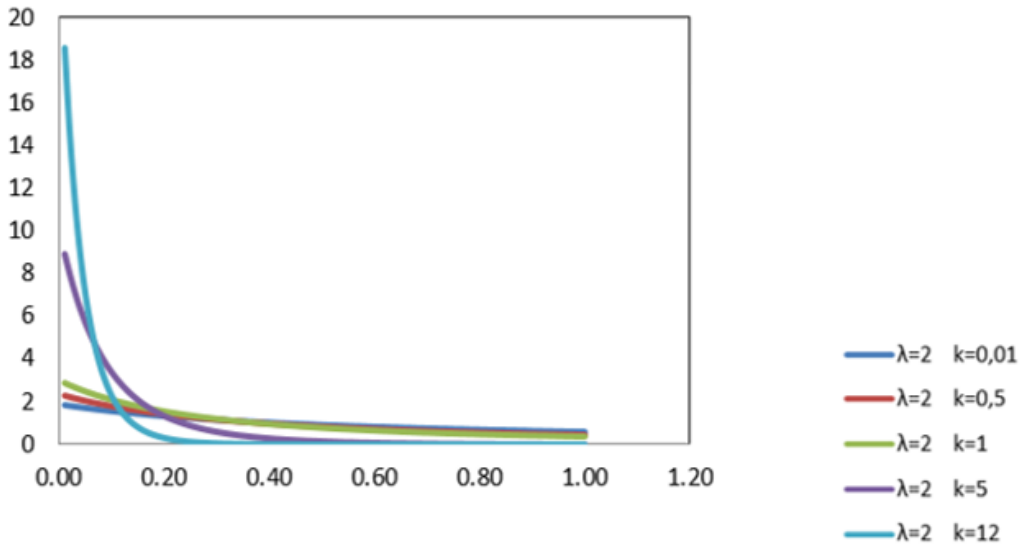
Buna göre, matematiksel düzenlemelerden sonra sağdan 1 noktasında kesilmiş Lomax dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu ve dağılım fonksiyonu sırasıyla,

$$f(t) = \frac{\lambda k}{(1+\lambda t)^{k+1} [1-(1+\lambda)^{-k}]}, \quad 0 < t < 1, k > 0, \lambda > 0, \quad (5)$$

$$F(t) = \frac{G(t)-G(0)}{G(1)-G(0)} = \frac{[1-(1+\lambda t)^{-k}]}{1-(1+\lambda)^{-k}}, \quad 0 < t < 1, \quad (6)$$

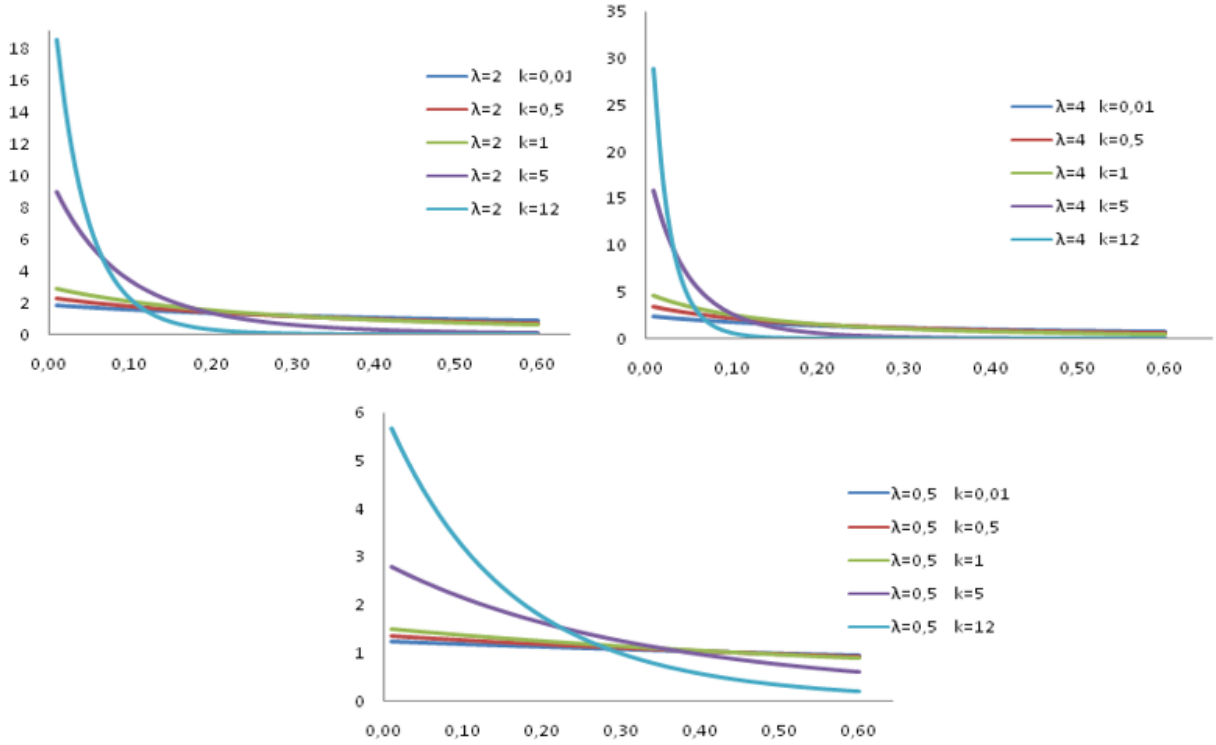
biçiminde elde edilmektedir.

