Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi/ Journal of The Institute of Natural & Applied Sciences 20 (1-2):56-63, 2015

Derleme/Review

Soft Bileşen ve Soft Lokal Bağlantı Uzaylar

Büşra AYDIN

Özet: Soft topoloji birçok araştırmacı tarafından çalışılmış, bazı temel kavramları tanımlanmış ve birçok özelliği incelenmiş bir konudur. Bu çalışmada, öncelikle, kullanılan kavramların literatür bilgileri kısaca verilip soft küme teori ve 2011 yılında Çağman ve ark. tarafından verilen soft topolojik uzaylar ile ilgili temel kavramlar ve bazı özellikler hatırlatıldı. Sonraki kısımlarda soft bağlantısızlık ile ilgili bazı kavramlar verilip soft bileşen ve lokal soft bağlantılılık incelendi.

Anahtar kelimeler*:* Soft Topoloji; Soft Bağlantısızlık; Soft Bileşen; Soft Lokal Bağlantılılık

Soft Component and Soft Local Connected Spaces

Abstract: Soft topology is a subject which is studied by many researchers, its basic notions defined and many properties examined. In this study, firstly, literature knowledge of used concepts was given, and soft set theory and soft topological space which are proposed by Çağman et. al in 2011 were reminded. Then, some concepts about soft disconnected were given and soft local connected was examined.

Keywords: Soft Topology;Soft disconnected; Soft Component; Soft Local Connected

1. Giriş

Günlük hayatta karşılaştığımız birçok kavram kesinden çok şüphelidir. Ancak klasik matematik kesin olmayan durumlarla ilgilenmez, tüm kavramlar belli olmalıdır, aksi halde kesin sonuca ulaşılamaz. Ancak bazı bilim adamları kesin olmayan durumlar üzerine de çalışmışlar ve bazı teorileri ortaya koymuşlardır. Bunlardan bazıları fuzzy küme teori (1965), rough küme teori (1982) ve soft küme teoridir (1999).

Molodtsov (1999), belirsizliğe yeni bir yaklaşım olan soft küme teoriyi tanıttı. Bu teoride soft kümeyi, evrenin parametrelenmiş alt kümelerinin bir ailesi şeklinde tanımladı. Soft küme teori geniş bir alanda, birçok uygulamaya sahiptir.

Maji ve ark. (2003), soft küme teori ile ilgili çeşitli temel kavramları verdiler. VE, VEYA gibi ikili işlemleri, ayrıca birleşim ve kesişim işlemlerini tanımlayıp De Morgan kurallarının ve çok sayıda sonucun soft kümeler için doğru olduğunu gösterdiler. Çeşitli araştırmacılar soft küme teori üzerinde günümüze kadar çalışmışlardır. Shabir ve Naz (2011), evren küme üzerindeki bütün soft kümelerden oluşan aile üzerinde bir τ topolojisi kurdular. Bu topolojiyi (X, τ, E) soft topolojik uzay olarak adlandırdılar. Bu uzayda soft açıklar ve soft kapalıları verdiler. Soft kapanış, soft iç, soft komşuluk, soft alt uzay kavramlarını verdiler. Soft ayırma aksiyomlarını verdiler ve birbirleriyle karşılaştırdılar. Aygünoğlu ve Aygün (2011), yaptıkları çalışmada soft dönüşümde soft sürekliliği tanımlamış ve soft topolojik uzayda kompaktlık üzerine çalışmışlardır.

Çağman ve ark. (2011), Shabir ve Naz (2011)' ın üzerinde çalıştığı (X, τ, E) soft topolojik uzayından daha genel olan bir topolojik uzay tanımladılar. Burada soft kümeyi, parametre ve parametreye karşılık gelen evrenin parametrelenmiş alt kümesi ile birlikte bir ikili oluşturacak şekilde verdiler. Gerekli olan kavramları verip, evren küme üzerindeki bütün soft kümelerden herhangi bir tanesi üzerinde topoloji kurdular ve $(F_A, \tilde{\tau})$ soft topolojik uzayı olarak adlandırdılar. Ayrıca bu uzayda soft iç, soft kapanış, soft sınır, soft açıklık, soft kapalılık, soft komşuluk, soft yığılma noktası ve soft taban kavramlarını verdiler. Soft iç, soft kapanış ve soft yığılma noktası ile ilgili olarak çok sayıda özellik vererek ispatladılar.

Bu çalışmada öncelikle soft kümeler ve soft topolojik uzaylar hakkında bazı tanım ve teoremler hatırlatılarak soft bağlantılı uzaylar ve soft bağlantılı alt uzaylar incelenmiştir. Ayrıca soft bileşen tanımlanarak tamamen soft bağlantısız uzaylar ve lokal soft bağlantılı uzaylar üzerinde bazı tanım ve teoremler verilmiştir.

