Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi

Afyon Kocatepe University Journal of Science and Engineering

AKÜ FEMÜBİD **22** (2022) 031102 (486-497) AKU J. Sci.Eng. **22** (2022) 031102 (486-497)

DOI: 10.35414/akufemubid.1068157

Araştırma Makalesi / ResearchArticle

Özel ve Genel Görelilik Teorilerine Alternatif Görelilik Teorisi

İsmail Tunahan ŞAHİN[1]

[1] *Yusuf Kemalettin Perin Fen Lisesi, Bergama, İzmir*

e-posta: isotoni1983@gmail.com ORCİD ID: https://orcid.org/0000-0002-1181-6561

Geliş Tarihi: 23.02.2022 Kabul Tarihi: 29.06.2022

Öz

Bu makale, Einstein'ın özel ve genel görelilik teorilerini tek başlık altında toplayan yeni bir uzay-zaman modellemesini anlatan yeni bir genelleştirilmiş teori niteliğindedir. Einstein'ın iki teorisine göre de bazı fiziksel olaylar zaman kısalmasına sebep olur fakat sadece genel görelilik teorisinde uzay-zaman değişir. Bu değişim uzay-zamanın bükülmesidir. Özel görelilik teorisine de uzay-zamanın bükülmesi uyarlansaydı gözlemcinin bulunduğu noktasal konumun bükülmesi gerekirdi. Tek bir noktanın bükülmesi uzay-zaman sürekliliğini bozardı. Bu yüzden iki teoriye de uyan yeni bir modellemeye ihtiyaç duyulur. Bu modelleme kısalmış uzay-zaman modellemesidir.

Anahtar kelimeler
Görelilik; Uzay-zaman; Einstein; Modelleme

Alternative Theory of Relativityto Theories of Special and General Relativity

Abstract

This article is a new generalized theory describing a new space-time modeling that gathers Einstein's special and general relativity theories under a single title. According to both of Einstein's theories, some physical events cause time shortening, but only in the theory of general relativity, space-time changes. This change is the warping of space-time. If the bending of space-time were applied to the theory of special relativity, the point position of the observer would have to be bent. The bending of a single point would break the continuity of space-time. Therefore, a new modeling that fits both theories is needed. This modeling is a shortened space-time modeling.

Keywords
Relativity; Space-time; Einstein; Modeling

1. Giriş

Einstein'ın özel ve genel görelilik teorilerinde zaman kısalması vardır. Bu iki görelilik teorisi benzer mantıkta olsa da Einstein'a göre, genel görelilik teorisinde fiziksel olaylar uzay-zamanı doğrudan etkilerken özel görelilikte fiziksel olayların uzay-zamana bir etkisi yoktur. Yani Einstein'a göre özel görelilik teorisi ile genel görelilik teorisinin ele alındığı uzaylar farklıdır. Bu yanlış bir düşüncedir çünkü fizikte benzer iki olayın ele alındığı uzaylar aynıdır. Yani özel ve genel görelilik teorilerindeki uzay-zaman kavramı aynı şeyler olmalıdır.

İki teori için de bükülme modellemesi kullanmak denenebilir. Genel görelilik teorisinde bu modellemede işlerken özel görelilik teorisinde işlemez. Çünkü özel görelilik teorisinde hızı olan bir cismin noktasal konumu ele alınır. Bu teoride Minkowski uzay-zamanı yerine bükülen uzay-zaman modellemesi kullanılmak istenirse, hızı olan cismin noktasal konumu hıza bağlı olarak aşağıya inmesi gerekir. Tek bir nokta aşağı doğru ineceği için uzay-zaman sürekliliğini yitirir. Genel görelilik teorisindeki gibi bükülme olmaz çünkü küre değil nokta üzerinden düşünülür. Bu yüzden bükülme modellemesi yanlış bir modellemedir.

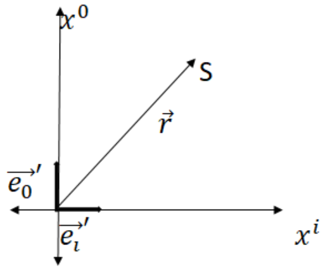
Bükülme modellemesinin yanlış olmasının diğer sebebi ise hem uzayın hem zamanın bükülmesidir. Genel görelilik teorisinde zaman gibi uzayın da bükülmesi, Dünya'daki gözlemcinin Güneş'e daha yakın bir gezegeni olduğundan farklı görmesini gerektirir çünkü o gezegenin bulunduğu konumda uzay-zaman daha çok bükülmüştür. Teleskoplardan görüleceği üzere böyle bir durum yoktur. Bu da bükülme modellemesinin yanlışlığının ispatıdır.

Einstein'ın teorilerine uygun, zaman birimlerinin değiştiği yeni bir uzay-zaman modellenmelidir.

2. Materyal ve Metot

2.1 Kısalma Skaleri

İhtiyaç duyulan alternatif yeni uzay-zaman modellemesi birimleri kısalmış uzay-zamandır. Bu uzay-zaman modellemesi hem özel hem genel hem de henüz bilinmeyen görelilik teorilerine uygun bir uzay-zaman modellemesi olmalıdır.
Uzay-zamanda bir "S" gözlemcisi olsun.



Şekil 1. Uzay-zamanda bir gözlemci. ("$\overrightarrow{e_\mu}'$" invaryant birim baz vektörlerdir, "$\overrightarrow{e_\mu}$" ise birim baz vektörlerdir.)

"S" gözlemcisinin konumu "$\vec{r}$" konum vektörü ile gösterilir. Birim baz vektörlerinin "$\vec{r}$" konum vektörünce taşınması şöyle gösterilir:

$$\nabla_{\vec{r}}\, \overrightarrow{e_\mu}' \qquad (1)$$

Bu ifade sıfıra eşitse birim baz vektörlerinin değişmeden paralel taşındığı anlaşılır. Sıfıra eşit değilse, "$\vec{r}$" vektörü boyunca taşınırken birim baz vektörlerinin değiştiği anlaşılır. Paralel taşıma, kovaryant türevden türeyen bir işlemdir ve taşıdığı vektörün ne miktarda değiştiğini ifade eder. Değişim olmadığında da sonuç sıfırdır. Böylelikle; değişebilen birim baz vektörleri, invaryant birim baz vektörleri ile invaryant birim baz vektörlerinin paralel taşınmasının toplamıdır, diye tanımlanabilir.

$$\overrightarrow{e_\mu} = \overrightarrow{e_\mu}' + \nabla_{\vec{r}}\overrightarrow{e_\mu}' \qquad (2)$$

Bu ifade limit ile diferansiyel boyuta indirgenebilir.

$$\overrightarrow{e_\mu} = \lim_{\|\overrightarrow{e_\mu}'\| \to 0} \overrightarrow{e_\mu}' + \nabla_{\vec{r}}\overrightarrow{e_\mu}' \qquad (3)$$

Uzay-zamanın sadece zaman birimleri değişebilir, uzay birimleri değişmeden kalır. Yani,uzay bileşenlerinin birim baz vektörleri paralel taşınır ($\nabla_{\vec{r}}\overrightarrow{e_\iota}' = 0 \; yani \; \overrightarrow{e_\iota}' = \overrightarrow{e_\iota}$).

