

BİR TOPACIN DÖNME MİKTARI ÜZERİNE BİR İNCELEME

Adnan TEĞMEN*

Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Fizik Bölümü, 06100 Tandoğan-Ankara

ÖZET

Serbest bir katı cismin dönme hareketinde, eylemsiz bir koordinat sistemine göre sabit olan açısal momentum vektörü, cismin kütle merkezine sabitlenmiş koordinat sisteminden bakıldığında periyodik bir harekete sahiptir. Fakat açısal momentum vektörü bir periyodluk hareketini tamamladığında cisim bir bütün olarak periyodik bir hareket sergilememektedir. Robot ve uydu hareketlerinde önemli düzeltmeler gerektiren bu hareket tarzı analiz edilerek, simetrik bir topaç için cismin net dönme miktarı alternatif bir yaklaşımla türetilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Katı cisim, cisim koordinat sistemi, dinamik faz, geometrik faz.

ABSTRACT

In the rotational motion of a free rigid body, the angular momentum vector which is constant with respect to an inertial frame has a periodic motion when viewed from the frame fixed at the center of mass of the body. But when the angular momentum vector completes its one-period motion, the body as a whole does not exhibit a periodic motion. This kind of motion which generates important corrections in the motions of robots and satellites has been analyzed and, for a symmetrical top, the net amount of rotation of the rigid body has been derived via an alternative approach.

Keywords: Rigid body, body frame, dynamical phase, geometric phase.

1. GİRİŞ

Chasles teoremine göre katı bir cismin en genel yerdeğiştirmesi öteleme ve dönme hareketlerinden ibarettir [1]. Bu teoreme paralel olarak katı bir cismin hareketinin tam bir incelemesi iki koordinat sisteminin kullanılması ile mümkündür. Bunlardan birisi cismin dışında yer alan eylemsiz bir koordinat sistemi $X_1X_2X_3$, diğeri ise cismin üzerine sabitlenmiş ve cisim ile birlikte hareket eden $x_1x_2x_3$ koordinat sistemidir (cisim koordinatları). Diğeri taraftan, eylemsiz koordinatlar ve cisim koordinatları cismin kütle merkezinde çakıştırılıp salt dönme hareketi incelendiğinde ilginç gözlemler yapılabilmektedir. Bir noktadan sabitlenmiş katı cismin en genel hareketi ise, Euler teoremine göre bir eksene göre anlık dönme hareketidir. Dolayısıyla belli bir dönme eksenini belirlenmemiş olsa bile açısal hız vektörü anlık olarak tanımlanabilir. Aşağıda dikkate

* tegmen@science.ankara.edu.tr

alınan bütün dönme eksenleri, ölçüm anında sonsuz küçük dönmelere karşı gelen anlık dönme eksenleridir.

Cisim koordinatları, cismin asal eylemsiz dönme eksenleri ile çakıştırılıp kütle merkezine sabitlendiğinde cismin dönme kinetik enerjisi çok iyi bilinen

$$T_{dön} = \frac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2), \quad (1)$$

bağıntısı ile verilir. Burada $I_1 \langle I_2 \langle I_3$ seçimi ile verilen nicelikler, asal eylemsizlik momentleridir ve $\omega_i (i=1,2,3)$ cismin açısal hız vektörü ω 'nın cisim koordinat sistemindeki bileşenleridir. ω vektörü cisim koordinat sisteminin yerinin seçiminden bağımsızdır, yani x_1, x_2, x_3 koordinat sisteminin orijini kütle merkezinde seçilmese bile değişmez kalır. Dolayısıyla, bu anlamı ile ω vektörü mutlak bir özelliğe sahiptir. Gözönüne alınacağı gibi, cisim serbest olduğunda sistemde herhangi bir dış kuvvet olmayacağından dolayı (1) bağıntısı toplam enerjiye indirgenir ve bir hareket sabitidir:

$$T_{dön} = E = \text{sabit}. \quad (2)$$

Sistemde doğal olarak herhangi bir dış kuvvet momenti yani tork da olmayacağından, bileşenleri

$$L_i = I_i\omega_i \quad (3)$$

ile verilen açısal momentum vektörü L , eylemsiz koordinatlara göre hem yönce hem de boyca sabit bir vektördür:

$$L^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 = \text{sabit}. \quad (4)$$