2. Ön Bilgiler

2.1. Soft Kümeler

Bu bölümde soft küme teori ile ilgili temel kavramları ve özellikleri hatırlattık. Burada X başlangıç evreni, E parametre kümesi, (X) X' in güç kümesi ve $A \subseteq E$ olarak alınmıştır.

Tanım 2.1.1:[5] X evren kümesi üzerinde tanımlanan ikililerin oluşturduğu F_A soft kümesi, f_A: $E \longrightarrow P(X)$ küme değerli bir dönüşüm olmak üzere,
F_A= $\{(e, f_A(e)) : e \in E, f_A(e) \in P(X)\}$
şeklinde tanımlanır. Buradan $e \notin A$ ise $f_A(e)$=$\emptyset$ olur.

X evren kümesi üzerindeki bütün soft kümeler $S(X,E)$ ile gösterilmiştir.

Tanım 2.1.2:[5] $F_\emptyset \in S(X,E)$ verilsin. Eğer her $e \in E$ için $f_\emptyset(e)$=$\emptyset$ oluyorsa $F_\emptyset$, boş soft küme olarak adlandırılır ve F_Φ ile gösterilir.

Tanım 2.1.3:[5] $F_A \in S(X,E)$ soft kümesi verilsin. Her $e \in A$ için $f_A(e)$=X oluyorsa F_A, A- tam soft küme olarak adlandırılır ve $F_{\tilde{A}}$ ile gösterilir. Eğer A=E ise A- tam soft kümesi, tam soft küme olarak adlandırılır ve $F_{\tilde{E}}$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.4:[5] F_A, $F_B \in S(X,E)$ soft kümeleri verilsin. Eğer her $e \in E$ için, $f_A(e) \subseteq f_B(e)$ oluyorsa F_A, F_B soft kümesinin soft alt kümesidir denir ve $F_A \sqsubseteq F_B$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.5:[5] F_A, $F_B \in S(X,E)$ soft kümeleri verilsin. Eğer her $e \in E$ için, $f_A(e)$=$f_B(e)$ oluyorsa F_A ile F_B soft eşittir denir ve F_A=F_B ile gösterilir.

Tanım 2.1.6:[5] F_A, $F_B \in S(X,E)$ soft kümeleri verilsin. Buradan soft birleşim $F_A \sqcup F_B$, soft kesişim $F_A \sqcap F_B$ ve soft fark $F_A \tilde{\setminus} F_B$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.7:[5] $F_A \in S(X,E)$ soft kümesi verilsin. F_A soft kümesinin soft tümleyeni F_A^c şeklinde gösterilir. $f_A(e)$ kümesinin tümleyeni $f_A^c(e)$ ile ifade edilir ve her $e \in E$ için $f_A^c(e)$=$X \setminus f_A(e)$ dir.

Teorem 2.1.1:[5] F_A, F_B, $F_C \in S(X,E)$ soft kümeleri verilsin.

1) $F_A \sqcup F_A = F_A$, $F_A \sqcap F_A = F_A$
2) $F_A \sqcup F_\Phi = F_A$, $F_A \sqcap F_\Phi = F_\Phi$
3) $F_A \sqcup F_{\tilde{E}} = F_{\tilde{E}}$, $F_A \sqcap F_{\tilde{E}} = F_A$
4) $F_A \sqcup F_A^c = F_{\tilde{E}}$, $F_A \sqcap F_A^c = F_\Phi$
5) $F_A \sqcup F_B = F_B \sqcup F_A$, $F_A \sqcap F_B = F_B \sqcap F_A$
6) $(F_A \sqcup F_B)^c = F_B^c \sqcap F_A^c$, $(F_A \sqcap F_B)^c = F_B^c \sqcup F_A^c$
7) $(F_A \sqcup F_B) \sqcup F_C = F_A \sqcup (F_B \sqcup F_C)$
$(F_A \sqcap F_B) \sqcap F_C = F_A \sqcap (F_B \sqcap F_C)$
8) $F_A \sqcup (F_B \sqcap F_C) = (F_A \sqcup F_B) \sqcap (F_A \sqcup F_C)$ $F_A \sqcap (F_B \sqcup F_C) = (F_A \sqcap F_B) \sqcup (F_A \sqcap F_C)$
9) $(F_A^c)^c = F_A$

10) $F_A \sqsubseteq F_B$ ise $F_B^c \sqsubseteq F_A^c$ olur.

2.2. Soft Topolojik Uzaylar

Bu bölümde soft kümeler kullanılarak elde edilen soft topolojik uzayı ve bu uzayda soft iç, soft kapanış, soft sınır, soft açıklık, soft kapalılık, soft komşuluk, soft dönüşüm, soft yığılma noktası, soft taban ve soft komşuluk tabanı kavramlarını ve özelliklerini hatırlattık.

