Ordu Üniv. Bil. Tek. Derg., Cilt:6, Sayı:1, 2016,54-66/Ordu Univ. J. Sci. Tech., Vol:6, No:1,2016,54-66

BÜYÜME EĞRİLERİNİN TAHMİNİNDE KULLANILAN BAZI SİGMOİDAL MODELLER VE ELDE EDİLEN BİYOLOJİK PARAMETRELER: BERTALANFFY MODELİ ÖRNEĞİ

Volkan ODA[1], Mehmet KORKMAZ[2*], Elif ÖZKURT[3]

[1] Giresun Üniversitesi, Tirebolu Mehmet Bayrak M.Y.O., Maliye Programı, Tirebolu/GİRESUN
[2] Ordu Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, ORDU
[3] Ordu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik A.B.D., ORDU

Özet

Bu çalışmada, doğrusal olmayan sigmoidal büyüme modellerine ait parametrelerin, mekanik modellere ait biyolojik anlamlı parametrelere nasıl dönüştürüldüğü üzerinde durulmuştur. Bu amaçla kullanılan doğrusal olmayan sigmoidal büyüme modellerinden Logistic, Gompertz ve Bertalanffy modellerine ait birinci ve ikinci türevler yardımıyla hesaplanan biyolojik anlamlı parametrelerin değerleri tablolar halinde verilmiştir. Ayrıca, kullanılan modellerden biri olan Bertalanffy modelinin mekanik modele nasıl dönüştüğü adım adım açıklanmıştır.

Anahtar kelimeler: Büyüme modelleri; sigmoidal model; mekanik model

SOME SİGMOİDAL MODELS USED İN ESTİMATİNG GROWTH CURVE AND BİOLOGİCAL PARAMETERS OBTAİNED : BERTALANFFY PATTERN SAMPLE

Summary

In this study, it was focused on how the parameters of non linear sigmoidal growth models were converted into biologically meaningful parameters of mechanical models. For this purpose , the values of biologically meaningful parameters, calculated with the help of the first and second derivatives of Logistic, Gompertz and Bertalanffy models, nonlinear sigmoidal growth models used, were given in the tables. Moreover, how Bertalanffy model,one of the models used, is converted into mechanical model was explained gradually.

Keywords: Growth models; sigmoidal model; mechanical model

---

*mkorkmaz52@yahoo.com

1.GİRİŞ

Büyüme, canlıların en önemli biyolojik özelliklerinden birisidir. Bugüne kadar büyümenin birçok tanımı yapılmıştır. Standart bir tanımı olmamakla birlikte, büyüme bir toplumun veya bir organizmanın büyüklüğünde zamanla görülen gelişmedir (Yıldızbakan, 2005). Büyüme canlının ağırlık ve beden ölçülerinde belirli bir zaman diliminde meydana gelen artış olarak tanımlanabilir. Fizyolojik olarak büyüme spermin yumurtayı döllemesi ve zigotun oluşumu ile başlar. Büyümeyle karıştırılan bir terim olan gelişme ise canlının vücut yapısının ve şeklinin çeşitli fonksiyonları yapabilecek düzeyde değişikliğe uğramasıdır (Çolak ve ark, 2006).

Kemiklerin, kasların, iç organların ve vücudun diğer kısımlarının gelişmesine, yani vücut kitlesinin belirli zaman aralıklarında, türüne özgü bir biçimde uyumlu olarak artmasına büyüme denilmektedir (Özen, 1997). Daha topluca bir ifade ile büyüme tüm canlılarda belirli bir dönem içinde organizmadaki hücre ve doku artışı şeklinde tanımlanmakla birlikte evcil hayvanlarda genellikle canlı ağırlık veya organ ağırlıkları üzerinde durulmaktadır. Diğer bir ifadeyle canlılarda büyüme genellikle yeni hücrelerin üretimi olarak tanımlanmakla birlikte hücrelerin hacimsel veya kitlesel olarak artışı anlamına da gelmektedir (Owens ve ark, 1993). Yani hücresel boyutta 2 şekilde büyüme gerçekleşmektedir.