X raslantı değişkeni için 0 ile 1 Aralığında 100 tane değer (0.01, 0.02, ..., 0.99, 1) verilerek olasılık yoğunluk fonksiyonu grafiği Şekil 2’de gösterilmiştir. Ancak grafikleri daha ayrıntılı inceleyebilmek için olasılık yoğunluk fonksiyonu veri seti 0,6 noktasından sonra kesilerek, 60 adet x değeri üzerinden grafikler çizilmiştir.



Şekil 2. $\lambda=2$, $k=0,01;0,5;1;5;12$ için $0 < t < 1$ Aralığında Lomax olasılık yoğunluk fonksiyonu

Farklı parametre değerleri için elde edilen olasılık yoğunluk fonksiyonu grafikleri Şekil 3’te verilmiştir. Şekil 3 incelendiğinde, dağılımın şekil parametresi k’nın küçük değerlerinde doğrusala yakınsayan dağılımlar elde edilirken, k büyüdükçe dağılımın şeklinin değiştiği görülmektedir.



Şekil 3. Farklı parametre değerleri için olasılık yoğunluk fonksiyonu grafikleri

3. Diğer İstatistiksel Özellikleri

Bu bölümde elde edilen yeni dağılıma olan sağdan kesilmiş Lomax dağılımına ait diğer özellikler incelenmiştir.

3.1. Yaşam fonksiyonu

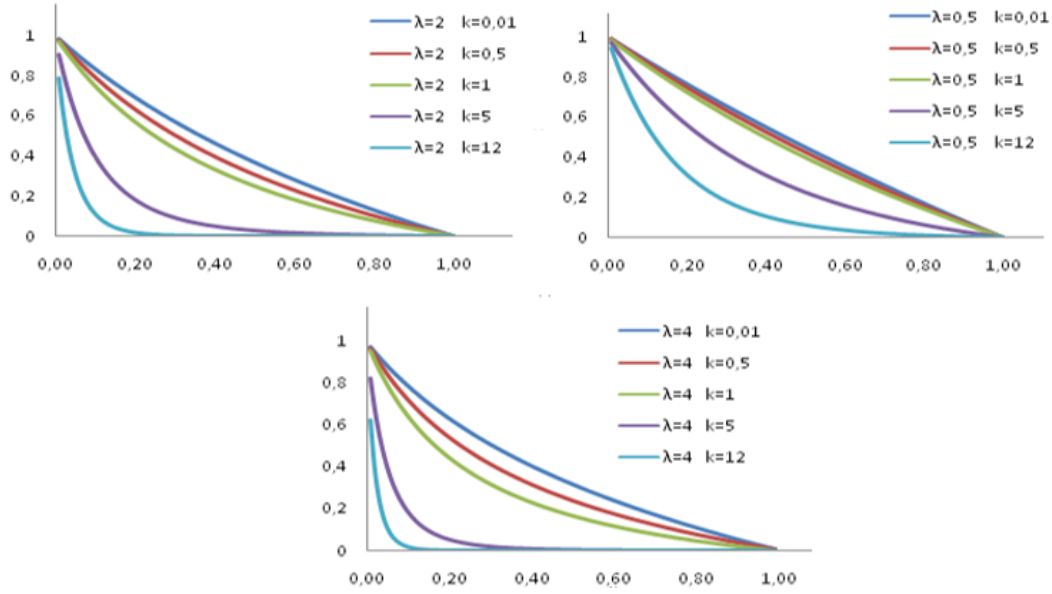
Yaşam sürelerinin olasılık dağılımını gösteren fonksiyonlara yaşam fonksiyonu denir ve dağılım fonksiyonu yardımıyla $S(x)=1-F(x)$ biçiminde hesaplanmaktadır. Buna göre, sağdan kesilmiş Lomax dağılımının yaşam fonksiyonu

$$S(X) = 1 - \frac{[1 - (1+\lambda x)^{-k}]}{1 - (1+\lambda)^{-k}} = 1 - \frac{[1 - (1+\lambda x)^{-k}](1+\lambda)^k}{(1+\lambda)^k - 1} = \frac{[(1+\lambda)^k - 1] - [1 - (1+\lambda x)^{-k}](1+\lambda)^k}{(1+\lambda)^k - 1}. \quad (7)$$

biçimindedir. Eşitlik (7)'de yer alan eşitlikte matematiksel düzenlemeler yapıldıktan sonra sağdan kesilmiş Lomax dağılımlı X raslantı değişkenine yaşam fonksiyonu Eşitlik (8)'de ki gibi elde edilmektedir.