Tanım 2.2.1:[5] $F_A \in S(X,E)$ verilsin. F_A soft kümesinin soft güç kümesi,
$\tilde{P}(F_A) = \{(F_A)_i : (F_A)_i \sqsubseteq F_A, i \in I \subseteq \mathbb{N}\}$
şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.2.2:[5] $F_A \in S(X,E)$ verilsin. F_A soft kümesi üzerindeki bir $\tilde{\tau}$ ailesi,

i)$F_\Phi, F_A \in \tilde{\tau}$

ii)$\{(F_A)_i \sqsubseteq F_A, i \in I \subseteq \mathbb{N}\} \subseteq \tilde{\tau} \Longrightarrow \bigsqcup_{i \in I \subseteq \mathbb{N}} (F_A)_i \in \tilde{\tau}$

iii)$\{(F_A)_i \sqsubseteq F_A,\ 1 \leq i \leq n,\quad n \in \mathbb{N}\} \subseteq \tilde{\tau} \Longrightarrow \sqcap_{i=1}^{n} (F_A)_i \in \tilde{\tau}$

özelliklerini sağlarsa F_A soft kümesi üzerinde $\tilde{\tau}$ topolojisi tanımlanır. Burada $(F_A, \tilde{\tau})$ ikilisine soft topolojik uzay denir.

Tanım 2.2.4:[5] $(F_A,\ \tilde{\tau})$ soft topolojik uzayı ve $(F_A)_1 \sqsubseteq F_A$ verilsin. $(F_A)_1$ soft kümesinin soft içi $(F_A)_1^\circ$ ile gösterilir ve $(F_A)_1$ soft kümesinin kapsadığı bütün soft açık alt kümelerinin soft birleşimi şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.2.5:[5] $(F_A,\ \tilde{\tau})$ soft topolojik uzayı ve $(F_A)_1 \sqsubseteq F_A$ verilsin. Eğer $(F_A)_1^c$ soft açık ise $(F_A)_1$ soft kapalıdır.

Teorem 2.2.1:[5] $(F_A,\ \tilde{\tau})$ soft topolojik uzayı ve $(F_A)_1, (F_A)_2 \sqsubseteq F_A$ verilsin. Buradan,

i) $((F_A)_1^-)^- = (F_A)_1^-$

ii) $((F_A)_1^-)^c = ((F_A)_1^c)^\circ$

iii) $(F_A)_1 \sqsubseteq (F_A)_2 \Longrightarrow (F_A)_1^- \sqsubseteq (F_A)_2^-$

iv) $((F_A)_1 \sqcap (F_A)_2)^- \sqsubseteq (F_A)_1^- \sqcap (F_A)_2^-$

v) $(F_A)_1^- \sqcup (F_A)_2^- = ((F_A)_1 \sqcup (F_A)_2)^-$

Tanım 2.2.6:[5] $(F_A,\ \tilde{\tau})$ soft topolojik uzayı ve $(F_A)_1 \sqsubseteq F_A$ verilsin. $(F_A)_1$ soft kümesi üzerindeki $\tilde{\tau}_{(F_A)_1} = \{(F_A)_i \sqcap (F_A)_1 :\ (F_A)_i \in \tilde{\tau},\ i \in I \subseteq \mathbb{N}\}$ topolojisine, $(F_A)_1$ soft kümesi üzerine indirgenen soft alt uzay topolojisi, $((F_A)_1, \tilde{\tau}_{(F_A)_1})$ soft topolojik uzayına da $(F_A,\ \tilde{\tau})$ uzayının soft alt uzayı denir.

Tanım 2.2.7:[5] $(F_A,\ \tilde{\tau})$ soft topolojik uzayı ve $\alpha \in F_A$ [α=(e,$f_A(e)$), her $e \in E$ ve $f_A(e) \in P(X)$] verilsin. α elemanını içeren her $(F_A)_1 \sqsubseteq F_A$ soft açık alt kümesine, α elemanının soft açık komşuluğu (ya da soft komşuluğu) denir ve $\tilde{\mathcal{V}}_{(\alpha)}$ ile gösterilir. Yani,

$\tilde{\mathcal{V}}_{(\alpha)} = \{(F_A)_1 : (F_A)_1 \in \tilde{\tau}, \alpha \in (F_A)_1\}$

şeklinde gösterilir.