Birim baz vektörlerinin uzay-zaman koordinatlarına göre değişimi yani türevi, uzay-zamandaki zaman birim baz vektörlerinin yani zaman birimlerinin ne miktarda kısalacağını ifade eder.

$$\frac{\partial \overrightarrow{e_\mu}}{\partial x^\nu} \qquad (\mu, \nu = 0,1,2,3) \quad (4)$$

Bu ifade, skaler yaparak tüm terimlerin toplamını sayı olarak bulmak için metrik tensör ile çarpılır ve o da şuna eşittir:

$$g^{\mu\nu}\frac{\partial \overrightarrow{e_\mu}}{\partial x^\nu} = g^{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\mu\nu}\overrightarrow{e_\sigma} \qquad (5)$$

"σ" indisini açarak şu sonuç elde edilir:

$$g^{\mu\nu}\frac{\partial \overrightarrow{e_\mu}}{\partial x^\nu} = g^{\mu\nu}\Gamma^0_{\mu\nu}\left(\overrightarrow{e_0}' + \nabla_{\vec{r}}\overrightarrow{e_0}'\right) + g^{\mu\nu}\Gamma^i_{\mu\nu}\overrightarrow{e_\iota}'$$

$$= g^{\mu\nu}\Gamma^0_{\mu\nu}\nabla_{\vec{r}}\overrightarrow{e_0}' + g^{\mu\nu}\Gamma^0_{\mu\nu}\overrightarrow{e_0}' + g^{\mu\nu}\Gamma^i_{\mu\nu}\overrightarrow{e_\iota}' \quad (6)$$

İnvaryant birim baz vektörleri asla değişmeyeceği için türevleri sıfırdır.

$$g^{\mu\nu}\frac{\partial \overrightarrow{e_\mu}'}{\partial x^\nu} = g^{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\mu\nu}\overrightarrow{e_\sigma}' = 0 \qquad (7)$$

Bu ifade (6) ifadesinin son iki terimine yani sıfıra eşittir. Birim baz vektörlerinin türevi şöyle olur:

$$g^{\mu\nu}\Gamma^0_{\mu\nu}\nabla_{\vec{r}}\overrightarrow{e_0}' = g^{\mu\nu}\frac{\partial \overrightarrow{e_\mu}}{\partial x^\nu} = g^{00}\frac{\partial \overrightarrow{e_0}}{\partial x^0} + g^{ii}\frac{\partial \overrightarrow{e_\iota}}{\partial x^i} \qquad (8)$$

Bu ifadenin son terimindeki uzay bileşenlerinin türevi sıfırdır. Bu yüzden son terim sıfıra eşittir.
Christoffel gama sembollü ifadede "μ" ve "ν" indisleri sıfıra eşit olduğunda (5) ifadesine eşit olur.

$$g^{\mu\nu}\frac{\partial \overrightarrow{e_\mu}}{\partial x^\nu} = g^{\mu\nu}\Gamma^0_{\mu\nu}\nabla_{\vec{r}}\overrightarrow{e_0}' = g^{00}\Gamma^0_{00}\nabla_{\vec{r}}\overrightarrow{e_0}' \qquad (9)$$

Christoffel gama sembolü şuna eşittir:

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\sigma\tau}\left(\frac{\partial g_{\mu\tau}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\tau}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\tau}\right) \qquad (10)$$

(9) ifadesindeki Christoffel gama sembolünün metrik tensörler ile yazılımı şöyledir:

$$\Gamma^0_{00} = \frac{1}{2} g^{0\tau} \left(\frac{\partial g_{0\tau}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0\tau}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\tau} \right) \quad (11)$$

Metrik tensör köşegen bir matris olduğu için indislerinin aynı olmadığı durumlarda sıfırdır. Bu yüzden (τ=0) olmalıdır. Yani (11) ifadesi şöyle olur:

$$\Gamma^0_{00} = \frac{1}{2} g^{00} \left(\frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} \right) \quad (12)$$

Parantez içinde 2 terim birbirini yok eder.

$$\Gamma^0_{00} = \frac{1}{2} g^{00} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} \quad (13)$$

(5) ifadesi şuna eşit olmuş olur:

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial \overrightarrow{e_\mu}}{\partial x^\nu} = \frac{1}{2} \nabla_{\vec{r}} \overrightarrow{e_0}' g^{00} g^{00} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} \quad (14)$$

Bu ifadedeki indislere sıfır yerine şu harfleri koyarsak indislerin sıfır olduğu duruma eşit çıkar:

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial \overrightarrow{e_\mu}}{\partial x^\nu} = \frac{1}{2} \nabla_{\vec{r}} \overrightarrow{e_\sigma}' g^{\sigma\tau} g^{\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\tau} \quad (15)$$

Birim baz vektörlerinin uzay-zaman koordinatlarına göre türevi ($\frac{\partial \overrightarrow{e_\mu}}{\partial x^\nu}$) rank-2 özel bir tensör ($B_{\mu\nu}$) olarak tanımlanabilir. Bu, “Kısalma Tensörü”dür.

$$B_{\mu\nu} = \frac{\partial \overrightarrow{e_\mu}}{\partial x^\nu} = \partial_\nu \overrightarrow{e_\mu} \quad (16)$$

Kısalmayı ifade eden skaler şöyle olmuş olur:

$$\frac{1}{2} \nabla_{\vec{r}} \overrightarrow{e_\sigma}' \, g^{\sigma\tau} g^{\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\tau} = B_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = B_\mu{}^\mu = B \quad (17)$$

(17) ifadesindeki B, “Kısalma Skaleri”dir. Kısalma skaleri, birim baz vektörlerinin gözlemcinin konum vektörünce taşınması ile değişiminin miktarını veren bir ifadedir. Kısalma skalerinin ve tensörünün birimleri yoktur yani sayıdır.

2.2 Metrik Tensör

Göreliliğin olduğu bir durumda birimleri kısalmış uzay-zamanın metrik tensörü ile Minkowski uzay-zamanının metrik tensörü eşit olmaz($g_{\mu\nu} \neq \eta_{\mu\nu}$).

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \beta_{\mu\nu} \quad (18)$$

“$\beta_{\mu\nu}$”, kısalma metrik tensörüdür.Uzay-zamanın sadece zaman birimleri kısalır. Yani uzay birimleri değişmeden kalır.

$$\beta_{ij} = 0 \; yani \; g_{ij} = \eta_{ij} (i,j = 1,2,3) \quad (19)$$

Göreliliğin olduğu bir sistemde “$\beta_{00} \neq 0$” durumu gözlemlenir. Yani birimleri kısalmış uzay-zamanın metrik tensörü şöyledir:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1+\beta_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

2.3 Uygun Zaman

Uygun zaman şöyle tanımlanır:

$$d\tau^2 = \frac{ds^2}{c^2} = \frac{1}{c^2} dx^\mu dx^\nu g_{\mu\nu} \quad (21)$$

Bu metrik tensör, kısalmış uzay-zamanın metrik tensörü ($g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \beta_{\mu\nu}$) olarak yazılabilir.

$$d\tau^2 = \frac{1}{c^2} dx^\mu dx^\nu \eta_{\mu\nu} + \frac{1}{c^2} dx^\mu dx^\nu \beta_{\mu\nu} \quad (22)$$

Bu şuna eşittir:

$$d\tau^2 = dt^2 - \frac{\left(dx^i\right)^2}{c^2} + \beta_{00} dt^2 \quad (23)$$

Lorentz faktörü şöyledir:

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{dt} \sqrt{(1+\beta_{00}) dt^2 - \frac{(dx^i)^2}{c^2}} \quad (24)$$

“dt” kök içine alınabilir.

$$\frac{1}{\gamma} = \sqrt{(1+\beta_{00}) \left(\frac{dt}{dt}\right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dx^i}{dt}\right)^2} \quad (25)$$

Uzay koordinatlarının zamana göre türevi hızdır.

