



Analytic and numeric perturbation techniques approach for the solution of electromagnetic wave problems

Murat Koray Akkaya^{1*}, Asım Egemen Yılmaz¹, Mustafa Kuzuoğlu²

¹Department of Electrical and Electronics Engineering, Faculty of Engineering, Ankara University, 06830, Gölbaşı, Ankara, Türkiye

²Department of Electrical and Electronics Engineering, Faculty of Engineering, Middle East Technical University, 06800 Çankaya, Ankara, Türkiye

Highlights:

- Perturbation theory in multilayer structures
- Singular perturbation theory for ENZ material
- Non dimensionalization of electromagnetic wave equation
- Dominant balance applicaiton

Keywords:

- Perturbation
- Spatial transformation
- Monte Carlo
- Multilayer
- Non Dimensionalization

Article Info:

Research Article

Received: 01.03.2022

Accepted: 14.02.2023

DOI:

10.17341/gazimmfd.1081264

Correspondence:

Author: Murat Koray

Akkaya

e-mail:

korayakkaya71@gmail.com

phone: +90 532 446 8595

Graphical/Tabular Abstract

Electromagnetic waves present interesting features while the permittivity of the environment perturbed. This perturbation can either be implemented numerically or analytically. In this paper, both techniques have been studied by special applications. Analytic perturbation explained on the (ENZ- Epsilon Near Zero) concept and numeric techniques with Underground water contamination detection. Small deviations from predetermined value numerically multilayer structures. Analytic solution covers space transformation of damping EM wave equation instead of phasor domain solution then non dimensionalisation process in order to solve the equation by singular perturbation techniques. In Figure A, above concepts are summarized in a tabular manner, pointing analytic and numeric approaches. Special detail also has been given for the analysis of analytic perturbation method steps in Figure A.

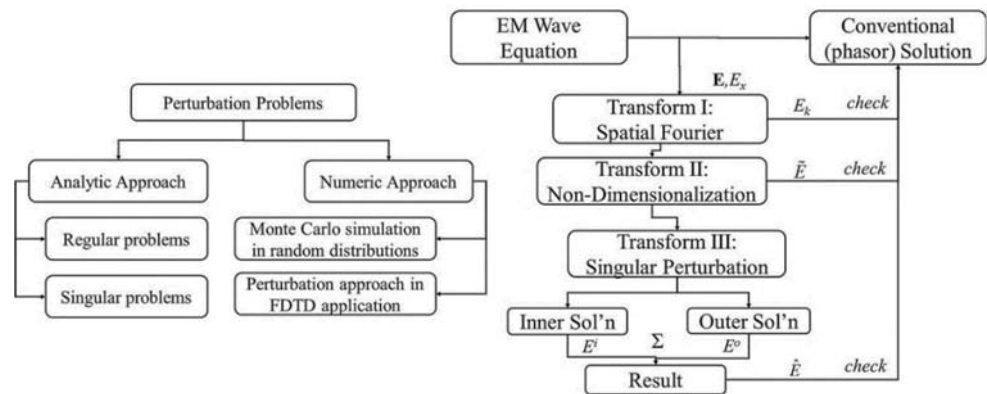


Figure A. General perturbation approach and workflow for analytic solution

Purpose:

Our research aims to provide a perturbation theory based novel approach to the problems that include unknown parameters or problems with rapid changes in a short period.

Theory and Methods: Fourier transformations (spatial and frequency) has been used to develop main formulation. Singular Perturbation theory and its mathematical tool asymptotic analysis with dominant balance theory, has been applied. Stochastic problems analyzed with Monte Carlo runs. Simulations has been developed in Matlab environment.

Results: This study presents a novel approach for EM wave propagation solution in an ENZ metamaterial. Non dimensional EM equation lets serial expansions by other methods as well. Perturbation of a material is also presented with deviations from the expected value, in a pattern given by probability density function. In this study, Monte Carlo based multilayer reflection problem has been also demonstrated, with different pdf's and results have been evaluated also with higher order moments.

Conclusion: Perturbation theory extensively used quantum theory and astronautics can be a promising powerful tool in Electromagnetic theory problems as well. Analytic nature of the theory gives opportunity to see what is going on in a very short period and this may be used in metamaterials.