Tanım 2.2.8:[5] $(F_A\ ,\ \tilde{\tau}\ )$ soft topolojik uzayı verilsin. $(F_A)_1 \sqsubseteq F_A$ ve $\alpha \in F_A$ verilsin. Eğer α elemanının her soft komşuluğu, $(F_A)_1$ soft kümesinin α elemanından farklı bir elemanını içeriyorsa α elemanına $(F_A)_1$ soft kümesinin soft yığılma noktası denir. Yani,

$\forall\ (F_A)_2 \in \tilde{\mathcal{V}}_{(\alpha)}$ için $(F_A)_1 \sqcap ((F_A)_2 \tilde{\setminus} \{\alpha\}) \neq F_\Phi$

oluyorsa α, $(F_A)_1$ soft kümesinin soft yığılma noktasıdır. $\alpha \in (F_A)_1'$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.9:[5] $(F_A\ ,\ \tilde{\tau}\ )$ bir soft topolojik uzay ve $\tilde{\beta}$ da F_A soft kümesinin soft açık alt kümelerinin bir ailesi olsun. Eğer $\tilde{\tau}$ ailesindeki her bir $(F_A)_1$ soft açık kümesi $\tilde{\beta}$ ya ait soft kümelerin herhangi soft birleşimleri olarak yazılabiliyorsa $\tilde{\beta}$ ailesine $\tilde{\tau}$ topolojisi için bir soft taban denir. Yani,

$$\tilde{\beta} \subseteq \tilde{\tau} \Leftrightarrow \forall (F_A)_1 \in \tilde{\tau}$$

için

$$(F_A)_1 = \sqcup_{(F_A)_2 \in \Psi} (F_A)_2 \ni \Psi \subseteq \tilde{\beta}$$

şeklinde yazılır.

Tanım 2.2.10:[6] $(F_A , \tilde{\tau})$ soft topolojik uzay ve $\alpha \in F_A$ verilsin. Eğer her $(F_A)_1 \in \tilde{\mathcal{V}}_{(\alpha)}$ soft komşuluğu için $(F_A)_2 \sqsubseteq (F_A)_1$ olacak şekilde bir $(F_A)_2 \in \tilde{\mathfrak{S}}_{(\alpha)}$ varsa, $\tilde{\mathfrak{S}}_{(\alpha)}$ ailesine $\tilde{\tau}$ soft topolojisine göre α elemanının bir soft komşuluklar tabanı denir.

3. Soft Bağlantılı Uzaylar

3.1. Soft Bağlantılı Kümeler

Tanım 3.1.1:[8] $(F_A , \tilde{\tau})$ soft topolojik uzay ve $F_B, F_C \sqsubseteq F_A$ olsun. Eğer $F_B^- \sqcap F_C \neq \Phi$ veya $F_B \sqcap F_C^- \neq \Phi$ ise F_B ve F_C soft kümelerine soft bağlantılı kümeler denir. Burada F_B ve F_C soft bağlantısız ise $F_B^- \sqcap F_C = \Phi$ ve $F_B \sqcap F_C^- = \Phi$ 'dur.

Tanım 3.1.2:[8] $(F_A , \tilde{\tau})$ soft topolojik uzay ve $F_B, F_C \sqsubseteq F_A$ olsun. F_B ve F_C ayrık ise $F_B \sqcap F_C = \Phi$ 'dur.

Uyarı 3.1.1: Bir soft topolojik uzayda iki soft bağlantısız kümeler soft ayrıktır. Ancak karşıtı doğru değildir.

Teorem 3.1.1:$(F_A ,\tilde{\tau})$ soft topolojik uzay ve $F_B, F_C \sqsubseteq F_A$ olsun.

(i) Eğer soft ayrık F_B ve F_C kümeleri soft açıksa soft bağlantısızdır.

(ii)Eğer soft ayrık F_B ve F_C kümeleri soft kapalıysa soft bağlantısızdır.

Teorem 3.1.2: $(F_A , \tilde{\tau})$ soft topolojik uzay ve $F_B, F_C \sqsubseteq F_A$ olsun. F_B ve F_C soft kümelerinin her ikisi de soft açık ya da soft kapalı ise $F_B \setminus F_C$ ve $F_C \setminus F_B$ soft kümeleri soft bağlantısızdır yani;

$$(F_B \setminus F_C)^- \sqcap (F_C \setminus F_B) = \Phi$$

ve

$$(F_C \setminus F_B)^- \sqcap (F_B \setminus F_C) = \Phi$$

Teorem 3.1.3:$(F_A , \tilde{\tau})$ soft topolojik uzay ve $F_B, F_C \sqsubseteq F_A$ olsun. Eğer $F_B^- \sqcap F_C = \Phi$ ve $F_B \sqcup F_C$ soft kapalı ise F_B soft kapalıdır.

Teorem 3.1.4:$(F_A , \tilde{\tau})$ soft topolojik uzay ve $F_B, F_C \sqsubseteq F_A$ olsun. Eğer $F_B^- \sqcap F_C = \Phi$ ve $F_B \sqcup F_C$ soft açıksa F_C soft açıktır.