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{d\tau}{dt} = \sqrt{\beta_{00} + 1 - {}^{v^2}/_{c^2}} \quad (26)$$

Lorentz faktörü şöyle olmuş olur:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{\beta_{00} + 1 - {}^{v^2}/_{c^2}}} \qquad (27)$$

2.4 Lorentz Dönüşümleri

Lorentz dönüşümleri, uzay-zamandaki hareketli ve farklı referans sistemlerinin zamanı ve uzay koordinatlarını nasıl ölçtüğünü hesaplayan dönüşümlerdir. Lorentz dönüşümlerinden anlaşılacağı üzere uzay-zamandaki konumları farklı referans sistemleri, zamanı farklı ölçebilir ve farklı ölçme miktarları uzay-zamandaki konumundan konumuna farklılık gösterebilir.

Lorentz dönüşümleri Minkowski uzay-zamanından türer. Ama görelilik varsa uzay-zaman invaryant kalmaz, birimleri kısalır. Lorentz dönüşümlerinin uzay-zaman üzerinde olması gerekir. Birimleri kısalmış uzay-zaman için de Lorentz dönüşümleri değişmelidir.

Bilinen Lorentz dönüşümleri şöyledir:

$$t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - {}^{v^2}/_{c^2}}}, \qquad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - {}^{v^2}/_{c^2}}}, \qquad y' = y,$$
$$z' = z \qquad (28)$$

Göreliliğin olduğu durumdaki uzay-zamanın zaman birimleri kısalır. Bu kısalmayı hesaba katmak için Lorentz faktörü olmayan terime "β_{00}" eklenir.

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2} + \beta_{00}\right), \qquad x' = \gamma(x - vt + \beta_{00}),$$
$$y' = y\,, z' = z \qquad (29)$$

Boyutların uyması için ışık hızının katlarıyla ve dönüşümü yapılan değişkenle aynı birimde olmayan değişkenlerle çarpılır. Bunun sebebi; hareketli gözlemcinin ölçtüğü zaman ve koordinatların sıfır olduğu durumda $(t' = 0\,, x' = 0)$, hareketli gözlemcinin ölçtüğü zaman ve uzunluk $(t = {}^{vx}/_{c^2} - k\beta_{00}\ \ ve\ \ x = vt - k\beta_{00})$ Lorentz dönüşümlerinde yerine konduğunda sonsuza kadar yerine koyma imkanının ortaya çıkmasıdır. Bu imkan bazı çelişkilere yol açabilir.

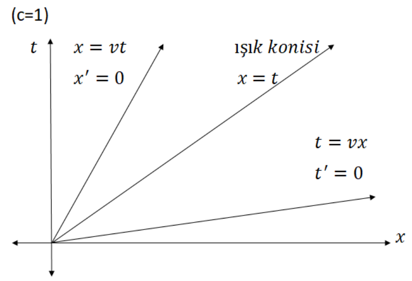
Yani, birimleri kısalmış uzay-zaman için Lorentz dönüşümleri şöyle olmalıdır:

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2} + \frac{x}{c}\beta_{00}\right),$$
$$x' = \gamma(x - vt + ct\beta_{00}), \ldots \qquad (30)$$

Bu dönüşümlerin de göreliliğin olmadığı durumda Galileo dönüşümlerine indirgenebilmesi gerekir.

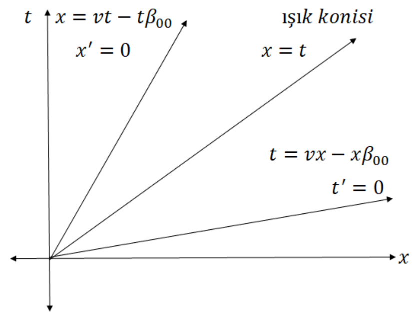
Göreliliğin olmadığı durumda $(\beta_{00} = 0)$ ve $(\frac{v}{c} = 0)$'dır. Yani Lorentz faktörü 1'e eşit olur ve Galileo dönüşümlerine indirgenmiş olur.

Lorentz dönüşümlerinin yapıldığı uzay-zaman grafiği şöyledir:



Şekil 2. Minkowski uzay-zaman grafiği

Birimleri kısalmış uzay-zaman için grafik şöyledir:



Şekil 3. Kısalmış uzay-zaman grafiği

Hareketli gözlemci için geçen zamanın ve konumun sıfır olduğu $(t' = 0\ veya\ x' = 0)$ durumlarda, hareketli gözlemcinin ölçtüğü zaman ve uzunluk $(t = \frac{vx}{c^2} - \frac{x}{c}\beta_{00}\,, x = vt - ct\beta_{00})$ Lorentz dönüşümlerinde yerine koyulduduğunda şöyle olur:

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}(vt - ct\beta_{00}) + \frac{1}{c}\beta_{00}(vt - ct\beta_{00})\right)$$
$$= \gamma\left(t - \frac{v^2}{c^2}t + \frac{v}{c}t\beta_{00} + \frac{v}{c}t\beta_{00} - t\beta_{00}\beta_{00}\right)$$
$$= t\gamma\left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{v}{c}\beta_{00} + \frac{v}{c}\beta_{00} - \beta_{00}\beta_{00}\right)$$
$$t' = t.\gamma[1 - ({}^{v}/_{c} - \beta_{00})^2] \qquad (31)$$

Bu, zaman kısalmasıdır.

Aynı işlem "x'" için de yapılabilir.

$$x' = \gamma\left(x - v\left(\frac{vx}{c^2} - \frac{x}{c}\beta_{00}\right) + c\beta_{00}\left(\frac{vx}{c^2} - \frac{x}{c}\beta_{00}\right)\right)$$

$$= \gamma\left(x - \frac{v^2}{c^2}x + \frac{v}{c}x\beta_{00} + \frac{v}{c}x\beta_{00} - x\beta_{00}\beta_{00}\right)$$

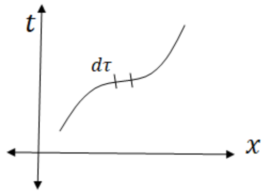
$$= x\gamma\left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{v}{c}\beta_{00} + \frac{v}{c}\beta_{00} - \beta_{00}\beta_{00}\right)$$

$$x' = x.\gamma[1 - ({}^{v}/_{c} - \beta_{00})^2] \qquad (32)$$

Bu da boy kısalmasıdır.