$$S(x) = \frac{(1+\lambda)^k(1+\lambda x)^{-k} - 1}{(1+\lambda)^k - 1}, \quad 0 < x < 1. \quad (8)$$

0 ile 1 Aralığında kesilmiş Lomax dağılımında çeşitli parametre değerleri için yaşam fonksiyonu grafikleri Şekil 4'de verilmektedir.



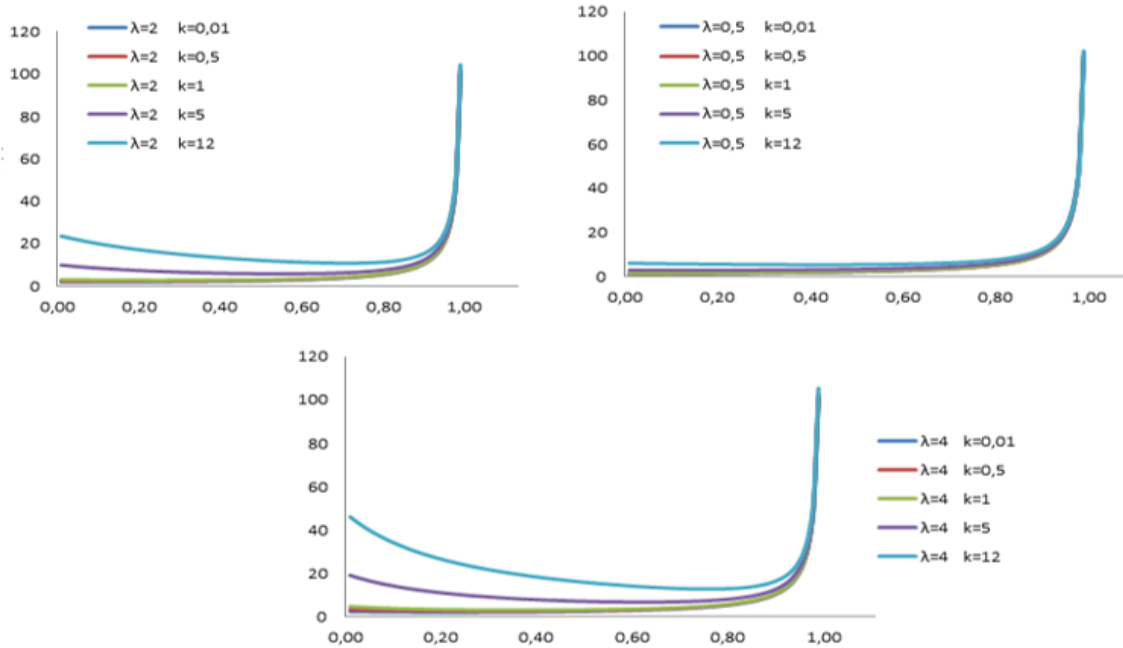
Şekil 4. Çeşitli parametre değerleri için sağdan kesilmiş Lomax dağılımına ait yaşam fonksiyonu grafikleri

3.2. Hazard fonksiyonu

Belirli bir zamandaki ölüm olasılığı veya taşınan ölüm riski, hazard fonksiyonu olarak ifade edilmektedir. Hazard (Tehlike) fonksiyonu,

$$H(x) = \frac{f(x)}{1-F(x)} = \frac{\lambda k((1+\lambda)^k - 1)}{(1+\lambda x)^{k+1} [1 - (1+\lambda)^{-k}] [(1+\lambda)^k (1+\lambda x)^{-k} - 1]}, \quad 0 < x < 1. \quad (9)$$

şeklinde elde edilmektedir. 0 ile 1 Aralığında kesilmiş Lomax dağılımında çeşitli parametre değerleri için hazard fonksiyonu grafikleri Şekil 5'de verilmiştir. Buna göre, kesilmiş Lomax dağılımının hazard fonksiyonunun parametrelere göre artan veya λ 'nın büyük değerleri için önce azalan sonra artan yapısının olduğu görülmektedir.



Şekil 5. Çeşitli parametre değerleri için hazard fonksiyonu grafikleri

3.3. Kantil fonksiyonu

Kantil fonksiyonu, $\theta(p) = F^{-1}(p)$ işlemi yapıp bulunan eşitlikten x çekilmesi ile

$$\theta(p) = \frac{[1-p(1-(1+\lambda)^{-k})]^{1/k}-1}{\lambda}, \quad (10)$$

$0 < p < 1$ olmak üzere, Eşitlik (10)'da ki gibi elde edilir.