3.2. Soft Bağlantılı Uzaylar

Tanım 3.2.1:[8] $(F_A , \tilde{\tau})$ bir soft topolojik uzay olsun. Eğer F_A boştan farklı iki soft bağlantısız kümenin bileşimi şeklinde yazılabiliyorsa $(F_A ,\tilde{\tau})$'ya soft bağlantısız uzay denir.

Teorem 3.2.1: $(F_A , \tilde{\tau})$ soft topolojik uzayının soft bağlantısız olması için gerek ve yeter şart F_A soft kümesinin boş olmayan ve soft ayrık soft açık iki soft alt kümenin birleşimi şeklinde yazılmasıdır.

Teorem 3.2.2:[8]: Bir F_A soft kümesi boştan farklı ayrık ve soft kapalı iki soft bağlantısız kümenin birleşimi şeklinde yazılabiliyorsa $(F_A , \tilde{\tau})$ soft bağlantısızdır ancak tersi doğru değildir.

Sonuç 3.2.1:[8] $(F_A , \tilde{\tau})$ soft topolojik uzayının soft bağlantılı olması için gerek ve yeter koşul F_A soft kümesinin boş olmayan ayrık olmayan iki soft açığın birleşimi şeklinde yazılabilmesidir.

3.3. Soft Bağlantılı Alt Uzaylar

Tanım 3.3.1: $(F_A\ ,\ \tilde{\tau}\ )$ soft topolojik uzayı ve $F_B \sqsubseteq F_A$ soft alt kümesi verilsin. Eğer $(F_B\ ,\ \tilde{\tau}_B)$ soft alt uzayı bağlantılı ise, F_B soft kümesine, $(F_A\ ,\ \tilde{\tau}\ )$ soft uzayı içinde soft bağlantılı küme denir.

Teorem 3.3.1: Bir $(F_A\ ,\ \tilde{\tau}\ )$ soft topolojik uzayı verilsin. Bu taktirde bir $F_B \sqsubseteq F_A$ soft alt kümesinin soft bağlantılı olması için gerek ve yeter şart

$$F_B \sqsubseteq F_U \sqcup F_V, \quad F_B \sqcap F_U = \Phi, F_B \sqcap F_V = \Phi$$

şeklindeki her F_U,$F_V \in \tilde{\tau}$ soft açık kümeleri için, $F_B \sqcap F_U \sqcap F_V \neq \Phi$ olmasıdır.

Teorem 3.3.2: $(F_A\ ,\ \tilde{\tau}\ )$ soft topolojik uzayı, boş olmayan, ayrık, soft açık F_U ve F_V soft alt kümelerinin birleşimine eşit olsun. $F_B$soft kümesi , $(F_A\ ,\ \tilde{\tau}\ )$ soft topolojik uzayının soft bağlantılı bir soft alt kümesi ise, ya $F_B \sqsubset F_U$ ya da $F_B \sqsubset F_V$'dir.

Teorem 3.3.3: Boş kümeden farklı soft bağlantılı kümelerden oluşan bir soft ailenin arakesiti boş küme değilse, bu ailenin birleşimi de soft bağlantılıdır.

Teorem 3.3.4: $(F_A\ ,\ \tilde{\tau}\ )$ soft topolojik uzayının soft bağlantılı olması için gerek ve yeter şart her $x, y \in F_A$ soft eleman çiftini içeren soft bağlantılı bir soft kümenin varlığıdır.

3. 4. Bir Soft Uzayın Soft Bileşenleri

Tanım 3.4.1: $(F_A\ ,\ \tilde{\tau}\ )$ soft topolojik uzayı ve soft bağlantılı bir $F_B \sqsubset F_A$ soft alt kümesi verilsin. Eğer $(F_A\ ,\ \tilde{\tau}\ )$ soft uzayını kapsayan daha büyük soft bağlantılı bir alt uzay yoksa $(F_B,\tilde{\tau}_B)$ soft topolojik uzayına bir soft bileşen denir. Diğer bir ifadeyle, $(F_A\ ,\ \tilde{\tau}\ )$ soft topolojik uzayının en büyük soft bağlantılı alt uzayına $(F_A\ ,\ \tilde{\tau}\ )$ soft topolojik uzayın soft bileşeni denir.

Tanım 3.4.2: Bir $(F_A\ ,\ \tilde{\tau}\ )$ soft topolojik uzayının bir x soft noktasını içeren soft bileşenine x noktasının soft bileşeni denir ve C_x ile gösterilir.

Teorem 3.4.1: Bir $(F_A\ ,\ \tilde{\tau}\ )$ soft topolojik uzayının her bir x soft noktasını içeren bir ve yalnız bir soft bileşeni vardır.