Fakat cisim koordinatlarından bakıldığında, cismin spin hareketi yapmasından dolayı, L vektörü periyodik davranır. Açısal momentum vektörü bir periyodluk tam bir dönme yaptığında cismin kendisi bir bütün olarak 2π kadar dönmekte, dolayısıyla asla başlangıçtaki konumuna gelememektedir. Bu tespit ilk olarak simetrik bir topaç ($I_1 = I_2$) için L. D. Landau ve E. M. Lifshitz tarafından yapılmış, fakat cismin net dönme miktarının ne olduğu hesaplanmamıştır [2]. Bu çalışmada, bir adım daha öteye gidilerek bahsedilen çalışmada eksik olan net dönme miktarı açık bir şekilde türetilmiştir (Bkz. Denk. (28)). Bulunan bu sonuç, özetinde de bahsedildiği gibi robot ve uydu hareketlerinde hiç hesapta olmayan sürpriz düzeltmeler gerektirdiği için günümüzde oldukça önem kazanmış ve literatürde değişik yollarla türetilmiştir. Örneğin, daha sonraları Poincaré teoremi kullanılarak ilk defa genel bir türetme yapılmıştır [3]. Aynı sonuç, asal lif demetlerinde paralel taşıma teorisinin kullanılmasıyla [4] ve pdq eylem-formunun, katı cismin klasik faz uzayında Stokes teoreminin kullanılarak integre edilmesiyle doğrulanmıştır [5]. Ayrıca, Poincaré-Cartan eylem formunun katı cismin üç-boyutlu faz uzayında integre edilerek aynı sonucun bulunması mümkündür [6]. Bu çalışmada ise, diğerlerinden farklı olarak L. D. Landau ve E. M. Lifshitz'in çalışmalarının devamı niteliğinde, klasik bir yaklaşımla aynı sonuç doğrulanmış ve konunun daha anlaşılabilir hale getirilmesi amaçlanmıştır.

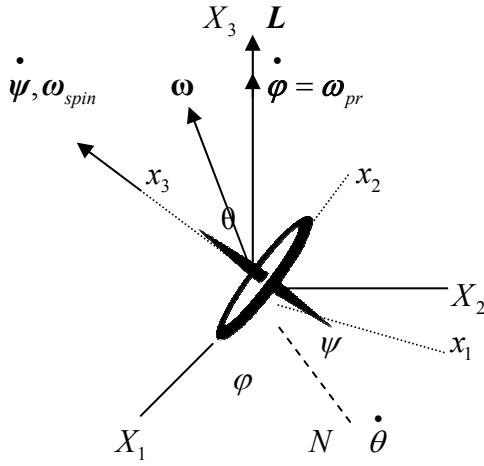
2. YÖNTEM VE BULGULAR

2.1. Simetrik topacın $X_1X_2X_3$ koordinat sisteminde incelenmesi

Küresel bir topaç için ($I_1 = I_2 = I_3 = I$), kütle merkezinden geçen herhangi bir dönme eksenini doğrudan asal eylemsizlik eksenini olacağından, açısal momentum ve açısal hız vektörleri paralel kalırlar ve açısal momentum olabilecek en basit halini alır:

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}. \quad (5)$$

Fakat, genel bir durum olarak, anlık dönme eksenini asal eksenlerin haricinde herhangi bir eksen olduğundan artık \mathbf{L} ve $\boldsymbol{\omega}$ vektörleri paralel kalmayacaktır (Şekil 1).