2.5 Rölativistik Parçacığın Dinamiği

Kısalmış uzay-zamandaki faz yörüngesi şöyledir:



Şekil 4. Kısalmış uzay-zamanda faz yörüngesi

Birimleri kısalmış uzay-zamanda eylem şöyledir:

$$S = k\int d\tau \qquad (33)$$

Burada "k" parçacığın özelliklerini ifade eder. Einstein'ın özel görelilik teorisinde ($k = -m$)'dir. Bu Minkowski uzay-zamanı için geçerlidir. Birimleri kısalmış uzay-zaman için şöyledir:

$$k = -m + m\beta_{00}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \qquad (34)$$

"$-m$" parçacığın kütlesidir. "$m\beta_{00}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2$" ise kütleli parçacığın uzay-zamanda bulunduğu konumdaki birimlerin ne miktarda kısaldığını ifade eder.

$$S = \int\left[-m + m\beta_{00}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2\right]d\tau$$

$$= \int -m\, d\tau + \int m\beta_{00}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 d\tau \qquad (35)$$

Tüm eylemler şu formatta yazılmalıdır:

$$S = \int \mathcal{L}\, dt \qquad (36)$$

Birimleri kısalmış uzay-zamandaki eylem de bu formatta yazılabilmelidir. İlk terimde zincir kuralı uygulanabilir. İkinci terimde ise karesi alınan ifade açık yazılırsa şöyle olur:

$$S = \int -m\frac{d\tau}{dt}dt + \int m\beta_{00}\frac{dt}{d\tau}dt$$

$$= \int\left(-m\frac{d\tau}{dt} + m\beta_{00}\frac{dt}{d\tau}\right)dt \quad (37)$$

Parantez içindeki ifade lagranjiyendir. Yani, birimleri kısalmış uzay-zamanda rölativistik hızlarda hareket eden parçacıkların lagranjiyeni şöyledir:

$$\mathcal{L} = -m\frac{d\tau}{dt} + m\beta_{00}\frac{dt}{d\tau} \qquad (38)$$

Bu lagranjiyenEuler-Lagrange denkleminde yerine koyularak hareket denklemi elde edilebilir.

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial\dot{x}^i}\left(m\beta_{00}\frac{dt}{d\tau} - m\frac{d\tau}{dt}\right)\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^i}\left(m\beta_{00}\frac{dt}{d\tau} - m\frac{d\tau}{dt}\right) \qquad (39)$$

Uzun matematiksel işlemler sonucu şöyle bir sonuç çıkar:

$$\frac{d}{dt}\left[m\frac{dx^\mu}{d\tau}\left(1 - \beta_{00}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2\right)\right] = 0 \qquad (40)$$

Parantez içindeki ifade korunumlurölativistik momentumdur.

$$P^{\mu'} = m\frac{dx^\mu}{d\tau}\left(1 - \beta_{00}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2\right), \frac{dP^{\mu'}}{dt} = 0 \quad (41)$$

Gerçek rölativistik momentum korunumlu olmamalıdır çünkü hız arttıkça sabit kütleli cismin momentumu artar ama rölativistik momentumda hız arttıkça momentum hem artar hem azalır. Azaldığı için rölativistik momentum korunumlu olmamalıdır. Rölativistik momentum, normal momentumun Lorentz faktörüyle çarpımı şeklinde yazılabilir.

$$P^\mu = \gamma m\frac{dx^\mu}{dt} \qquad (42)$$

Hamiltoneyn bir sistemin toplam enerjisidir ve şöyle bulunur:

$$H = \sum_i P_i \dot{q}_i - \mathcal{L} \qquad (43)$$

Burada momentum, korunumlu olmayan rölativistik momentumdur. Lagranjiyen, rölativistik parçacığın lagranjiyenidir. Yani şöyledir:

$$H = \frac{mv^2}{\sqrt{\beta_{00} + 1 - {v^2}/{c^2}}} + m\sqrt{\beta_{00} + 1 - {v^2}/{c^2}} - \frac{m\beta_{00}}{\sqrt{\beta_{00} + 1 - {v^2}/{c^2}}} \qquad (44)$$

(c=1) sisteminde hamiltonyen şuna eşittir:

$$E \equiv H = \frac{mv^2}{\sqrt{\beta_{00} + 1 - v^2}} + \frac{m(\beta_{00} + 1 - v^2)}{\sqrt{\beta_{00} + 1 - v^2}} - \frac{m\beta_{00}}{\sqrt{\beta_{00} + 1 - v^2}} = \frac{m}{\sqrt{\beta_{00} + 1 - v^2}}$$

$$E = \frac{m}{\sqrt{\beta_{00} + 1 - v^2}} \qquad (45)$$

Boyut analizi yapılınca enerji şuna eşit olur:

$$\frac{mc^2}{\sqrt{\beta_{00} + 1 - {v^2}/{c^2}}} = mc^2\left(\beta_{00} + 1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \qquad (46)$$

Değişken değiştirme metodu ile $(u = {v^2}/{c^2} - \beta_{00})$ denilebilir ve şöyle olmuş olur:

$$E = mc^2(1 - u)^{-1/2} \qquad (47)$$

Bu ifade binom açılımı ile şöyle yazılabilir:

$$E = mc^2 + \frac{1}{2}umc^2 + \cdots \qquad (48)$$

"u" yerine yazılınca enerji şuna eşit çıkar:

$$E = mc^2 + \frac{1}{2}mc^2\left({v^2}/{c^2} - \beta_{00}\right) + \cdots$$

$$= mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}\beta_{00}mc^2 + \cdots$$

$$= mc^2\left(1 - \frac{1}{2}\beta_{00}\right) + \frac{1}{2}mv^2 + \cdots \qquad (49)$$

2. terim kinetik enerjidir. 1. terim ise kütlenin içindeki enerjidir.

$$E = mc^2\left(1 - \frac{1}{2}\beta_{00}\right) \qquad (50)$$

Einstein'ın kütle-enerji eşitliği formülünün tek hatası göreliliği ifade eden bir terimin olmamasıdır. Einstein bu eşitliğe ulaşmadan birkaç adım önce göreli enerjiye ulaşıyor ama sonda elde ettiği formülde görelilikle ilgili bir terim yok. Bu yüzden doğru kütle-enerji eşitliği formülü (50) denklemidir. Göreliliğin olmadığı bir durumda ($\beta_{00} = 0$)'dır ve Einstein'ın kütle-enerji eşitliği formülüne indirgenir.