İspat: Her $x \in F_A$ için $\{x\}$ soft kümesinin soft bağlantılı olduğu açıktır. O halde x soft noktasını içeren soft bağlantılı kümeler ailesinin arakesiti boş küme değildir. Teorem 3.3.3 gereğince bu ailenin birleşimi soft bağlantılıdır. Bu soft bağlantılı küme x soft noktasını içeren en büyük soft bağlantılı küme olduğundan Tanım 3.4.1 gereğince soft bileşen olacağından bu soft bileşen tektir. Gerçekten F_B ve F_C soft kümeleri x soft noktasının soft bileşenleri ise F_B soft kümesi x soft noktasını içeren soft bağlantılı küme ve F_C kümesi soft bileşen olduğundan Tanım 3.4.1 gereğince $F_B \sqsubset F_C$ yazılabilir. F_B ile F_C soft kümelerinin rollerini değiştirirsek $F_C \sqsubset F_B$ olup $F_B = F_C$ elde edilir.

Teorem 3.4.2: $(F_A\ ,\ \tilde{\tau}\ )$ soft topolojik uzayı verilsin. Her $x, y \in F_A$ için "aynı soft bağlantılı alt kümeye ait olma" bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

İspat:

"$\forall x, y \in F_A\ için\ x\mathcal{R}y \ \Leftrightarrow\ \exists\ F_B \sqsubset F_A$

$soft\ bağlantılı\ alt\ kümesi\ x,yF_B$ ”
şeklinde tanımlanan $\mathcal{R}$ bağıntısının yansıma ve simetri özelliğini sağladığı açıktır. Şimdi geçişme özelliğini sağladığını gösterelim. Herhangi $x, y, z \in F_A$ soft noktaları için, $x\mathcal{R}y$ ve $y\mathcal{R}z$ olsun. Bu durumda $x, y \in F_B$ olacak şekilde bir $F_B \sqsubset F_A$ ve $y, z \in F_C$ olacak şekilde bir $F_C \sqsubset F_A$ soft bağlantılı alt kümeleri vardır. $y \in F_B \sqcap F_C \neq \Phi$ olduğundan, Teorem 3.3.3 gereğince $F_B \sqcup F_C$ soft kümesi de soft bağlantılıdır. Ayrıca $x, z \in F_B \sqcup F_C$ olur. O halde $x\mathcal{R}z$ olur. Böylece $\mathcal{R}$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

Teorem 3.4.3: Bir soft topolojik uzayın tüm soft bileşenleri soft uzayın bir soft ayrışımını oluşturur. Ayrıca soft uzayın herhangi bir soft bağlantılı alt kümesi soft uzayın soft bileşenlerinden yalnızca biri tarafından kapsanır.

İspat: Bir $(F_A, \tilde{\tau})$ soft topolojik uzayının soft bileşenleri, soft uzayın denklik sınıfları olduğundan, herhangi iki denklik sınıfı ya aynıdır ya da ayrık iki kümedir ve bu denklik sınıflarının birleşiminin F_A soft kümesine eşit olduğu açıktır. Dolayısıyla $(F_A, \tilde{\tau})$ soft uzayının tüm bileşenleri uzayın bir ayrışımını oluşturur.

$(F_A, \tilde{\tau})$ soft topolojik uzayının herhangi bir soft bağlantılı F_B soft alt kümesini ele alalım. Önce F_B soft alt kümesinin $(F_A, \tilde{\tau})$ soft uzayının soft bileşenlerinden sadece biri ile kesiştiğini gösterelim. Varsayalım ki F_B soft kümesi $(F_A, \tilde{\tau})$ soft uzayının C_1 ve C_2 gibi iki soft bileşeni ile kesişsin. $x \in F_B \sqcap C_1$ ve $y \in F_B \sqcap C_2$ olsun. $C_1 \sqcap C_2 = \Phi$ olduğundan $x \neq y$ olur ve bu soft noktalar aynı soft bağlantılı F_B soft kümesine ait olduğundan Teorem 3.4.2 gereğince, $x\mathcal{R}y$ bulunur. O halde Tanım 3.4.2 gereğince $C_1 = C_2$ olur. Şimdi F_B soft bağlantılı alt kümesinin $(F_A, \tilde{\tau})$ soft uzayının soft bileşenlerinden yalnızca biri tarafından kapsandığını gösterelim. $x \in F_B$ soft noktasını alalım. $(F_A, \tilde{\tau})$ soft uzayının soft bileşenleri soft uzayın bir ayrışımını oluşturduğundan, x soft noktası bu soft bileşenlerden yalnızca birine aittir. Bu soft bileşeni C_x ile gösterelim. F_B soft kümesinin diğer soft noktaları da aynı C_x soft bileşenine aittir, aksi taktirde F_B soft kümesi sadece bir soft bileşenle kesişmemiş olurdu. Sonuç olarak, $F_B \sqsubset C_x$ elde edilir. **Teorem 3.4.4:** Bir soft topolojik uzayın soft bileşenleri soft kapalıdır.