Kantil fonksiyonunda $p=0,5$ yazılması ile medyan değeri bulunmaktadır. Çeşitli parametre değerleri için medyan sonuçları Tablo 1'de verilmektedir.

Tablo 1. Sağdan kesilmiş Lomax dağılımına ait farklı parametre değerleri için medyan değerleri

λ	k	Medyan
2	0,01	-3,5632E+195
	0,5	-1,400
	1	-0,375
	5	-0,250
	12	-0,250
0,5	0,01	-1,9619E+239
	0,5	-29,697
	1	-3,000
	5	-1,029
	12	-1,001
4	0,01	-6,0049E+178
	0,5	-0,409
	1	-0,156
	5	-0,125
	12	-0,125

Tablo 1'e göre, çeşitli λ (0,5, 2, 4) değeri için k (0,01, 0,5, 1, 5, 12) parametre değeri arttıkça önerilen sağdan kesilmiş Lomax dağılımına ait medyan değerlerinin büyüdüğü gözlenmektedir.

3.4. Basıklık ve çarpıklık katsayıları

Kantil fonksiyonundan yararlanarak hesaplanan basıklık katsayısı (BK) ve çarpıklık katsayısı (ÇK) formülü sırasıyla,

$$BK = -\frac{\theta(\frac{3}{4})-2\theta(\frac{1}{2})+\theta(\frac{1}{4})}{\theta(\frac{3}{4})-\theta(\frac{1}{4})},$$

ve

$$\text{ÇK} = -\frac{\theta(\frac{7}{8})-\theta(\frac{5}{8})-\theta(\frac{3}{8})+\theta(\frac{1}{8})}{\theta(\frac{6}{8})-\theta(\frac{2}{8})},$$

biçimindedirler.

Çeşitli parametre değerleri için hesaplanan basıklık katsayıları Tablo 2'de verilmiştir. Formülden yararlanarak, farklı parametre değerleri için hesaplanan çarpıklık katsayıları ise Tablo 3'te verilmiştir.

Tablo 2. Sağdan kesilmiş Lomax dağılımına ait farklı parametre değerleri için basıklık katsayısı değerleri

λ	k	Q(3/4)	Q(1/2)	Q(1/4)	Basıklık
2	0,01	-5,3448E+195	-3,56E+195	-1,7816E+195	0,00
	0,5	-2,0993	-1,3995	-0,6998	0,00
	1	-0,5625	-0,3750	-0,1875	0,00
	5	-0,3753	-0,2502	-0,1251	0,00
	12	-0,3750	-0,2500	-0,1250	0,00
0,5	0,01	-2,9428E+239	-1,96E+239	-9,8093E+238	0,00
	0,5	-44,5454	-29,6969	-14,8485	0,00
	1	-4,5000	-3,0000	-1,5000	0,00
	5	-1,5430	-1,0286	-0,5143	0,00
	12	-1,5010	-1,0006	-0,5003	0,00
4	0,01	-9,0073E+178	-6E+178	-3,0024E+178	0,00
	0,5	-0,6136	-0,4091	-0,2045	0,00
	1	-0,2344	-0,1563	-0,0781	0,00
	5	-1,5430	-1,0286	-0,0625	0,3052
	12	-0,1875	-0,125	-0,0625	0,00

Tablo 3. Sağdan kesilmiş Lomax dağılımına ait farklı parametre değerleri için çarpıklık katsayısı değerleri

λ	k	Q(1/8)	Q(2/8)	Q(3/8)	Q(5/8)	Q(6/8)	Q(7/8)	Çarpıklık
2	0,01	-8,908E+194	-1,782E+195	-2,67E+195	-4,45E+195	-5E+195	-6E+195	0,00
	0,5	-0,3499	-0,6998	-1,0496	-1,7494	-2,0993	-2,4492	0,00
	1	-0,0938	-0,1875	-0,2813	-0,4688	-0,5625	-0,6563	0,00
	5	-0,0626	-0,1251	-0,18765	-0,3128	-0,3753	-0,4379	0,00
	12	-0,0625	-0,1250	-0,1875	-0,3125	-0,3750	-0,4375	0,00
0,5	0,01	-4,9E+238	-9,809E+238	-1,47E+239	-2,45E+239	-3E+239	-3E+239	0,00
	0,5	-7,4242	-14,8485	-22,2727	-37,1212	-44,5450	-51,9696	0,00
	1	-0,7500	-1,5000	-2,2500	-3,7500	-4,5000	-5,2500	0,00
	5	-0,2572	-0,5143	-0,7715	-1,2858	-1,5430	-1,8001	0,00
	12	-0,2502	-0,5003	-0,7505	-1,2508	-1,5010	-1,7511	0,00
4	0,01	-1,5E+178	-3,002E+178	-4,5E+178	-7,51E+178	-9E+178	-1E+179	0,00
	0,5	-0,1023	-0,2045	-0,3068	-0,5113	-0,6136	-0,7159	0,00
	1	-0,0391	-0,0781	-0,1172	-0,1953	-0,2344	-0,2734	0,00
	5	-0,0313	-0,0625	-0,0938	-0,1563	-1,5430	-0,2188	0,00
	12	-0,0313	-0,0625	-0,0938	-0,1563	-0,1875	-0,2188	0,00