2.6 Alan Denklemleri

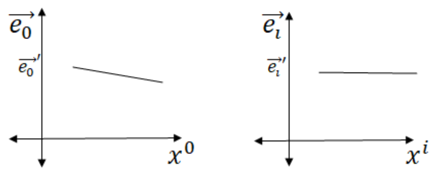
Birimleri kısalmış uzay-zamanın birimlerinin ne miktarda kısaldığını ifade eden bir alan denklemi olmalıdır. Einstein'ın denklemindeki gibi bu denklemin de bir tarafı uzay-zamandaki değişimi anlatan bir ifade olması gerekir. Diğer tarafı ise o sistemdeki fiziki olayın uzay-zamanı değiştirme miktarını anlatan bir ifade olması gerekir. Uzay-zamandaki değişim, birimlerinin kısalmasıdır. Yani, uzay-zamanı ve değişimini anlatan ifade kısalma skaleridir. Yani, genelleştirilmiş alan denklemi şöyle olmalıdır:

$$B = \frac{1}{2}\nabla_{\vec{r}}\vec{e_\sigma}'\, g^{\sigma\tau} g^{\mu\nu}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\tau} = -K \qquad (51)$$

Bu eşitliğin sağ tarafındaki ifadenin negatif işaretli olmasının sebebi, uzay-zamanı ve değişimini anlatan ifadenin birim baz vektörlerinin koordinatlara göre türevinden türemesidir.

$$B = g^{\mu\nu}\frac{\partial \vec{e_\mu}}{\partial x^\nu} = \frac{1}{2}\nabla_{\vec{r}}\vec{e_\sigma}'\, g^{\sigma\tau} g^{\mu\nu}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\tau} = -K \quad (52)$$

Birim baz vektörlerinin değişimi şematize edilebilir.



$$\frac{\partial \vec{e_0}}{\partial x^0} = -|a| \quad , \quad \frac{\partial \vec{e_i}}{\partial x^i} = \frac{\partial \vec{e_i}'}{\partial x^i} = 0$$

Şekil 5. Birim baz vektörlerinin değişim grafiği

2.6.1 Kurt İdentity

Metrik tensörler ile Kronecker delta fonksiyonu arasında bir eşitlik vardır.

$$g_{\sigma\tau} g^{\rho\tau} = \delta_\sigma^\rho \tag{53}$$

İndisleri farklı 2 metrik tensörün çarpımı rank-4 bir ifade olsun.

$$g^{\mu\nu} g^{\sigma\tau} = A^{\mu\nu\sigma\tau} \tag{54}$$

İki taraf da "$\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\tau}$" ile çarpılırsa sonuç değişmez.

$$g^{\mu\nu} g^{\sigma\tau} \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\tau} = A^{\mu\nu\sigma\tau}\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\tau} \tag{55}$$

Bu şuna eşittir:

$$g_{\rho\tau} g^{\sigma\tau} = \delta_\rho^\sigma = A^{\mu\nu\sigma\tau}\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\tau} \tag{56}$$

İki taraf da "$\delta^{\mu\rho}\delta^{\nu\tau}$" ile çarpılırsa sonuç değişmez.

$$\delta_\rho^\sigma \delta^{\mu\rho}\delta^{\nu\tau} = A^{\mu\nu\sigma\tau}\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\tau}\delta^{\mu\rho}\delta^{\nu\tau} \tag{57}$$

"$\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\tau}\delta^{\mu\rho}\delta^{\nu\tau} = \delta_\mu^\mu \delta_\nu^\nu = 1$"dir ve eşitlik şöyle olur:

$$\delta_\rho^\sigma \delta^{\mu\rho}\delta^{\nu\tau} = A^{\mu\nu\sigma\tau} = \delta^{\mu\sigma}\delta^{\nu\tau} = g^{\mu\nu} g^{\sigma\tau} \tag{58}$$

Bu "Kurt İdentity"dir.

"Kurt İdentity" kullanılarak kısalma skaleri tekrardan yazılabilir.

$$\frac{1}{2}\nabla_{\vec{r}}\overrightarrow{e_\sigma}' \, g^{\sigma\tau} g^{\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\tau} = \frac{1}{2}\nabla_{\vec{r}}\overrightarrow{e_\sigma}' \delta^{\mu\sigma}\delta^{\nu\tau} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\tau} \tag{59}$$

"$\delta^{\mu\sigma}\delta^{\nu\tau}$" ifadesi koordinatlara bağlı olmadığından türevin içine girebilir.

$$B = \frac{1}{2}\nabla_{\vec{r}}\overrightarrow{e_\sigma}' \frac{\partial\left(g_{\mu\nu}\delta^{\mu\sigma}\delta^{\nu\tau}\right)}{\partial x^\tau} \tag{60}$$

Yani Kısalma Skaleri şöyle de yazılabilir:

$$B = \frac{1}{2}\nabla_{\vec{r}}\overrightarrow{e_\sigma}' \frac{\partial g^{\sigma\tau}}{\partial x^\tau} \tag{61}$$

2.6.2 Birimleri Kısalmış Uzay-zamanda Eylem

Birimleri kısalmış uzay-zamanda eylem şöyle tanımlanır:

$$S = \int_V \mathcal{L} \; d^4V \tag{62}$$

"$d^4V = \sqrt{-g}\, d^4x$" olduğu biliniyor.

$$S = \int \mathcal{L}\sqrt{-g}\, d^4x \tag{63}$$

Lagranjiyen, uzay-zamanın kısalmış uzay-zaman olduğunu belirtmek için kısalma skaleri olmalıdır.

$$S = \int B\sqrt{-g}\, d^4x \tag{64}$$

Kısalma skaleri açık halde yazılabilir.

$$S = \frac{1}{2}\int \nabla_{\vec{r}}\overrightarrow{e_\sigma}' \frac{\partial g^{\sigma\tau}}{\partial x^\tau}\sqrt{-g}\; d^4x \tag{65}$$

Minimum eylem prensibi kullanılır.

$$\delta S = \frac{1}{2}\int \delta\left(\nabla_{\vec{r}}\overrightarrow{e_\sigma}' \frac{\partial g^{\sigma\tau}}{\partial x^\tau}\sqrt{-g}\right) d^4x = 0 \tag{66}$$

Bunun açık hali şöyledir:

$$\frac{1}{2}\int \left[\left(\delta\nabla_{\vec{r}}\overrightarrow{e_\sigma}'\right)\frac{\partial g^{\sigma\tau}}{\partial x^\tau}\sqrt{-g} + \left(\delta\frac{\partial g^{\sigma\tau}}{\partial x^\tau}\right)\nabla_{\vec{r}}\overrightarrow{e_\sigma}'\sqrt{-g} + \left(\delta\sqrt{-g}\right)\nabla_{\vec{r}}\overrightarrow{e_\sigma}' \frac{\partial g^{\sigma\tau}}{\partial x^\tau}\right] d^4x \tag{67}$$

"$\delta\nabla_{\vec{r}}\overrightarrow{e_\sigma}'$" ifadesinde delta ile kovaryant türev komite ederler.

$$\delta\nabla_{\vec{r}}\overrightarrow{e_\sigma}' = \nabla_{\vec{r}}\left(\delta\overrightarrow{e_\sigma}'\right) = \nabla_{\vec{r}}\left(\frac{\partial\overrightarrow{e_\sigma}'}{\partial x^\mu}\delta x^\mu\right) \tag{68}$$

İnvaryant birim baz vektörlerinin türevleri sıfır olduğundan integralin bu terimi sıfıra eşittir.