Elektromanyetik dalga yayılım ve saçılım problemlerine analitik ve sayısal pertürbasyon teknikleri ile çözüm yaklaşımı

Murat Koray Akkaya^{1*}, Asım Egemen Yılmaz¹, Mustafa Kuzuoğlu²

¹Ankara Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Elektrik Elektronik Mühendisliği Bölümü, 06830, Gölbaşı, Ankara, Türkiye

²Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Elektrik Elektronik Mühendisliği Bölümü, 06800 Çankaya, Ankara, Türkiye

Ö N E Ç İ K A N L A R

- Çok katmanlı yapılarda pertürbasyon teorisi
- ENZ malzemesi için tekil pertürbasyon teorisi
- Elektromanyetik dalga denkleminin boyutsuzlaştırılması

Makale Bilgileri

Araştırma Makalesi
Geliş: 01.03.2022
Kabul: 14.02.2023

DOI:

10.17341/gazimmfd.1081264

Anahtar Kelimeler:

Tedirginlik, Meksansal dönüşüm, Monte Carlo Çok Katmanlı, Boyutsuzlaştırma

ÖZ

Bu makalede, fiziksel bir problemin oluşumunda veya tanımında yer alan parametrelerdeki küçük değişimlerin, sonuçta hesaplanan değere olan etkisi incelenmiştir. İncelemelerde matematiksel araç olarak Pertürbasyon Teorisi ve Asimptotik Seri açılımları kullanılmıştır. Pertürbasyon teorisi, analitik ve nümerik olmak üzere 2 farklı yaklaşımda ele alınmış ve elektromanyetik problemlerin çözümüne ağırlık verilmiştir. Elektromanyetik dalga yayılım denklemi birimsizleştirilerek asimptotik seri açılımlarına dönüştürülmüş, denklemde uzamsal Fourier dönüşümü uygulanarak tekil pertürbasyon uygulama örneği sunulmuştur. Tekil pertürbasyon teorisi ile gerçekleştirilen çözümün geçerlilik aralığı incelenmiştir. Makalede rastgele dağılımlara bağlı küçük değişimler de ilgili parametrede "Pertürbasyon" olarak nitelendirilmiş, bu yaklaşım da örneklerle temsil edilmiştir. Toplam yansımanın stokastik özellikleri Monte Carlo benzetimleri ile sağlanmıştır. Doğada sıklıkla rastlanan çok katmanlı yapıların fiziksel özellikleri ötelemeli fonksiyonlar ile hesaplanmış ve EM yansıma sinyali ölçerek tahmin edilmiştir. Bu yöntemde, görünmeyen tabakaların parametrelerinde olası sapmalar rastlantısal dağılımlar ile temsil edilmiştir. Pertürbasyon kavramı, katmanlarda elektriksel özelliklerin beklenen değerden sapmasını temsil etmek için kullanılmış, çıkış parametrelerinde ölçülen olasılık dağılımları ortalama değer, standart sapma, 3. Moment (skewness) ve 4. Moment (kurtosis) değerleri ile yorumlanarak anlaşılmıştır.

Analytic and numeric perturbation techniques approach for the solution of electromagnetic wave problems

H I G H L I G H T S

- Perturbation theory in multilayer structures
- Singular perturbation theory for ENZ material
- Non dimensionalization of electromagnetic wave equation

Article Info

Research Article
Received: 01.03.2022
Accepted: 14.02.2023

DOI:

10.17341/gazimmfd.1081264

Keywords:

Perturbation, Spatial transformation, Monte Carlo Multilayer, Non Dimensionalization

ABSTRACT

In this paper, effect of small deviations in the parameters that appear either in the definition or determination of a physical problem to the resultant calculated value. Within the study, Perturbation theory and Asymptotic Series expansions have been used as mathematical tools. In this work, perturbation theory has been handled in two alternative ways: numerical and analytical. Electromagnetic waves has been dealt extensively. Electromagnetic propagation equation has been nondimensionalised and presented via asymptotic series approach. Spatial Fourier transformation provides singular perturbation application to the equation. Validity of the solution has been investigated. This manuscript also concerns the electromagnetic feature extraction of the multilayered properties by the inverse scattering theory approach. In this work, in order to characterize the unknown or ambiguous part of the structure, random modeling of the parameters was introduced. Monte Carlo methods are used to calculate the resultant randomness effect. The description of any parameter, including thickness, with any probability density function (pdf) to represent nonnegative/bounded/unbounded cases and any combination of all these parameters, is represented in a framework. Skewness and kurtosis values are added to the output structure in order to lead complex analysis on the output descriptions. In this work, depending on the structure or aim of the analysis, the permittivity or the permeability of a layer is randomized. The overall reflection coefficient is calculated via recursive analysis.