Normal dağılım için basıklık katsayısı 3 değerine eşittir. Buna göre, normal dağılıma göre karşılaştırsak, basıklık katsayısı 3'den küçük ise dağılım basık, 3'den büyük ise sivri bir dağılım söz konusudur. Elde edilen basıklık katsayısı sonuçlarına göre, dağılımın basık olduğu söylenebilir. Çarpıklık katsayısı sıfıra eşit ise dağılım simetrik, sıfırdan büyük ise sağa çarpık ve sıfırdan küçük ise sola çarpık bir dağılım söz konusudur. Tablo 3'e göre, çeşitli parametreler için çarpıklık katsayısı değeri 0 olarak elde edilmiştir, simetrik olduğu söylenebilir.

3.5. Momentler

Dağılım hakkında bilgi elde etmek için momentler kullanılan önemli bir değerlerdendir. Varyansın, çarpıklık ve basıklık katsayılarının hesaplanmasında dağılımın momentleri kullanılmaktadır. Sağdan kesilmiş Lomax dağılımı için beklenen değer ve diğer merkezsiz momentleri aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

$$E(X) = \frac{\lambda k}{[1-(1+\lambda)^{-k}]} \int_0^1 x \frac{1}{(1+\lambda x)^{k+1}} dx.$$

Burada, $1 + \lambda x = u$ ve $\lambda dx = du$ dönüşümleri yapılırsa, beklenen değer aşağıdaki Eşitlik (11)'deki gibi bulunur:

$$E(X) = \frac{k}{[1-(1+\lambda)^{-k}]} \frac{1}{\lambda} \left[\frac{(1+\lambda)^{-k+1} - 1}{-k+1} - \frac{(1+\lambda)^{-k} - 1}{-k} \right]. \quad (11)$$

İkinci merkezsiz olmayan moment ise benzer olarak aşağıdaki gibi elde edilir:

$$E(X^2) = \frac{\lambda k}{[1-(1+\lambda)^{-k}]} \int_0^1 x^2 \frac{1}{(1+\lambda x)^{k+1}} dx.$$

Benzer şekilde, $1 + \lambda x = u$ ve $\lambda dx = du$ dönüşümleri yapılırsa, ikinci merkezsiz olmayan moment Eşitlik (12)'deki gibi elde edilir:

$$E(X^2) = \frac{k}{[1-(1+\lambda)^{-k}]} \frac{1}{\lambda^2} \left[\frac{(1+\lambda)^{-k+2} - 1}{-k+2} - 2 \frac{(1+\lambda)^{-k+1} - 1}{-k+1} + \frac{(1+\lambda)^{-k} - 1}{-k} \right] \quad (12)$$

Üçüncü merkezsiz olmayan moment ise, aşağıdaki gibi bulunur:

$$E(X^3) = \int_0^1 x^3 \frac{\lambda k}{[1-(1+\lambda)^{-k}]} \int_0^1 x^3 \frac{1}{(1+\lambda x)^{k+1}} dx.$$

Burada da, $1 + \lambda x = u$ ve $\lambda dx = du$ dönüşümleri yapılırsa, üçüncü merkezsiz olmayan moment aşağıdaki biçimde yazılabilir:

$$E(X^3) = \frac{\lambda k}{[1-(1+\lambda)^{-k}]} \frac{1}{\lambda^4} \int \frac{(u-1)^3}{u^{k+1}}. \quad (13)$$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ Açılımından yararlanarak gerekli işlemler yapıldığında üçüncü merkezsiz olmayan moment Eşitlik (14)'deki gibi elde edilmektedir.

$$E(X^3) = \frac{k}{[1-(1+\lambda)^{-k}]} \frac{1}{\lambda^3} \left[\frac{(1+\lambda)^{-k+3} - 1}{-k+3} - 3 \frac{(1+\lambda)^{-k+2} - 1}{-k+2} + 3 \frac{(1+\lambda)^{-k+1} - 1}{-k+1} - \frac{(1+\lambda)^{-k} - 1}{-k} \right]. \quad (14)$$