Şekil 1. Serbest simetrik bir topacın hareketi. Hareketin rahat takip edilebilmesi için X_3 eksenini \mathbf{L} vektörü ile çakıştırılmıştır. N doğrusu, x_1x_2 düzlemi ile X_1X_2 düzleminin kesişim doğrultusu boyuncadır. θ , x_3 ile X_3 , φ , X_1 ile N ve ψ ise N ile x_1 arasındaki açılardır.

Şekildeki gibi simetrik bir topaç dikkate alındığında cismin simetrisinden dolayı x_1 ve x_2 asal eksenlerinin seçilmesinde bir keyfiyet vardır. Dolayısıyla x_1 eksenini, \mathbf{L} vektörü ile x_3 ekseninin oluşturduğu düzleme dik olarak seçilebilir. (Cisim koordinat sistemi kütle merkezine sabitlendiğinden x_3 ekseninin cismin simetri eksenini ile çakışacağı aşikardır). Bu seçimin sonucu olarak $L_1 = 0$, $\omega_1 = 0$ olur ve doğal olarak \mathbf{L} , $\boldsymbol{\omega}$ ve x_3 hareket süresince hep aynı düzlemde kalırlar. $\boldsymbol{\omega}$ açısal hız vektörü Euler açılarından gelen katkıları içerdiğinden

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta} + \dot{\varphi} + \dot{\psi} \quad (6)$$

genel biçimi ile yazılabilir. (Bu kesimdeki hesapların ayrıntıları Ek1’de bulunabilir.) θ açısı x_3 eksenine ile L arasındaki açı olarak tanımlandığından $\dot{\theta}$ vektörü x_3 - L - ω üçlüsünün oluşturduğu düzleme dik kalmak zorundadır. Bu ise ω ’nın θ bileşeni olmadığı anlamına gelir. Dolayısı ile cismin dönmesinde θ ile ilgili bir değişim söz konusu değildir: $\theta = \text{sabit}$. Diğer taraftan, x_1 ve x_2 asal eksenlerinin seçimleri keyfi olduğundan cisim harekete $\psi = 0$ şartı ile başlatılabilir. Bu şart altında, (6)’daki diğer iki bileşen

$$I_1 \dot{\varphi} = L, \quad (7)$$

$$I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) = L_3 \quad (8)$$

denklemleri ile belirlenir. (7)’den $\dot{\varphi} = \text{sabit}$, dolayısıyla (8)’den $\dot{\psi} = \text{sabit}$ sonuçları aşikardır. ψ ‘deki değişimin sonucu olarak cisim x_3 eksenine etrafında düzgün bir spin hareketi yaparken aynı zamanda φ ’deki değişimin sonucu olarak da bir bütün olarak L etrafında konik bir presesyon hareketi yapar. Bu tespitlerin sonucunda (6) ifadesine fiziksel bir anlam kazandırılmış olur:

$$\omega = \omega_{pr} + \omega_{spin}, \quad (9)$$

burada ω_{pr} , cismin L etrafındaki presesyon hareketine karşı gelen açısal hız, ω_{spin} ise cismin x_3

doğrultusunda kendi eksenine etrafındaki dönmesine karşı gelen açısal hızdır. ω ’nın x_2 üzerine izdüşümü olan

$$\omega_2 = \omega_{pr} \sin \theta \quad (10)$$

ifadesinden faydalanılırsa, (3)’ün yardımıyla (7)’ye uygun olarak

$$\omega_{pr} = \dot{\varphi} = \frac{L_2}{I_2 \sin \theta} = \frac{L}{I_2 (= I_1)} \quad (11)$$

elde edilir. Diğer taraftan, (8)’e uygun olarak

$$\omega_{spin} = \omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta = \frac{L_3}{I_3} = \frac{L \cos \theta}{I_3}. \quad (12)$$

olur.