1. Hiperplazik (sayısal) büyüme
2. Hipertrofik (hacimsel ya da kitlesel) büyüme (Kor ve ark., 2006).

Canlıların yaşa bağlı olarak ağırlık ve vücut ölçülerinde göstermiş olduğu değişim büyüme eğrileri ile tanımlanabilir (Goonewardene ve ark., 1981; Kocabaş ve ark., 1997). Daha özel bir ifade ile ağırlık bakımından büyüme eğrisi, genetik ve çevresel faktörlerin etkisiyle şekillenen ve hayvanın ağırlığı ve yaşı arasındaki matematiksel ilişkiyi göstermektedir (Bethard, 1997). Bu ilişki Efe (1990) tarafından ağırlık-yaş eğrisi olarak tanımlanmıştır. Büyüme eğrilerindeki bilgiyi, biyolojik anlam veren parametrelerle açıklayan modellere de büyüme modelleri veya büyüme fonksiyonu (growth function) denilmektedir (Akbulut ve ark, 2004). Büyüme eğrilerinde amaç; yaşa bağlı olarak farklı noktalarda elde edilen ve yorumlanması zor olan bilgilerin, biyolojik olarak yorumlanabilir daha az parametre ile özetlenmesidir. Ayrıca büyüme hızı, yem gereksinimi ve seleksiyona tepki gibi önemli parametreleri tahminlemede de büyüme eğri parametreleri kullanılabilmektedir (Akbaş, 1995). Yapılan çalışmalarda tespit edilen büyümenin biyolojik anlamda yorumlanabilir parametreleri içermesi çok önemlidir. Büyümeyi ifade eden bir fonksiyon biyolojik olarak açıklanamıyorsa bir anlam ifade etmeyecektir. Ancak, çeşitli dönemlerde alınmış veriler kullanılarak tahminlenen matematiksel büyüme modeli ile büyümenin biyolojik sürecini açıklamak ve büyümeye etkili faktörleri tespit etmek mümkün olabilmektedir (Brown ve ark. 1976;Torre ve Rankin 1978; Behr ve ark. 2001).

Bu çalışmada büyüme eğrilerinin tahmin edilmesinde oldukça sık kullanılan doğrusal olmayan Logistic, Gompertz ve Bertalanffy büyüme modelleri tanıtılacak ve Bertalanffy büyüme modelinin biyolojik anlamlı mekanik modele nasıl dönüştüğü anlatılacaktır.

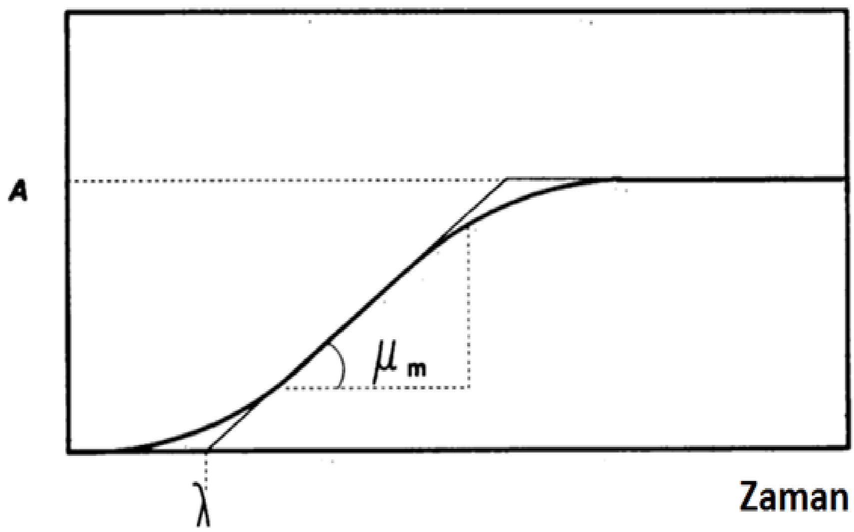
2. MATERYAL VE METOT

Büyüme modelleri, popülasyonların bilinmeyen bazı değerleri tahmin etmek için kullanılır. Matematiksel modeller; sigmoidal modeller ve mekanik modelleri olmak üzere iki sınıfa ayrılabilir. Sigmoidal modeller, doğrudan sistem hakkında bir fikir vermezler ve a, b, c vb. gibi parametreleri içerir. Bu modellerde, parametreler doğrudan anlam ifade etmez. Ancak, mekanik modeller biyolojik anlamlı A, μ_m , λ vb. parametreler içerirler.

Sigmoidal modeller, sadece veri kümesinin genel şeklini tarif ederken, mekanik modeller gerçek sistem özelliklerinin (büyüme hızı, en büyük boyutu, öteleme süresi, başlangıç boyutu…vb) tahmini hakkında bilgi verirler.