İntegralin ikinci teriminde delta ile türev komite ederler.

$$\delta\frac{\partial g^{\sigma\tau}}{\partial x^\tau} = \frac{\partial\left(\delta g^{\sigma\tau}\right)}{\partial x^\tau} \tag{69}$$

İkinci terim şöyle olur:

$$\frac{\partial\left(\delta g^{\sigma\tau}\right)}{\partial x^\tau}\nabla_{\vec{r}}\overrightarrow{e_\sigma}'\sqrt{-g} \tag{70}$$

Bu ifadeye kısmi integrasyon uygulanırsa şöyle olur:

$$-\frac{\partial\left(\nabla_{\vec{r}}\overrightarrow{e_\sigma}'\sqrt{-g}\right)}{\partial x^\tau}\,\delta g^{\sigma\tau} \tag{71}$$

Bu şuna eşittir:

$$-\frac{\partial\nabla_{\vec{r}}\overrightarrow{e_\sigma}'}{\partial x^\tau}\sqrt{-g}\delta g^{\sigma\tau}-\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^\tau}\nabla_{\vec{r}}\overrightarrow{e_\sigma}'\delta g^{\sigma\tau} \tag{72}$$

İlk terimde kısmi türev ile kovaryant türev komite edip o terimi sıfıra götürürler. İkinci terimdeki "$\delta g^{\sigma\tau}$" ifadesi şöyle yazılabilir:

$$\delta g^{\sigma\tau}=\frac{\partial g^{\sigma\tau}}{\partial x^\mu}\delta x^\mu \tag{73}$$

Yani minimum eylemin ikinci teriminin son hali şöyle olur:

$$-\nabla_{\vec{r}}\overrightarrow{e_\sigma}'\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^\tau}\frac{\partial g^{\sigma\tau}}{\partial x^\mu}\delta x^\mu \tag{74}$$

Minimum eylemin üçüncü terimindeki delta da zincir kuralı ile şöyle yazılabilir:

$$\delta\sqrt{-g}=\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^\mu}\delta x^\mu \tag{75}$$

Yani üçüncü terim şöyle olur:

$$\nabla_{\vec{r}}\overrightarrow{e_\sigma}'\frac{\partial g^{\sigma\tau}}{\partial x^\tau}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^\mu}\delta x^\mu \tag{76}$$

Minimum eylem şöyle olmuş olur:

$$\delta S=\frac{1}{2}\int\left(\nabla_{\vec{r}}\overrightarrow{e_\sigma}'\frac{\partial g^{\sigma\tau}}{\partial x^\tau}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^\mu}\delta x^\mu - \nabla_{\vec{r}}\overrightarrow{e_\sigma}'\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^\tau}\frac{\partial g^{\sigma\tau}}{\partial x^\mu}\delta x^\mu\right)d^4x$$

$$\delta S=\int\frac{1}{2}\nabla_{\vec{r}}\overrightarrow{e_\sigma}'\delta x^\mu\left(\frac{\partial g^{\sigma\tau}}{\partial x^\tau}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^\tau}\frac{\partial g^{\sigma\tau}}{\partial x^\mu}\right)d^4x=0 \tag{77}$$

"$\frac{1}{2}\nabla_{\vec{r}}\overrightarrow{e_\sigma}'\delta x^\mu\neq 0$" olduğundan parantez içindeki ifade sıfıra eşittir.

$$\frac{\partial g^{\sigma\tau}}{\partial x^\tau}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^\mu}=\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^\tau}\frac{\partial g^{\sigma\tau}}{\partial x^\mu} \tag{78}$$

Minimum eylemin sonuçlarından biri budur. Minimum eylem farklı şekillerde de yazılabilir. Önceki aşamalarda farklı işlemler uygulayıp başka sonuçlar da çıkarılabilir. ($\delta\sqrt{-g}=\frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta}=-\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta}$) eşitlikleri zaten biliniyor.

(77) ifadesindeki "$\delta\sqrt{-g}$" ve "$\delta g^{\sigma\tau}$" açık halde şöyle yazılır:

$$\delta S=\int\frac{1}{2}\nabla_{\vec{r}}\overrightarrow{e_\sigma}'\left(-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\sqrt{-g}\frac{\partial g^{\sigma\tau}}{\partial x^\tau}\delta g^{\mu\nu} - \frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^\tau}\frac{\partial g^{\sigma\tau}}{\partial x^\beta}\delta x^\beta\right)d^4x \tag{79}$$

İkinci terim için (78) eşitliği kullanılırsa şöyle olur:

$$-\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^\tau}\frac{\partial g^{\sigma\tau}}{\partial x^\beta}\delta x^\beta=-\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^\beta}\frac{\partial g^{\sigma\tau}}{\partial x^\tau}\delta x^\beta \tag{80}$$

Parantez içindeki "$\frac{\partial g^{\sigma\tau}}{\partial x^\tau}$" ifadesi parantez dışına çıkar ve parantez dışındaki ifade kısalma skaleri olmuş olur.

$$\delta S=\int B\left(-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}-\delta\sqrt{-g}\right)d^4x \tag{81}$$

"$\delta\sqrt{-g}$" ifadesinin açık halde yazımı şöyledir:

$$\delta S=\int B\left(-\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta}\right)d^4x \tag{82}$$

"$-\frac{1}{2}\sqrt{-g}$" ifadesi de parantez dışına çıkabilir.

$$\int -B\frac{1}{2}\sqrt{-g}\left(g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}+g^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta}\right)d^4x \tag{83}$$

Parantez içindeki ilk terimi "$\delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta}\delta^{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta}=1$" ile çarpmak sonucu değiştirmez.

$$g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta}\delta^{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta}=g^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta} \tag{84}$$

İntegral şöyle olmuş olur:

$$\int -B\,\frac{1}{2}\sqrt{-g}\left(g^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta}\right) d^4x \quad (85)$$

Minimum eylem şöyledir:

$$\delta S = \int -B\,\sqrt{-g}\;g^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta}\,d^4x$$

$$= \int -2B\;\delta\sqrt{-g}\,d^4x = 0 \qquad (86)$$

"$\delta\sqrt{-g}$" sıfıra eşit değildir. Bu yüzden "$B = 0$"dır ve bu, vakumda kısalma skalerinin sıfıra eşit olduğunu gösterir.

$$\delta S = \int \frac{\delta S}{\delta g_{\alpha\beta}}\delta g_{\alpha\beta}\,d^4x$$

$$= \int -B\,\sqrt{-g}\;g^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta}\,d^4x \quad (87)$$

(87) ifadesinden yola çıkarak "$\frac{\delta S}{\delta g_{\alpha\beta}}$" şuna eşittir:

$$\frac{\delta S}{\delta g_{\alpha\beta}} = -B\,\sqrt{-g}\;g^{\alpha\beta} \qquad (88)$$

Buradan şuna ulaşılır:

$$B\;g^{\alpha\beta} = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S}{\delta g_{\alpha\beta}} \qquad (89)$$

İki tarafı da "$g_{\alpha\beta}$"ile çarpmak sonucu değiştirmez.

$$B\;g^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta} = B\delta^{\alpha}_{\alpha} = B = -\frac{1}{\sqrt{-g}}g_{\alpha\beta}\frac{\delta S}{\delta g_{\alpha\beta}} \quad (90)$$

(51) ifadesine dayanarak "K" şuna eşittir:

$$-B = K = \frac{1}{\sqrt{-g}}g_{\alpha\beta}\frac{\delta S}{\delta g_{\alpha\beta}} \qquad (91)$$

Eylemin(S) türüne göre "K" değer alır. Eylem özel görelilik sisteminin eylemi ise ona göre eylem yazılıp özel görelilik teorisi için alan denklemi elde edilir. Aynı işlem genel görelilik teorisi için de uygulanır ve alan denklemi elde edilir.