2. 2. Simetrik topacın $x_1 x_2 x_3$ koordinat sisteminde incelenmesi

Cisim koordinat sisteminde katı cismin hareketi

$$\dot{L}_1 = L_2 \frac{L_3}{I_3} - L_3 \frac{L_2}{I_2}, \quad (13a)$$

$$\dot{L}_2 = L_3 \frac{L_1}{I_1} - L_1 \frac{L_3}{I_3}, \quad (13b)$$

$$\dot{L}_3 = L_1 \frac{L_2}{I_2} - L_2 \frac{L_1}{I_1}, \quad (13c)$$

Euler denklemleri ile verilir [1]. (13) diferensiyel denklem takımı katı cismin üç-boyutlu $L_1L_2L_3$ faz uzayında yazılmış denklemler olarak yorumlanabilir ve çözümü

$$E = \frac{1}{2} \left(\frac{L_1^2}{I_1} + \frac{L_2^2}{I_2} + \frac{L_3^2}{I_3} \right) \quad (14)$$

elipsoidi ile

$$S = \frac{1}{2} (L_1^2 + L_2^2 + L_3^2) \quad (15)$$

küresinin kesişimi olan eğri olarak verilir. Bu durumda (13) denklem takımı daha yalın bir biçimde

$$\dot{L}_i = \frac{\partial(L_i, E, S)}{\partial(L_1, L_2, L_3)} \quad (16)$$

Jakobiyeni ile yazılabilir [7]. Denklem takımı (14) ve (15) çözümlerini aynı anda sağlamak zorunda olduğundan \mathbf{L} vektörünün ucu kesişim eğrisi üzerinde gezinir. Simetrik topaç durumunda vektörün hareket tarzı açıkça belirlenebilir: (13c) eşitliğinden $L_3 = \text{sabit}$ olduğu hemen görülür. Bu ise \mathbf{L} vektörünün konik bir hareket yaptığı anlamına gelir ve daha önce yapılan $\theta = \text{sabit}$ tespitini doğrular. Hareketi daha açık bir şekilde belirlemek için

$$\left(\frac{I_3 - I_1}{I_3 I_1} \right) L_3 = \omega_L \quad (17)$$

tanımlaması yapılırsa,

$$\dot{L}_1 = -\omega_L L_2, \quad (18a)$$

$$\dot{L}_2 = \omega_L L_1 \quad (18b)$$

denklem takımı elde edilir. Çözümler ise, L_{12} sabiti, \mathbf{L} vektörünün x_1x_2 düzlemine izdüşümü olmak üzere

$$L_1 = L_{12} \cos \omega_L t, \quad (19a)$$

$$L_2 = L_{12} \sin \omega_L t \quad (19b)$$

şeklindedir. Dolayısıyla bu sonuç, $x_1x_2x_3$ koordinat sisteminden bakıldığında \mathbf{L} vektörünün,

boyu sabit kalacak şekilde x_3 etrafında $\omega_L = -\dot{\psi}$ açısal hızı ile periyodik bir hareket yaptığını gösterir. (3) ifadesinden dolayı $\boldsymbol{\omega}$ vektörü de benzer bir davranış gösterir.

2. 3. Simetrik topacın dönme miktarı

Bu kesimde, açısal momentum vektörünün bir periyodluk dönmesi sonucu, cismin ne kadar döndüğünü belirlemek için φ açısının değişimi incelenecektir.

\mathbf{L} vektörünün periyodu (17) bağıntısından kolaylıkla

$$T = 2\pi \frac{I_1 I_3}{(I_3 - I_1) L_3} \quad (20)$$

olarak bulunur. φ açısının zaman içindeki davranışı, başlangıçtaki değeri sıfır olacak şekilde alındığında, (11) denkleminde

$$\varphi(t) = \frac{L}{I_1} t \quad (21)$$

ile belirlenir. T süre sonunda cisim tarafından taranan açı miktarı

$$\varphi(T) = 2\pi \frac{L}{L_3} \left(\frac{I_3}{I_3 - I_1} \right) \quad (22)$$

ise, 2π 'den daha büyük bir değere sahip olmakta ve dolayısıyla başlangıç konumunu aşmaktadır. 2π 'yi aşan kısım doğal olarak