Eğer biyolojik anlama sahip değillerse, parametreler için başlangıç değerleri tahmin etmek zordur. Bu nedenle, araştırmacılar çalışmalarında mekanik modelleri tercih etmektedirler. Bu yüzden, tüm büyüme modeleri A, μ_m ve λ matematiksel parametreleri ile yeniden yazılmıştır. Bu yazılış, temel parametrelerin bir fonksiyonu olarak biyolojik parametrelerin ifadesini türeterek ve ardından onları formülde yerine yerleştirilerek yapılır.

Bu üç biyolojik parametre; maksimum spesifik büyüme hızı (μ_m), maksimum büyüme değeri (A) ve gecikme süresi (λ) ile gösterilir. Bunun bir sonucu olarak, bu üç parametre ile biyolojik olarak anlamlı bir model elde edilmiştir. Ayrıca ilaveten bu modellerin dönüm noktası ve zaman değerleri belirlenmiştir.



Şekil 1. Bir Büyüme Eğrisi [M.H.Zwietering ve ark.,1990]

Tablo 1'de tanıtımı yapılacak doğrusal olmayan büyüme modelleri verilmiştir.

Tablo 1.Büyüme eğrilerini tahmin etmede kullanılan sigmoidal modeller ve denklemleri

MODELLER	DENKLEMLER
Bertalanffy	$y=a[1-be^{-ct}]^3$
Logistic	$y=\frac{a}{1+e^{(b-ct)}}$
Gompertz	$y=ae^{-e^{(b-ct)}}$

Bu modellerde;

y: t zamanındaki büyüklük,

t: Zaman,

a: Asimptotik büyüklük

c, b : Büyüme ile ilgili parametreler

e: 2,71828 dir.

Bertalanffy büyüme modelinin biyolojik anlamlı mekanik modele dönüşümü şu şekildedir:

$$y = a\left[1 - be^{-ct}\right]^3 \tag{1}$$

Eğri'nin bükülme noktasını elde etmek için, fonksiyonun t' ye göre ikinci türevi hesaplanır.

$$\frac{dy}{dt} = 3abc\,[1 - be^{-ct}]^2 e^{-ct} \tag{2}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 3abc\left[[2(1-be^{-ct})bce^{-ct}]e^{-ct} - ce^{-ct}(1-be^{-ct})^2\right] \tag{3}$$

Bükülme noktası, ikinci türevin sıfır olduğunda elde edildiğinden (3) nolu denklem sıfıra eşitlenirse,

$$t_i = \frac{In(3b)}{c} \tag{4}$$

bulunur.

Böylece maksimum spesifik büyüme hızı (μ_m) , bükülme noktasında birinci türevini hesaplayarak elde edilebilir.

Birinci türevde, $t_i = \frac{In(3b)}{c}$ yazarak ,

$$\mu_m = \left(\frac{dy}{dt}\right)_{t_i} = \frac{4ac}{9} \tag{5}$$

elde edilir.

Bertalanffy denkleminde μ_m parametresi, c parametresi ile yer değiştirebilir.

Buradan, c= $\frac{9\mu_m}{4a}$ bulunur.

($t_i = \frac{In(3b)}{c}$'yi (1) denkleminde yerine yazınca, $y_i = \frac{8a}{27}$ bulunmaktadır. Teğet denkleminde m= μ_m ve $y_i = \frac{8a}{27}$ yazılırsa)

$$y = m_m.t + \frac{8a}{27} - m_m.t_i \tag{6}$$

olur.

Buradan,

y=0 iken t=λ değerleri (6) denkleminde yerine yazılırsa ve gecikme süresi, bükülme noktasında t ekseninin teğeti olarak tanımlandığı için,

$$0 = \mu_m.\lambda + \frac{8a}{27} - \mu_m.t_i \tag{7}$$

denklemi elde edilir.

(4),(5),(7) denklem verilerini kullanarak:

($\mu_m = \frac{4ac}{9}$ ve $t_i = \frac{In(3b)}{c}$ değerleri (7) denkleminde yerine yazılınca)

$$-\frac{8a}{27} = \frac{4ac}{9}\left(\lambda - \frac{In(3b)}{c}\right)\text{'dan}$$

$$\lambda = \frac{ln(3b) - \frac{2}{3}}{c} \quad (8)$$

elde edilir.
(8) denleminden,

$$b = \frac{e^{\lambda c + 2/3}}{3} \quad (9)$$

bulunur.