Dördüncü merkezsiz olmayan moment ise

$$E(X^4) = \int_0^1 x^4 \frac{\lambda k}{[1-(1+\lambda)^{-k}]} \int_0^1 x^4 \frac{1}{(1+\lambda x)^{k+1}} dx,$$

biçiminde elde edilmektedir. Burada, $1 + \lambda x = u$, $\lambda dx = du$ dönüşümü ve $(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4a^2b + b^4$ açılımından gerekli işlemler yapıldığında dördüncü merkezsiz olmayan moment,

$$E(X^4) = \frac{k}{[1-(1+\lambda)^{-k}]} \frac{1}{\lambda^4} \left[\frac{(1+\lambda)^{-k+4} - 1}{-k+4} - 4 \frac{(1+\lambda)^{-k+3} - 1}{-k+3} + 6 \frac{(1+\lambda)^{-k+2} - 1}{-k+2} - 4 \frac{(1+\lambda)^{-k+1} - 1}{-k+1} + \frac{(1+\lambda)^{-k} - 1}{-k} \right], \quad (15)$$

Eşitlik (15)'de ki gibi elde edilir. İlk dört merkezsiz olmayan moment yardımıyla bir genellemeye gidilebilir. Merkezsiz olmayan momentler için $\frac{k}{[1-(1+\lambda)^{-k}]} = A$ olarak alınsın. Bu durumda bütün momentlerde μ'_n , $\frac{1}{\lambda^n}$ çarpanı ve binom dağılımının açılımından yararlanarak $(1+\lambda)^n - 1$ ifadesinde $(1+\lambda)$ 'nın n üstüne bölünmesi ile standart bir form elde edilmektedir. Tek üstlerde son ifade $\frac{(1+\lambda)^{-k-1}}{-k}$ eksi, çift üstlerde de artı işaret almaktadır.

Sağdan kesilmiş Lomax dağılımının varyansı ise,

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2,$$

olmak üzere, ikinci merkezsel olmayan moment ve ortalama yardımıyla

$$V(X) = \frac{k}{[1-(1+\lambda)^{-k}]^2} \left\{ \left[\frac{(1+\lambda)^{-k+2}-1}{-k+2} - 2 \frac{(1+\lambda)^{-k+1}-1}{-k+1} - \frac{(1+\lambda)^{-k}-1}{-k} \right] - \left[\frac{k}{[1-(1+\lambda)^{-k}]} \left(\frac{(1+\lambda)^{-k+1}-1}{-k+1} + \frac{(1+\lambda)^{-k}-1}{k} \right)^2 \right] \right\}. \quad (16)$$

biçiminde elde edilmiştir.

4. Parametrelerin Tahmini

Bu bölümde sağdan kesilmiş Lomax dağılımına ait parametre tahmini en çok olabilirlik tahmini yardımıyla yapılmıştır. Öncelikle dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu Eşitlik (5)'de verilmişti. Bu fonksiyon yardımıyla olabilirlik fonksiyonu

$$L(\lambda, k, X_1, X_2, \dots, X_n) = \frac{(\lambda k)^n}{\sum_{i=1}^n (1+\lambda x_i)^{k+1} (1-(1+\lambda)^{-k})^n},$$

biçimde elde edilmektedir. Bu olabilirlik fonksiyonunun logaritması

$$\ln L = n \ln(\lambda) + n \ln(k) - (k+1) \sum_{i=1}^n \ln(1 + \lambda x_i) - n \ln(1 - (1 + \lambda)^{-k}),$$

eşitliği biçimindedir ve bu eşitliğin λ ve k parametrelerine göre sırasıyla türevleri alınırsa aşağıdaki denklemlere ulaşılmaktadır.

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - (k+1) \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{1+\lambda x_i} + nk \frac{(1+\lambda)^{-k-1}}{1-(1+\lambda)^{-k}},$$

$$\frac{\partial L}{\partial k} = \frac{n}{k} - \sum_{i=1}^n \ln(1 + \lambda x_i) + n \frac{(1+\lambda)^{-k} \ln(1+\lambda)}{1-(1+\lambda)^{-k}}.$$

Her iki parametreye göre ikinci türevleri olarak bilgi matrisi elemanları sırasıyla aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2} = -\frac{n}{\lambda^2} + (k+1) \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{(1+\lambda x_i)^2} + nk \frac{(1+\lambda)^{-k} + [-k-1+(1+\lambda)^{-k}]}{[1-(1+\lambda)^{-k}]^2 (1+\lambda)^{-2}},$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial k^2} = -\frac{n}{k^2} + n \left[\frac{\ln(1+\lambda)^2 (1+\lambda)^{-k}}{[1-(1+\lambda)^{-k}]^2} \right],$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial k} = -\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{1+\lambda x_i} + \left(nk \frac{(1+\lambda)^{-k-1}}{1-(1+\lambda)^{-k}} \right)'$$

Bu çalışma kapsamında parametre tahmini açık kodlu R yazılımı ile yapılmıştır. R paket programında tahmin için "optimize, nlm ve adequacymodel" paketleri mevcuttur. "Adequacy Model" paketi ile birlikte paketin yapısında yer alan PSO algoritması parametre tahmininde kullanılmıştır [27,28,29].