$$\Delta\varphi = \varphi(T) - 2\pi \quad (23)$$

ile verilir. (22) denklemi, (4), (14) ve

$$L^2 - 2EI_1 = \frac{L_3^2 (I_3 - I_1)}{I_3} \quad (24)$$

ile verilen yardımcı eşitliğin kullanılması ile

$$\varphi(T) = \frac{2ET}{L} + 2\pi \frac{L_3}{L} \quad (25)$$

haline gelir. (Denk. (24) ile Denk. (27) arasındaki hesapların ayrıntıları Ek2'de bulunabilir.) Bunun sonucu olarak

$$\Delta\varphi = \frac{2ET}{L} - 2\pi(1 - \cos\theta) \quad (26)$$

olarak bulunur; burada

$$\Omega = 2\pi(1 - \cos\theta), \quad (27)$$

\mathbf{L} vektörünün kesişim eğrisi boyunca taradığı katı açıdır. Nihayetinde, cismin net dönme miktarı

$$\Delta\varphi = \frac{2ET}{L} - \Omega \quad (28)$$

ile bir kez daha doğrulanmış olur.

3. TARTIŞMA VE SONUÇ

(28) eşitliği, her ne kadar simetrik bir topaç için türetilmiş ise de, cismin simetrik olması şartından bağımsız olarak, genel bir bağıntıdır. Topacın periyodikliği açısal momentum vektörü ile tanımlandığında, net bir dönme miktarının var olup olmadığı sistemin hangi koordinat sisteminde incelendiğine bağlı kalmaktadır. Diğer taraftan, değişik bir yaklaşım olarak topacın periyodiklik tanımı $\boldsymbol{\omega}$ açısal hız vektörü ile tanımlanırsa sistemin hareketi, *uzay* ve *cisim konilerinin* birbirleri üzerinde yuvarlanma problemine indirgenir: Bilindiği gibi, $X_1X_2X_3$ koordinat sisteminde $\boldsymbol{\omega}$ vektörü \mathbf{L} etrafında $\dot{\varphi}$ hızı ile *uzay konisi* denilen bir koni çizer. $x_1x_2x_3$ koordinat sisteminde ise x_3 etrafında $\dot{\psi}$ hızı ile *cisim konisini* çizer. İki koninin değme doğrultusunda yer alan $\boldsymbol{\omega}$ vektörü anlık dönme eksenidir ve hareket boyunca değme doğrultusundaki yerini korur. Dolayısıyla cisim konisi

uzay konisi üzerinde kaymadan yuvarlanma hareketi yapar. Cisim konisi, uzay konisi üzerinde (11) ve (12)'den

$$T_c = 2\pi \frac{I_1 I_3}{(I_1 - I_3) L_3} \quad (29)$$

ile verilen tam bir periyodluk hareketini tamamladığında, ω vektörü uzay konisi üzerinde

$$\varphi(T_c) = 2\pi \frac{L}{L_3} \left(\frac{I_3}{I_1 - I_3} \right) = -\varphi(T) \quad (30)$$

kadarlık bir açı tarar. Bu ise cismin toplam dönme miktarıdır. İşaretlerdeki zıtlık, ω ve L vektörlerinin birbirlerine göre zıt yönlerde dönüyor olmalarından kaynaklanır. Sonuçta mutlak değerce cismin net dönme miktarı (28) ile uyum içindedir.