Buradan, Tablo I deki Bertalanffy denklemi, $b = \frac{e^{\lambda c + 2/3}}{3}$ ve $c = \frac{9\mu_m}{4a}$ için aşağıdaki gibi düzenlenir:

$$y = a\left[1 - be^{-ct}\right]^3$$

$$y = a\left[1 - \frac{e^{\frac{\lambda \cdot 9\mu_m}{4a} + \frac{2}{3}}}{3} \cdot e^{\frac{9\mu_m \cdot t}{4a}}\right]^3$$

$$y = a\left[1 - \frac{e^{\frac{9\mu_m(\lambda - t)}{4a} + \frac{2}{3}}}{3}\right]^3$$

$$y = \frac{a}{27}\left[3 - e^{\frac{9\mu_m(\lambda - t)}{4a} + \frac{2}{3}}\right]^3$$ iken,

$t \longrightarrow \infty$ ile $y \longrightarrow a$ ise, Bertalanffy denklemindeki a parametresi yerine, elde edilen modifiye Bertalanffy denkleminde A yazılabilir ($a = A$). Böylece,

$$y = -\frac{1}{27}A\left[-3 + e^{\frac{2}{3}+\frac{9\mu_m}{4A}.(\lambda - t)}\right]^3 \qquad (10)$$

şeklinde modifiye Bertalanffy modeli elde edilmiş olur.

3. BULGULAR

Yukarıda Bertalanffy Modelinin Modifiye edilişi ayrıntılı olarak gösterilmiştir. Ayrıca Lojistik ve Gompertz modellerinin de dönüşüm aşamaları tablolar halinde sunulacaktır. Bunun için öncelikle Modellerin birinci ve ikinci türevleri Tablo 2 ve 3'te gösterilmiştir.

Tablo 2. Modellere ait birinci türevler

MODELLER	BİRİNCİ TÜREVLER
Bertalanffy	3abc$[1 - be^{-ct}]^2 e^{-ct}$
Logistic	$\frac{ace^{(b-ct)}}{(1 + e^{(b-ct)})^2}$
Gompertz	ac$e^{-e^{(b-ct)}} e^{(b-ct)}$

Tablo 3. Modellere ait ikinci türevler

MODELLER	İKİNCİ TÜREVLER
Bertalanffy	$3abc\left[[2(1-be^{-ct})bce^{-ct}]e^{-ct}-ce^{-ct}(1-be^{-ct})^2\right]$
Logistic	$\frac{2ac^2(e^{(b-ct)})^2}{(1+e^{(b-ct)})^3}-\frac{ac^2e^{(b-ct)}}{(1+e^{(b-ct)})^2}$
Gompertz	$ac^2e^{-e^{(b-ct)}}e^{(b-ct)}\left[e^{(b-ct)}-1\right]$

Tablo 4, 5, 6 ve 7'de zaman ve bükülme noktası, maksimum büyüme hızı, gecikme süresi ve anlamlı değerinin formülleri sırasıyla verilmiştir. Tablo 8 de ise modellerin mekanik denklemleri yer almaktadır.

Tablo 4. Modellere ait dönüm noktasının zamanı ve değerleri

MODELLER	DÖNÜM NOKTASININ ZAMANI (t_i)	DÖNÜM NOKTASININ DEĞERİ (y_i)
Bertalanffy	$\frac{ln(3b)}{c}$	$\frac{8a}{27}$
Logistic	$\frac{b}{c}$	$\frac{a}{2}$
Gompertz	$\frac{b}{c}$	$\frac{a}{e}$

Tablo 5. Modellere ait maksimum spesifik büyüme oranları

MODELLER	MAKSİMUM SPESİFİK BÜYÜME ORANI (μ_m)
Bertalanffy	$\frac{4ac}{9}$
Logistic	$\frac{ac}{4}$
Gompertz	$\frac{ac}{e}$

Tablo 6. Modellere ait gecikme süreleri

MODELLER	GECİKME SÜRESİ (λ)
Bertalanffy	$\frac{ln(3b) - \frac{2}{3}}{c}$
Logistic	$\frac{b-2}{c}$
Gompertz	$\frac{b-1}{c}$

Tablo 7. Modellere ait parametrelerin anlamlı dönüşümleri

MODELLER	MODELLERDE KULLANILAN PARAMETRELERİN ANLAMLI DÖNÜŞÜMLERİ	
Bertalanffy	b= $\frac{e^{\lambda\frac{9\mu_m}{4a}+\frac{2}{3}}}{3}$	c= $\frac{9\mu_m}{4a}$
Logistic	b= $\frac{4\mu_m\lambda}{a}+2$	c= $\frac{4\mu_m}{a}$
Gompertz	b= $\frac{\mu_m e\lambda}{a}+1$	c= $\frac{\mu_m e}{a}$