5. Uygulama

Bu çalışmada kullanılan veriler, 137 ülkedeki HIV bulaşmış kişilerin oranlarına dayanmaktadır [30]. Çalışmada alternatif diğer dağılımlarda denenmiş ve modellerin bilinmeyen parametrelerinin en çok olabilirlik tahminleri Tablo 3'te verilmiştir. Tabloda parantez içinde yer alan değerler standart hatalar belirtmektedir. Ayrıca AIC (Akaike Information Criterion) istatistiklerine ait değerler, AICC (Akaike Information Criterion with Correction) ve BIC (Bayes Information Criterion) değerleri sağdan kesilmiş Lomax (SK-L), Kumaraswamy-Lomax (Kw-L), Beta-Lomax (B-L), Üstel-Lomax (Üstel-L) ve Lomax dağılımları için hesaplanmıştır. Bunun yanı sıra, Cramer-von Mises (W) ve Anderson-Darling (A) istatistikleri de elde edilmiştir. Hesaplamalar, R programında Adequacy Model paketi kullanılarak gerçekleştirilmiştir.

Tablo 4. Modellere ait parametre tahmin değerleri ve uyum iyiliği istatistikleri

Model	a	b	k	λ	AIC	AICC	BIC	W	A
SK-L	0.342 (0.032)	5.754 (0.212)	0.023 (0.009)	0.0002 (0.002)	271.672	272.872	275.302	2.029	5.283
Kw-L	0.479 (0.045)	6.892 (2.098)	0.021 (0.007)	0.001 (0.027)	274.892	273.209	283.867	2.245	6.892
Beta-L	0.445 (0.037)	4.093 (3.210)	0.0027 (0.032)	0.002 (0.003)	279.232	279.873	284.692	2.502	7.234
Üstel-L	0.362 (0.048)	1.000 -	0.176 (0.045)	0.0002 (0.0003)	280.473	281.901	289.364	2.524	8.245
Lomax	1.000 -	1.00 -	0.034 (0.028)	0.0010 (0.0012)	302.485	302.356	324.290	2.459	8.892

Tablo 4’de verilen uyum iyiliği ölçüt değerlerine göre, küçük değerlerin daha iyi uyumu ifade etmesi sebebiyle SK-L modelinin diğerlerinden daha iyi olduğu sonucuna varılmıştır. Ayrıca, tabloda parantez içinde yer alan değerler ise parametre tahminleri için standart hataları belirtmektedir.

6. Sonuç

Farklı bilimsel alanlarda, birçok istatistiksel dağılım gerçek yaşam verilerinin modellenmesinde ve devamında analizinde kullanılmaktadır. Ancak ilgilenilen veri setine yönelik kullanılan istatistiksel dağılımların çoğu tam olarak uyum sağlayamamaktadır. Dolayısıyla, karşılaşılan bu tür durumlarla birlikte gerçek yaşam verilerini daha iyi modellemek amacıyla yeni dağılımlar önerilmektedir. Bu çalışmada Lomax dağılımının sağdan kesilmesi ile elde edilen yeni olasılık dağılımı üzerinde durulmuş ve çeşitli istatistiksel özellikleri ortaya çıkarılmıştır. Uygulama kısmında ise, 137 ülkedeki HIV bulaşmış kişilerin oranlarından yararlanılmıştır. Uygulama kısmında elde edilen sonuca göre, sağdan kesilmiş Lomax (SK-L) dağılımı karşılaştırılan diğer dağılımlara göre daha iyi bir sonuç verdiği görülmektedir.

Kaynakça

- [1]. Hahn, G. J., Shapiro, S. S. 1967. Statistical models in engineering (No. TA340 H3).
- [2]. Bentley, J. L., McIlroy, M. D. 1993. Engineering a sort function. Software: Practice and Experience, 23(11), 1249-1265.
- [3]. Escobar, L. A., Meeker, W. Q. 1998. Fisher information matrices with censoring, truncation, and explanatory variables. Statistica Sinica, 221-237.
- [4]. Çakmakyapan, S. 2017. Genelleştirilmiş olasılık dağılımları üzerine bir çalışma, Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstatistik Anabilim Dalı Doktora Tezi.
- [5]. Epstein, B. 1954. Truncated life tests in the exponential case. The Annals of Mathematical Statistics, 555-564.
- [6]. Baklizi, A. 2020. Interval estimation of quantiles and reliability in the two-parameter exponential distribution based on records. Mathematical Population Studies, 27(3), 175-183.
- [7]. Balakrishnan, N., Leiva, V., Lopez, J. 2007. Acceptance sampling plans from truncated life tests based on the generalized Birnbaum-Saunders distribution. Communications in Statistics — Simulation and Computation, 36(3), 643-656.
- [8]. Rosaiah, K., Kantam, R. R. L. 2005. Acceptance sampling based on the inverse Rayleigh distribution. Economic Quality Control, 20(2), 277-286.
- [9]. Srinivasa Rao, G., Kantam, R. R. L. 2012. Two-Stage Estimation in Log-Logistic Model. Pakistan Journal of Statistics, 28(3), 331-339.
- [10]. Singh, S., Tripathi, Y. M. 2018. Estimating the parameters of an inverse Weibull distribution under progressive type-I interval censoring. Statistical Papers, 59(1), 21-56.
- [11]. Al-Omari, A. I. 2018. Acceptance sampling plans based on truncated life tests for Sushila distribution. J. Math. Fundam. Sci., 50(1), 72-83.