(28)'in sağ tarafındaki birinci ve ikinci terimler sırasıyla *dinamik* ve *geometrik faz faktörü* olarak adlandırılırlar ve aslında kuantum mekaniksel bir incelemeden kaynaklanmışlardır [8]. Dinamik kısım, sabit T ve L değerleri için toplam enerjinin bir fonksiyonudur ve dolayısıyla cisim döndüğü sürece varolan bir niceliktir. Geometrik kısım ise sistemde etkin olan parametre ya da parametrelerin (ki bu örnekte açısız momentumdur) parametre uzayında kapalı bir yörünge oluşturduğu zaman sistemin genel yapısındaki değişime karşı gelir. Nitekim $\theta = 0$ ile verilen, açısız momentum vektörünün cisim koordinat sisteminde bile sabit kaldığı durum için, parametre uzayında kapalı bir eğrinin oluşması mümkün değildir ve geometrik kısım ortadan kalkar. Geometrik fazlar genel olarak *Berry fazı* olarak adlandırılırlar ve geometrik optikten nükleer magnetik rezonansa kadar pek çok alanda gözlenmiştir. Bunların en önemlilerinden bir tanesi Ahoronov-Bohm olayıdır. Bu tür fazların klasik karşılığı genel anlamı ile *Hannay açısı* olarak bilinir ve katı cisim fazları Hannay açısının bir uygulamasıdır [9].

KAYNAKLAR

- [1] Goldstein, H., Poole, C. and Safko, J., “**Classical Mechanics**”, Addison-Wesley, 161, (2002)
- [2] Landau, L. D. and Lifshitz, E. M., “**Mechanics**”, Bristol, Pergamon, (1960)
- [3] Levi, M., “Geometric Phases in the Motion of Rigid Bodies”, **Arch. Rational Mech. Anal**, 122, 213-229, (1993), (Önbasım olarak 1990)
- [4] Marsden, J. E., Montgomery, R. and Ratiu, T., “Reduction, Symmetry and Berry’s Phase in Mechanics”, **Memoirs of AMS**, 436, 1-110, (1990)
- [5] Montgomery, R., “How Much Does the Rigid Body Rotate? A Berry’s Phase from the 18th Century”, **Am. J. Phys.**, 59(5), 394-398, (1990)
- [6] Teğmen, A., “Rigid Body Phase Formula in terms of Poincare-Cartan Invariant Action Form”, (Basım için hazırlanmaktadır).
- [7] Nambu, Y., “Generalized Hamiltonian Dynamics”, **Phys. Rev. D**, 7, 2405-2412, (1973)
- [8] Berry, M. V., “Quantal Phase Factors Accompanying Adiabatic Changes”, **Proc. R. Soc. Lond. A**, 392, 45-57, (1984)

- [9] Hannay, J. H., “Angle Variable Holonomy in Adiabatic Excursion of an Integrable Hamiltonian”, **J. Phys. A**, 18, 221-230, (1985)

Ek1: Kesim 2.1. için hesap ayrıntıları

ω 'nın $x_1x_2x_3$ cisim koordinat sistemindeki ifadesi

$$\omega = \omega_1 \hat{x}_1 + \omega_2 \hat{x}_2 + \omega_3 \hat{x}_3 \quad (\text{Ek1-1})$$

ile verilirken NX_3x_3 sistemindeki eşdeğeri

$$\omega = \dot{\theta} + \dot{\varphi} + \dot{\psi} = \dot{\theta} \hat{N} + \dot{\varphi} \hat{X}_3 + \dot{\psi} \hat{x}_3 \quad (\text{Ek1-2})$$

olacaktır. ω 'nın bileşenlerinin $x_1x_2x_3$ sisteminde Euler açıları cinsinden ayrışımı ise aşağıdaki gibidir.

$$\dot{\theta} = \dot{\theta} \hat{N} = \dot{\theta}_1 \hat{x}_1 + \dot{\theta}_2 \hat{x}_2 + \dot{\theta}_3 \hat{x}_3 = \dot{\theta} \cos \psi \hat{x}_1 - \dot{\theta} \sin \psi \hat{x}_2, \quad (\text{Ek1-3a})$$

$$\dot{\varphi} = \dot{\varphi} \hat{X}_3 = \dot{\varphi}_1 \hat{x}_1 + \dot{\varphi}_2 \hat{x}_2 + \dot{\varphi}_3 \hat{x}_3 = \dot{\varphi} \sin \theta \cos(90 - \psi) \hat{x}_1 + \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi \hat{x}_2 + \dot{\varphi} \cos \theta \hat{x}_3, \quad (\text{Ek1-3b})$$