2.6.3 Özel Görelilik Teorisi İçin Alan Denklemi

Özel görelilik sisteminin eylemi şöyleydi:

$$S_{\ddot{O}G} = \int\left[-m + m\beta_{00}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2\right]d\tau \qquad (92)$$

Özel görelilik teorisinde zamanı göreli yapan değişken kütle değil hız olduğu için kütle sabit sayı görevi görür. Bu yüzden integralden çıkarmanın eyleme bir etkisi olmaz.

$$S = \int\left[\beta_{00}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - 1\right]d\tau$$

$$= \int\left[\beta_{00}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - 1\right]\frac{d\tau}{\delta g_{\mu\nu}}\delta g_{\mu\nu} \qquad (93)$$

İki türlü de türev olarak kullanılacağı için "$d\tau \equiv \delta\tau$" denebilir.

İntegral içindeki ifade şudur:

$$\frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} = \left[\beta_{00}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - 1\right]\frac{\delta\tau}{\delta g_{\mu\nu}} \qquad (94)$$

"K" şöyle olur:

$$K = \frac{1}{\sqrt{-g}}g_{\mu\nu}\left[\beta_{00}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - 1\right]\frac{\delta\tau}{\delta g_{\mu\nu}} \qquad (95)$$

"τ"nun olduğu türevin açık hali şöyledir:

$$\frac{\delta\tau}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{1}{c}\frac{\delta\sqrt{g_{\mu\nu}\delta x^{\mu}\delta x^{\nu}}}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{1}{2c}\frac{\delta x^{\mu}\delta x^{\nu}}{\sqrt{g_{\mu\nu}\delta x^{\mu}\delta x^{\nu}}} \quad (96)$$

"K"şöyle olmuş olur:

$$K = \frac{1}{2c\sqrt{-g}}\left[\beta_{00}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - 1\right]\frac{g_{\mu\nu}\delta x^{\mu}\delta x^{\nu}}{\sqrt{g_{\mu\nu}\delta x^{\mu}\delta x^{\nu}}}$$

$$= \frac{1}{2c\sqrt{-g}}\left[\beta_{00}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - 1\right]\sqrt{g_{\mu\nu}\delta x^{\mu}\delta x^{\nu}} \quad (97)$$

Kök içindeki ifade şudur:

$$\sqrt{(1+\beta_{00})c^2\delta t^2 - \delta x^i\cdot\delta x^i} \qquad (98)$$

Zincir kuralı ile ifade şuna eşit olur:

$$\frac{\sqrt{(1+\beta_{00})c^2\delta t^2-\delta x^i\cdot\delta x^i}}{\delta t}\delta t$$

$$=\sqrt{(1+\beta_{00})c^2\left(\frac{\delta t}{\delta t}\right)^2-\left(\frac{\delta x^i}{\delta t}\right)^2}\ \delta t \tag{99}$$

Bu şuna eşittir:

$$\sqrt{1+\beta_{00}-\delta\frac{v^2}{c^2}}\ \delta t=\frac{\delta\tau}{\delta t}\delta t=\delta\tau \tag{100}$$

"K" şöyle olmuş olur:

$$K=\frac{1}{2\sqrt{-g}}\left[\beta_{00}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2-1\right]\delta\tau \tag{101}$$

Birimlerinin uyması için ($^1/_{sn}$) biriminden "κ" ile çarpılmalıdır.

Özel görelilik teorisi için alan denklemi şöyledir:

$$B=-\frac{1}{2\sqrt{-g}}\kappa_{\text{ÖG}}\left[\beta_{00}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2-1\right]\delta\tau \tag{102}$$

2.6.4 Genel Görelilik Teorisi İçin Alan Denklemi

Genel görelilik teorisinde uzay-zamandaki eylem formatı şöyledir:

$$S_{GG}=\int\mathcal{L}\ d^4V \tag{103}$$

Burada lagranjiyen($\mathcal{L}$) için maddeyi ifade eden skaler nicelik "$T=g^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta}$"dır.

$$S=\int T\,d^4V=\int T_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}\,d^4V \tag{104}$$

Minimum eylem şöyledir:

$$\delta S=\int\delta T\,d^4V=\int\delta\left(T_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}\right)d^4V \tag{105}$$

"d^4V"nin şöyle de yazılabilir:

$$d^4V=\sqrt{-g}\,d^4x \tag{106}$$

Minimum eylem, zincir kuralı uygulanarak şöyle yazılabilir:

$$\delta S=\int\frac{\delta T}{\delta g_{\mu\nu}}\sqrt{-g}\ d^4x\,\delta g_{\mu\nu} \tag{107}$$

İki taraf da "$\delta g_{\mu\nu}$" ile bölünürse sonuç değişmez.

$$\frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}}=\int\frac{\delta T}{\delta g_{\mu\nu}}\sqrt{-g}\ d^4x \tag{108}$$

İntegral içindeki türev şöyle olur:

$$\frac{\delta\left(T^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}\right)}{\delta g_{\mu\nu}}=g_{\alpha\beta}\frac{\delta T^{\alpha\beta}}{\delta g_{\mu\nu}}+T^{\alpha\beta}\frac{\delta g_{\alpha\beta}}{\delta g_{\mu\nu}} \tag{109}$$

"$\frac{\delta g_{\alpha\beta}}{\delta g_{\mu\nu}}$" türevi dört indisli Kronecker delta fonksiyonu olarak tanımlanabilir.

$$\frac{\delta g_{\alpha\beta}}{\delta g_{\mu\nu}}=\delta_{\alpha\beta}^{\mu\nu}=\begin{cases}1\ ; & \mu,\nu=\alpha,\beta\\ 0\ ; & \mu,\nu\neq\alpha,\beta\end{cases} \tag{110}$$

Yani türev şöyle olur:

$$g_{\alpha\beta}\frac{\delta T^{\alpha\beta}}{\delta g_{\mu\nu}}+T^{\alpha\beta}\delta_{\alpha\beta}^{\mu\nu}=g_{\alpha\beta}\frac{\delta T^{\alpha\beta}}{\delta g_{\mu\nu}}+T^{\mu\nu} \tag{111}$$

Eylemin türevi şu çıkar:

$$\frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}}=\int\left(g_{\alpha\beta}\frac{\delta T^{\alpha\beta}}{\delta g_{\mu\nu}}+T^{\mu\nu}\right)\sqrt{-g}\ d^4x \tag{112}$$

Genel göreliliğin etkin olduğu bir sistemi için "K" şöyle tanımlanır:

$$K=\int\frac{1}{\sqrt{-g}}g_{\mu\nu}\left(g_{\alpha\beta}\frac{\delta T^{\alpha\beta}}{\delta g_{\mu\nu}}+T^{\mu\nu}\right)\sqrt{-g}\ \ d^4x$$

$$=\int g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta}\frac{\delta T^{\alpha\beta}}{\delta g_{\mu\nu}}\ d^4x+\int g_{\mu\nu}T^{\mu\nu}\ \ d^4x \tag{113}$$

İlk terimde "Kurt İdentity" kullanılabilir.

$$\int g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta}\frac{\delta T^{\alpha\beta}}{\delta g_{\mu\nu}}\ d^4x=\int\delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta}\frac{\delta T^{\alpha\beta}}{\delta g_{\mu\nu}}\ d^4x$$

$$=\int\frac{\delta\left(T^{\alpha\beta}\delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta}\right)}{\delta g_{\mu\nu}}d^4x=\int\frac{\delta T_{\mu\nu}}{\delta g_{\mu\nu}}d^4x \tag{114}$$

(113)'ün ikinci teriminde ise integral içindeki ifade stres-enerji tensörünün izidir(T) ve "K" şöyle olur:

$$K = \int \left(\frac{\delta T_{\mu\nu}}{\delta g_{\mu\nu}} + T \right) d^4x \qquad (115)$$

(115) ifadesinin, birimsiz yani sayı olabilmesi için ($\frac{sn^2}{kg.m^3}$) biriminde olan "κ" ile çarpılması gerekmektedir.