*Sorumlu Yazar/Yazarlar / Corresponding Author/Authors : *korayakkaya71@gmail.com, aeyilmaz@eng.edu.ankara.tr, kuzuoğlu@metu.edu.tr / Tel: +90 532 446 8595

1. Giriş (Introduction)

Pertürbasyon terimi, rahatsız etmek (*perturb*) fiilinden gelir ve birçok anlamının yanında, fiziksel bir durumun veya materyal özelliklerinin oransal olarak az miktarda değişimi anlamında kullanılır. Örneğin, pürüzsüz bir yüzeyin zaman içinde aşınarak girinti çıkıntılarla dolması, veya bir malzemenin saflığının zaman içinde, çevresel etkenlerle bozulması birer pertürbasyondur. Bu değişimler; sistemi belirleyen elektriksel iletkenlik, yansıma, manyetik geçirgenlik gibi parametrelerde farklı tepkilere yol açar. Genel olarak görece çok küçük değişimler pertürbasyon olarak adlandırılır; ancak bu küçük değişimler başka bir parametrede büyük değişimleri tetikleyebilir. Bilimin çok farklı alanlarında uygulanabilecek pertürbasyon etkileri, bu makalede “Elektromanyetik Teori” kapsamında incelenmiştir.

Pertürbasyon Teorisi, matematiksel olarak karmaşık bir problemi, asimptotik seri açılımları ile “yeterince kolay” olacak şekilde küçük, çözülebilir parçalara bölerek çözümlene yöntemleri sunar. Problemlerin çözüm denkleminde, parametre olarak yer alan ve fiziksel bir olaya karşılık gelen küçük bir çarpan (genellikle “ ε ” ile gösterilir) tanımlanır ve tekrarlı (iteratif) çözüm yöntemleri üreten metotlar kullanılır [1].

Teori, genel olarak analitiktir ve çözüm için tanımlanan değerler içinde parametrenin değişiminin denklem çözümüne olan etkisini, fiziksel anlamlandırma ile ifade eder [2]. Bu anlamda sayısal yöntemlerden ayrılır. Sayısal analizler, Pertürbasyon Teorisi içinde basitleştirilmiş denklemlerin çözümlerinde, rastgele dağılımların oluşturduğu değişimlerde Monte Carlo uygulamaları şeklinde veya sonuçların doğrulanmasında kullanılabilir [3]. Pertürbasyon Teorisinde sayısal ve analitik yaklaşımlar birbirini tamamlar.

Pertürbasyon Teorisi gelişim tarihi, matematikçiler ile Ay-Dünya yörüngeleri üzerine çalışan bilim adamları tarafından yapılan çalışmalarla 19. yy’a uzanır. Bu kuramının ilk kullanımları da gök mekaniğinin bilinen analitik yollarla çözülemeyen veya analiz edilemeyen matematiksel problemlerinin çözümünde görülür [4].

Gök mekaniği problemlerinde, yörünge elipsi (veya Kepler elipsi) iki çekimli kütle (örneğin yalnızca Ay ve Dünya) ile oluşan bir gösterimdir. Dünya, Ay, Güneş ve Güneş sisteminin gezegenleri ile üç veya daha fazla kütle olduğunda ise, bu yaklaşım tam doğru değildir, çünkü üçüncü çekim gücünden kaynaklı bozulmalar ve sapmalar elips üzerinde pertürbasyon etkisi oluşturur. Kuantum fiziği de pertürbasyon etkilerinin parçacık fiziğindeki etkisini açıklaması bakımından önem taşır. Bu ve bunun gibi, özellikle tam olarak

çözülmemeyen karmaşık problemlerin, daha kolay ve çözülebilir küçük problemlere bölünmesi, bu küçük problemlerin çözümlerinin toplanarak esas problem çözümüne yakın, yaklaşık çözümlerin elde edilmesi Pertürbasyon Teorisi’nin uygulamalarıdır [5].