$$\dot{\psi} = \dot{\psi} \hat{x}_3, \quad (\text{Ek1-3c})$$

burada $\dot{\varphi} \sin \theta$, $\dot{\varphi}$ 'nın x_1x_2 düzlemine olan izdüşümüdür. Bu durumda Denk. (Ek1-2)

$$\omega = (\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi) \hat{x}_1 + (\dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi) \hat{x}_2 + (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) \hat{x}_3 \quad (\text{Ek1-4})$$

olurken, bu ifade $\psi = 0$ şartı altında

$$\omega_1 = \dot{\theta}, \quad \omega_2 = \dot{\varphi} \sin \theta, \quad \omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta \quad (\text{Ek1-5})$$

halini alır. $\omega_1 = 0$ olduğu hatırlanırsa $x_1x_2x_3$ sisteminde $L = L_1 \hat{x}_1 + L_2 \hat{x}_2 + L_3 \hat{x}_3$ ile verilen açısal momentum vektörünün bileşenleri

$$L_1 = I_1 \omega_1 = 0, \quad (\text{Ek1-6a})$$

$$L_2 = I_2 (= I_1) \omega_2 = I_1 \dot{\varphi} \sin \theta = L \sin \theta, \quad (\text{Ek1-6b})$$

$$L_3 = I_3 \omega_3 = I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) \quad (\text{Ek1-6c})$$

olur. Diğer taraftan $\dot{\varphi} = \dot{\varphi} \hat{X}_3 = \omega_{pr}$ ve $\dot{\psi} = \dot{\psi} \hat{x}_3 = \omega_{spin}$ tanımlamaları yapılırsa (Ek1-2) denklemi (9) denklemine dönüşür.

Ek2: Kesim 2.3. için hesap ayrıntıları

Denk. (14) ile verilen enerji ifadesi simetrik topaç ($I_1 = I_2$) için

$$2EI_1 = L_1^2 + L_2^2 + \frac{I_1}{I_3} L_3^2 \quad (\text{Ek2-1})$$

şeklinde yeniden düzenlenebilir. (4) denkleminde elde edilen $L_1^2 + L_2^2 = L^2 - L_3^2$ ifadesi bir önceki denklemde değerlendirilirse

$$L^2 - 2EI_1 = \frac{L_3^2(I_3 - I_1)}{I_3} \quad (\text{Ek2-2})$$

bağıntısı elde edilir. Bu ifadenin $\frac{I_3}{L_3(I_3 - I_1)} = \frac{L_3}{L^2 - 2EI_1}$ şeklindeki eşdeğeri (20)'deki periyod ifadesi için yeni bir eşitlik verir:

$$T = 2\pi \frac{I_1 L_3}{(L^2 - 2EI_1)}. \quad (\text{Ek2-3})$$

Son ifadenin $LT = \frac{2ETI_1}{L} + 2\pi \frac{I_1 L_3}{L}$ şeklindeki eşdeğeri (21) ile beraber değerlendirildiğinde

$$\varphi(T) = \frac{L}{I_1} T = \frac{2ET}{L} + 2\pi \frac{L_3}{L} \quad (\text{Ek2-4})$$

ile verilen (25) denklemi elde edilmiş olur. Diğer taraftan katı açılı tanımı, (4) ile verilen sabit L yarıçaplı küreye, $dA = L^2 \sin \theta d\theta d\varphi$ yüzey elemanı olmak üzere

$$\Omega = \iint d\Omega = \frac{1}{L^2} \iint dA \quad (\text{Ek2-5})$$

şeklinde uyarlırsak sabit θ için

$$\Omega = \int_0^\theta \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi(1 - \cos \theta) \quad (\text{Ek2-6})$$

geometrik faz katkısı bulunur.