İspat: $(F_A, \tilde{\tau})$ soft uzayının bir soft bileşeni F_B soft kümesi ise Tanım 3.4.1 gereğince F_B soft kümesi soft bağlantılı bir kümedir. O halde $\overline{F_B}$ soft kümesi de soft bağlantılıdır. F_B soft kümesi $(F_A, \tilde{\tau})$ soft uzayının en büyük soft bağlantılı alt kümesi olduğundan $\overline{F_B} \sqsubset F_B$ bulunur. Diğer taraftan, $F_B \sqsubset \overline{F_B}$ olup, $F_B = \overline{F_B}$ elde edilir. Böylece F_B soft kümesi soft kapalıdır. **Sonuç 3.4.2:** Bir $(F_A, \tilde{\tau})$ soft topolojik uzayını herhangi iki soft bileşeni soft bağlantılı olmayan iki soft kümedir.

İspat: $(F_A, \tilde{\tau})$ soft uzayının herhangi F_B ve F_C soft bileşenleri verilsin. Bu soft bileşenler Teorem 3.4.3 gereğince ayrık iki soft kümedir ve Teorem 3.4.4 gereğince soft kapalı kümelerdir. Teorem

3.2.1 gereğince

$$F_B^- \sqcap F_C = \Phi = F_B \sqcap F_C^-$$

bulunur. O halde F_B ve F_C soft kümeleri soft bağlantılı olmayan iki kümedir.

3.5. Tamamen Soft Bağlantısız Uzaylar

Tanım 3.5.1: $(F_A, \tilde{\tau})$ soft uzayının her x ve y soft noktaları için $x \in F_B \in \tilde{\tau}$ ve $y \in F_C \in \tilde{\tau}$ olacak şekilde $F_B \sqcup F_C$ soft bağlantısızlığı varsa $(F_A, \tilde{\tau})$ soft uzayına tamamen soft bağlantısız uzay denir.

Teorem 3.5.1: Bir soft topolojik uzayın tamamen soft bağlantısız olması için gerek ve yeter şart bu soft uzayın soft bileşenlerinin tek elemanlı soft kümeler olmasıdır.

İspat: $\Rightarrow$ $(F_A, \tilde{\tau})$ soft topolojik uzayı tamamen soft bağlantısız olsun. Varsayalım ki, $(F_A, \tilde{\tau})$ soft uzayının bir C soft bileşeni birden çok soft noktayı içersin. Bu durumda $x, y \in C$ $(x \neq y)$ soft noktalarını alalım. $(F_A, \tilde{\tau})$ soft uzayı tamamen soft bağlantısız olduğundan Tanım 3.5.1 gereği, $x \in F_B \in \tilde{\tau}$ ve $y \in F_C \in \tilde{\tau}$ olacak şekilde $F_B \sqcup F_C$ soft bağlantısızlığı vardır. Ayrıca $C \sqcap F_B \neq \Phi$, $C \sqcap F_C \neq \Phi$, $C \sqcap F_B \sqcap F_C = \Phi$ ve $C \sqsubset F_B \sqcup F_C$ olduğundan Teorem 3.3.1 gereğince C soft kümesi soft bağlantılı değildir. Bu ise Tanım 3.4.1 gereği C soft kümesinin soft bileşen olmasıyla çelişir. O halde C soft bileşeni yalnızca tek soft nokta içerir.

$\Leftarrow$ $(F_A, \tilde{\tau})$ soft tolopojik uzayının soft bileşenleri tek elemanlı soft kümeler olsun. $(F_A, \tilde{\tau})$ soft uzayının soft bileşenleri $(F_A, \tilde{\tau})$ soft uzayının en büyük soft bağlantılı kümeleri olduğundan her $x, y \in F_A$ soft noktaları için $x \in F_B$ ve $y \in F_C$ olacak şekilde $F_B \sqcup F_C$ soft bağlantısızlığı vardır. O halde Tanım 3.5.1 gereğince $(F_A, \tilde{\tau})$ soft uzayı tamamen soft bağlantısızdır.

Tanım 3.5.2: $(F_A, \tilde{\tau})$ soft topolojik uzayı ve bir $F_B \sqsubset F_A$ soft alt kümesi verilsin. Eğer $(F_B, \tilde{\tau}_B)$ soft alt uzayı tamamen soft bağlantısız ise F_B soft kümesine tamamen soft bağlantısız küme denir.