Tablo 8. Modellere ait mekanik denklemler

MODELLER	MEKANİK DENKLEMLER
Bertalanffy	y= $\frac{-A}{27}[-3+e^{\frac{2}{3}+\frac{9\mu_m(\lambda-t)}{4A}}]^3$
Logistic	y= $\frac{A}{[1+e^{\frac{4\mu_m(\lambda-t)}{A}+2}]}$
Gompertz	y= $Ae^{(-e^{[\frac{\mu_m.e(\lambda-t)}{A}+1]})}$

4. SONUÇ

Bu çalışmada, bilimsel çalışmalarda sıkça kullanılan üç farklı sigmoidal büyüme modelinin biyolojik anlama sahip parametreler ile mekanik modellere dönüşmüş halleri verilmiş, Bertalanffy büyüme modelinin dönüşümünün matematiksel işlemleri adım adım gösterilmiştir. Bu çalışma, teorik bir şekilde hazırlanmış olup, sayısal büyüme verileri kullanılmamıştır. Yapılacak çalışmalarda, diğer büyüme modelleri matematiksel işlemler yardımıyla biyolojik anlamlı parametreler içeren mekanik denklemlere dönüştürülebilir. Ayrıca teorik işlemlerden ziyade, bitkisel ve hayvansal sayısal büyüme verileri kullanılarak hangi modelin daha uygun olduğu araştırılabilir.

KAYNAKLAR

Akbaş Y (1995). Büyüme eğrisi modellerinin karşılaştırılması. *Hayvansal Üretim* **36**: 73-81

Akbulut Ö, Bayram B & Tüzemen N (2004). Esmer Sığırlarda Büyümenin Doğrusal Olmayan (non-linear) Modellerle Analizi. *Atatürk Üniversitesi Ziraat Fakültesi Dergisi* **35**(3-4): 165-168

Behr V, Hornick J L, Cabaraux J F , Alvarez A & Istasse L (2001). Growth patterns of Belgian Blue replacement heifers and growing males in commercial farms. *Livestock Production Science* **71**: 121-130

Bethard G L (1997). A microcomputer simulation to evaluate management strategies for rearing dairy replacement. Ph D Thesis, Blacksburg, Virginia, USA

Brown J E, Fitzhung H A & Cartwright T C (1976). A comparison of nonlinear models for describing weight-age relationships in cattle. *Journal of Animal Science* **42**: 810-818

Çolak C, Orman M N & Ertuğrul O (2006). Simental x Güney Anadolu Kırmızısı sığırlarına ait canlı ağırlık ölçümlerine dayanan doğrusal ve doğrusal olmayan büyüme eğrileri. *Lalahan Hayvan Araştırma Enstitüsü Dergisi* **46** (1): 1–5

Goonewardene L A, Berg R T & Hardin R T (1981). A study growth of beef cattle. *Canadian Journal of Animal Science* **61**: 1041-1048

Kocabaş Z, Kesici T & Eliçin A (1997). Akkaraman İvesi x Akkaraman ve Malya x Akkaraman kuzularında büyüme eğrisi. *Turkish Journal of Veterinary and Animal Science* **21**: 267-275

Kor A, Başpınar E, Karaca S & Keskin S (2006). The Determination of Growth in Akkeci (White goat) Female Kids by Various Growth Models. *Czech Journal of Animal Science* **51**(3): 110–116

Lopez de Torre G & Rankin B J (1978). Factors affecting growth curve parameters of Hereford and Brangus cows. *Journal of Animal Science* **46**: 604-613

Owens F N, Dubeski P & Hanson C F (1993). Factors that Alter the Growth and Development of Ruminants. *Journal of Animal Science* **71**: 3138-3150

Özen N (1997). Et Sığırlarının Beslenmesi ve Sığır BesisiAkdeniz Üniversitesi Ziraat Fakültesi Yardımcı Ders Notu : 2, Antalya

Yıldızbakan A (2005). Ağaçlarda Büyümeye Ait Matematiksel Modeller ve Bu Modellerin Karşılaştırmalı Olarak İncelenmesi. Yüksek Lisans Tezi, Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Zootekni Anabilim Dalı, Adana

Zwietering M H, Jongenburger I, Rombouts F M & Riet K V (1990). Modeling of the bacterial growth curve. *Journal of Applied and Environmental Microbiology* **56**(6): 1875-1881