- [12]. Aslam, M., Kundu, D., Jun, C. H., Ahmad, M. 2011. Time truncated group acceptance sampling plans for generalized exponential distribution. *Journal of Testing and Evaluation*, 39(4), 671-677.
- [13]. Aslam, M., Jun, C. H. 2009. A group acceptance sampling plan for truncated life test having Weibull distribution. *Journal of Applied Statistics*, 36(9), 1021-1027.
- [14]. Gui, W., Zhang, S. 2014. Acceptance sampling plans based on truncated life tests for Gompertz distribution. *Journal of Industrial Mathematics*, 1-7.
- [15]. Malathi, D., Muthulakshmi, S. 2016. Truncated life test acceptance sampling plans assuring percentile life under Gompertz distribution. *IOSR-Journal of Mathematics*, 12(2), 27-32.
- [16]. Çakmakyapan, S., Özel, G. 2021. Sağkalım ve Güvenilirlik Analizlerinde Yeni Bir Olasılık Dağılımı. *International Journal of Advances in Engineering and Pure Sciences*, 33(4), 651-659.
- [17]. Çakmakyapan, S., Özel, G. 2021. Generalized lindley family with application on wind speed data. *Pakistan Journal of Statistics and Operation Research*, 17(2), 387-397.
- [18]. Lomax, K. S. 1954. Business failures: Another example of the analysis of failure data, *Journal of the American Statistical Association*, 49, 847-852.
- [19]. Ghitany ME, Al-Awadhi FA, and Alkhalfan L (2007). Marshall–Olkin extended Lomax distribution and its application to censored data. *Communications in Statistics—Theory and Methods*, 36(10): 1855-1866. <https://doi.org/10.1080/0361092060>
- [20]. Artur J. Lemonte and Gauss M. Cordeiro. An extended lomax distribution. *Statistics*, 47(4):800—816, 2013.
- [21]. Mundher A. Khaleel, Mohammed T. Ahmed, Adebowale O. Adejumo, and Oluwole A. Odetunmbi. A new generalization of the lomax distribution with increasing, decreasing, and constant failure rate. *Modelling and Simulation in Engineering*, 2017:1—6, 2017.
- [22]. Cordeiro GM, Ortega EM, and Popović BV (2015). The Gamma Lomax distribution. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 85(2): 305-319. <https://doi.org/10.1080/00949655.2013.822869>.
- [23]. Rady EHA, Hassanein WA, and Elhaddad TA (2016). The power Lomax distribution with an application to bladder cancer data. *SpringerPlus*, 5: 1838. <https://doi.org/10.1186/s40064-016-3464-y>
- [24]. Hassan AS and Nassr SG (2018). Power Lomax poisson distribution: Properties and estimation. *Journal of Data Science*, 18(1): 105-128. [https://doi.org/10.6339/JDS.201801_16\(1\).0007](https://doi.org/10.6339/JDS.201801_16(1).0007)
- [25]. Hassan AS and Abd-Allah M (2018). Exponentiated Weibull Lomax distribution: Properties and estimation. *Journal of Data Science*, 16(2): 277-298. [https://doi.org/10.6339/JDS.201804_16\(2\).0004](https://doi.org/10.6339/JDS.201804_16(2).0004)
- [26]. Hassan A, Elgarhy M, and Mohamed R (2020). Statistical properties and estimation of type II half logistic Lomax distribution. *Thailand Statistician*, 18(3): 290-305.
- [27]. Ben-Israel, A., 1966. A Newton-Raphson method for the solution of systems of equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 15(2), 243-252.
- [28]. Marinho P.R.D, Silva R.B., Bourguignon M., Cordeiro G.M. and Nadarajah S. 2019. AdequacyModel: An R package for probability distributions and general purpose optimization. *PLoS ONE* 14(8): e0221487. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0221487>.
- [29]. <https://www.R-project.org/> (19.04.2022)
- [30]. Rushton, J. P., Templer, D. I. 2009. National differences in intelligence, crime, income, and skin color. *Intelligence*, 37(4), 341-346.