3.6. Lokal Soft Bağlantılı Uzaylar

Tanım 3.6.1: $(F_A, \tilde{\tau})$ soft topolojik uzayı verilsin. Eğer her $x \in F_A$ soft noktasının $(F_A, \tilde{\tau})$ soft uzayında soft bağlantılı kümelerden oluşan bir komşuluk tabanı varsa $(F_A, \tilde{\tau})$ soft uzayına lokal soft bağlantılı uzay denir.

Uyarı 3.6.1: $(F_A, \tilde{\tau})$ soft topolojik uzayının lokal soft bağlantılı olması için gerek ve yeter şart her $x \in F_A$ soft noktası ve her $V \in \mathcal{N}_{\tilde{\tau}}(x)$ soft komşuluğu için $x \in F_B \sqsubset V$ olacak şekilde soft bağlantılı soft açık bir F_B soft komşuluğunun olmasıdır.

Teorem 3.6.1: $(F_A, \tilde{\tau})$ soft uzayının lokal soft bağlantılı olması için gerek ve yeter şart $(F_A, \tilde{\tau})$ soft uzayının her soft açık alt uzayındaki her soft bileşeninin $(F_A, \tilde{\tau})$ soft uzayında soft açık olmasıdır.

İspat: $\Rightarrow$ $(F_A, \tilde{\tau})$ soft uzayı lokal soft bağlantılı, $F_B \sqsubset F_A$ soft açık bir alt küme ve C soft kümesi, $(F_B, \tilde{\tau}_B)$ soft alt uzayında bir soft bileşen olsun.

$x \in C \sqsubset F_B \sqsubset F_A$ soft noktasını ele alalım.$(F_A, \tilde{\tau})$ soft uzayı lokal soft bağlantılı olduğundan, Uyarı 3.6.1 gereğince $V \sqsubset F_B$ olacak şekilde soft bağlantılı bir $V \in \mathcal{N}_{\tilde{\tau}}(x)$ soft açık komşuluğu vardır. Böylece V soft açık kümesi $(F_B\ ,\ \tilde{\tau}_B)$ soft alt uzayında x soft noktasını içeren soft bağlantılı bir kümedir. Diğer taraftan, C soft kümesi $(F_B\ ,\ \tilde{\tau}_B)$ soft alt uzayında soft bileşen olduğundan, Tanım 3.4.1 gereğince $V \sqsubset C$ olur. Soft iç nokta tanımı gereği $x \in C^{\circ}$ elde edilir. Böylece $C \sqsubset C^{\circ}$olur. $C^{\circ} \sqsubset C$ olduğundan $C = C^{\circ}$yazılabilir. Sonuç olarak C soft bileşeni soft açıktır.

$\Leftarrow$ $(F_A\ ,\ \tilde{\tau}\ )$ soft topolojik uzayında soft açık bir $(F_B\ ,\ \tilde{\tau}_B)$ soft alt uzayının her soft bileşeni soft açık iken $(F_A\ ,\ \tilde{\tau}\ )$ soft uzayının lokal soft bağlantılı olduğunu gösterelim. $(F_B\ ,\ \tilde{\tau}_B)$ soft açık alt uzayına göre x soft noktasını içeren $C \sqsubset F_B$ soft bileşeni soft açıktır. C soft bileşeni soft açık olup Uyarı 3.6.1 gereğince $(F_A\ ,\ \tilde{\tau}\ )$ soft topolojik uzayı lokal soft bağlantılıdır.

Teşekkür

Üzerimde emeği bulunan ve bu çalışmayı yapmamda bana destek olan Prof. Dr. Şaziye Yüksel Hoca'ya ve Zehra Güzel Ergün'e teşekkürlerimi sunarım.

Kaynaklar

Ahmad, B.,Hussain, S., 2012, On some structures of soft topology, Mathematical Sciences 6:64 DOI: 10.1186/2251-7456-6-64.

Aygünoğlu A., Aygün H., 2011, Some Notes on Soft Topological Spaces, Neural comput & applic DOİ 10.1007/s00521-011-0722-3.

Çağman, N., Karataş, S. and Enginoğlu, S., 2011, Soft topology, Computers and Mathematics with Applications, 62, 351-358.

Lin, F.,2013,Soft connected spaces and paracompact spaces, World Academy of Science, Engineering and Technology International Journal of Mathematical, Computational, Physical and Quantum Engineering Vol:7 No:2, 2013

Maji P.K., Biswas R., A.R. Roy, 2003, Soft Set Theory, Comput. Math. Appl. 45, 555-562.

Molodtsov, D., 1999. Soft set theory – first result, Computers and Mathematics with Applications, 37, 19-31.

Shabir, M., Naz, M., 2011, On soft topological spaces, Computers and Mathematics with Applications, 61, 1786-1799.

Yüksel, Ş., 2011, Genel Topoloji, Eğitim yayınevi, Konya.