Genel görelilik teorisi için alan denklemi şöyle olur:

$$B = -\kappa_{GG} \int \left(\frac{\delta T_{\mu\nu}}{\delta g_{\mu\nu}} + T \right) d^4x \qquad (116)$$

2.6.5 Genel Alan Denklemi

Olası diğer, şu an için bilinmeyen, görelilik çeşitleri için de hepsini kapsayan "Genel Alan Denklemi" şöyledir:

$$B = -\sum K = -\sum \left| \frac{1}{\sqrt{-g}} g_{\alpha\beta} \frac{\delta S}{\delta g_{\alpha\beta}} \right| \qquad (117)$$

3. Bulgular

Bu alternatif ve kapsamlı görelilik teorisi; Einstein'ın teorilerinin başardıklarını başarıp bazı çelişkileri de ortadan kaldıran, iki görelilik teorisini tek başlık altında aynı uzayda değerlendiren yeni bir teoridir. Einstein göreliliğinden en büyük farkı uzay-zaman modellemesidir. Bu yeni modelleme bu zamana kadar yapılan tüm deneyleri doğrulayıp teorik bazı çelişkileri yok eder.

Kısalmış uzay-zaman modellemesinin doğruladığı deneylerden biri kütleçekimselmerceklenmedir. Kütleçekimselmerceklenme, jeodezik boyunca ilerleyen bir ışımanın uzay-zaman birimlerinin değişmesiyle bükülmesidir. Bu değişim bükülme de olsa kısalma da olsa jeodezik bükülür. Işıma da jeodezik boyunca ilerlediği için bükülmüş olur ve kısalmış uzay-zaman modellemesinde de kütleçekimselmerceklenme görülür.

Diğer bir deney ise kütleçekimsel kırmızıya kaymadır. Burada da yine ışıma, jeodezik boyunca düz bir yörünge izlemeye çalışırken değişmiş uzay-zaman yüzünden bükülür ve bükülmeye karşı koymak için enerji vermesi ile kırmızıya kaymasıdır. Diyagonal şekilde jeodezik boyunca ilerleyen bir ışıma birimleri kısalmış uzay-zaman yüzünden bükülerek ilerler ve buna karşı koymak için enerji vererek kırmızıya kayar.

Başka bir gözlem ise kütleçekim dalgalarıdır. Birimleri kısalmış 2 boyutlu uzay-zamanda modellemesi diğer gözlemlere göre daha kompakt olsa da modellenebilir. Halkalar şeklinde merkezden uzaklaştıkça birimleri daha az kısaltan kütleçekim dalgalarının yayıldığı bir sistem iki boyutlu uzay-zamanda modellenebilir.

Bu yeni teorinin başarıp kaldırdığı çelişkiler vardır. Bunlardan en önemlisi uzay-zamanın sadece zaman birimlerinin kısalmasıdır. 1. bölümde açıklandığı gibi uzay birimlerinin değişmesi en basit gözlemlere dahi uymuyor. Diğer bir çelişki ise kütle enerji eşitliği formülü. Einstein'ın çok bilinen "$E = mc^2$" denkleminin hatası, içinde göreliliği ifade eden bir terimin olmamasıdır. Bu denkleme göreli enerji mantalitesinden yani "$E = \gamma mc^2$" eşitliğinden ulaşılıyor. Bu eşitlikte hız arttığında enerjinin artışı binom açılımındaki kinetik enerji terimindeki artış ile aynı miktarda olmuyor. Bir miktar enerji tanımlanmıyor. Bu enerji, kütlenin içindeki enerjinin de görelilikten etkilenmesi ile açıklanır. Bu yüzden kütle-enerji eşitliği formülünde göreliliği temsil eden bir terim olmalıdır. Bu formül 2. bölümdeki (50) eşitliğidir.

4. Tartışma ve Sonuç

Fiziğin görelilik alanı yaklaşık 100 yıllık tarihi olan genç bir alandır. Hemen hemen aynı zamanlarda ortaya çıkan bir diğer fizik dalı ise kuantum mekaniğidir. Bu 100 yıllık süreçte kuantum mekaniği göreliliğe nazaran fizikçilere daha cazip gelen bir dal olmuştur. Bu yüzden görelilik alanı bakir kalmış bir alan olarak günümüze kadar gelmiştir. Görelilik üzerine elbette büyük çalışmalar yapıldı fakat bunların çoğu göreliliğin temelini sorgulayıp düzeltmekten çok temeli geliştirmeye yönelik çalışmalar oldu. Doğruluğu profesyonelce pek sorgulanmamış bu bakir dal da kusursuz değildir. Çok fazla kusuru olmasa bile bir kusuru dahi düzeltmek fiziği öncesinden daha iyi öğrenmemize sebep olur. İnsanoğlunun doğanın işleyişini kusursuz anlamasına bir adım daha yaklaştırmış olur.

Bu yeni teori gelişmeye çok müsaittir. Düzeltilmesi gereken yanlışları, henüz bulunmamış ifadeleri vardır ama bu eksikler Einstein'ın teorilerine göre daha azdır.

Bu yeni teorinin sonuçlarından biri de özel görelilik sisteminde limit durumdur. Işık hızında hareket eden bir gözlemci için zaman ve uzunluk şöyle olur:

$$t' = \lim_{v \to c} t.\gamma[1 - ({}^{v}/_{c} - \beta_{00})^2] = t.-3i \qquad (1)$$

Yani ışık hızına ulaşan bir gözlemci için zaman reel küme içerisinde olmayacaktır.

Aynı şey uzunluk için de geçerlidir.

$$x' = \lim_{v \to c} x.\gamma[1 - ({}^{v}/_{c} - \beta_{00})^2] = x.-3i \qquad (2)$$

Işık hızına ulaşan bir gözlemcinin uzunluğu reel küme içerisinde değildir. Komplekstir.

Teşekkür
Bu çalışmalarımı ergenlikteki ilgi görme çabası olarak görmeyip destek veren herkese sonsuz teşekkür ederim.

5. Kaynaklar

Einstein, A, 2014, Göreliliğin Anlamı, 3. Baskı, Çev. Ercüment Akat, Alfa Yayıncılık, 21-178.

İnternet Kaynakları

1-
https://youtube.com/playlist?list=PLJHszsWbB6hpk5h8lSfBkVrpjsqvUGTCx

2-https://youtube.com/playlist?list=PLPPSIjDe9T-81p1CjN49_Zi_L4-NQorTp

3-
https://youtube.com/playlist?list=PLUl4u3cNGP629n_3fX7HmKKgin_rqGzbx

4-
https://youtube.com/playlist?list=PLqNc_xpYGu76BiTPVqeKgTeCjH7H-5R42