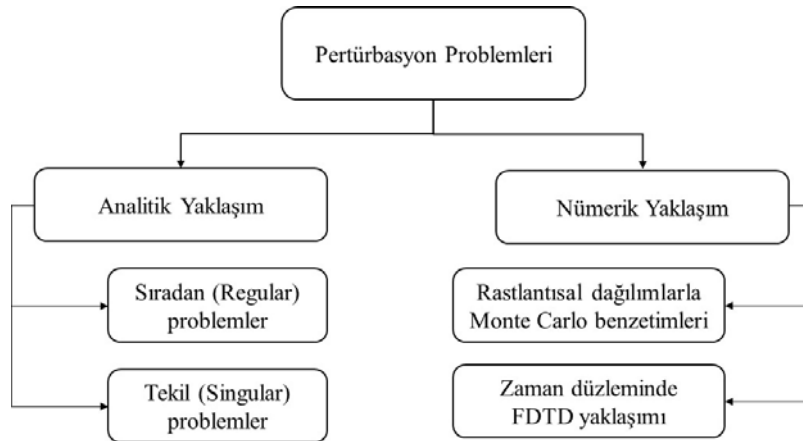
Makalede, elektromanyetik alan çözümlerini üzerinde durulmuştur. Çıktıların çok daha ilginç olması bakımından “küçük” değişikliklerin önemli değişimlere yol açtığı problemleri incelemek hedeflenmiş ve buna uygun olarak tekil pertürbasyon problemi üzerinde durulmuştur. Bu amaçla örnek bir uygulama metamateriyaller üzerinde yapılmıştır. Uygulamada “Asimptotik Analiz” ve “Pertürbasyon Teorisi” yaklaşımı ile, özellikle dielektrik sabiti (ε) parametresinin 0’a yaklaşma ($\varepsilon \rightarrow 0$) durumunda, analitik analiz yöntemleri ile çıkış yansımadaki “büyük” değişimin olduğu aralık incelenmiştir. Makalede bu kapsamda pertürbasyon parametresi “ ε ”; 0’a asimptotik olarak yaklaşırken, denklemin aldığı form ve bu formun gerçek çözüme yakınsaması için uygulanacak teknikler üzerinde çalışılmıştır. Sayısal yaklaşımlar ise genel olarak deterministik bir değerden sapmanın olasılık dağılım fonksiyonu ile temsil edilmesi ve bundan etkilenen sonuç parametresinin olasılık dağılım fonksiyonunun belirlenmesi şeklinde gerçekleştirilmiştir.

Makalede genel olarak pertürbasyon kavramı, analitik ve sayısal yöntemler ile ele alınmıştır. Analitik yöntemler, klasik Pertürbasyon Teorisi içinde problemleri, sıradan (*regular*) ve tekil (*singular*) yöntemlerle çözerken, sayısal yöntemler, rastgele dağılımlara dayalı Monte Carlo simülasyonlarıyla frekans düzleminde (*frequency domain*) ve örnek olarak çözümü verilen FDTD (*Finite Difference Time Domain*) yönteminde olduğu gibi zaman uzayında (*time domain*) sayısal analiz yöntemleriyle çözer (Şekil 1).

Makalede, 1. bölümde pertürbasyon teorisine analitik ve sayısal yaklaşımlar, bu yaklaşımlar içinde kullanılan kavramlar ile metamateriyal kavramı genel ifadelerle açıklanmıştır. 2. bölümde elektromanyetik yayılım denkleminin pertürbasyon teorisi ile çözümünde kullanılan teoremlerin matematiksel açıklamaları ve sayısal yöntemlerde kullanılan kavramlar verilmiştir.

2. Teorik Metot (Theoretical Method)

Pertürbasyon Teorisi, çözümü analitik yöntemlerle zor veya imkânsız olan bir probleme asimptotik seri açılımları ile çözüm üretir. Karmaşık probleme lokal (bölgesel) çözümü, parametre “0”a asimptotik olarak yakınsarken oluşturur. Teorinin temel teoremi Eş. 1’de verilmiştir.



Şekil 1. Makalede uygulanan Pertürbasyon teknikleri (Perturbation techniques used in the paper)

$$\left. \begin{aligned} (\varepsilon \rightarrow 0) \text{ ve } A_0 + A_1\varepsilon + A_2\varepsilon^2 + \dots + A_n\varepsilon^n + O(\varepsilon^{n+1}) &= 0, \\ (A_0, A_1 + \dots + A_n, \text{ bağımsız } -(\text{independent})) \\ \rightarrow A_0 = A_1 = \dots = A_n = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Problem $f(x) = 0$ gibi bir fonksiyon ile tanımlanmış ve çözümünü sağlayacak değerler $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots$ olsun. Bu değerleri bulmak için pertürbasyon yönteminde asimptotik seri açılımı Eş. 2’de verilen şekilde kullanılır.

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n x_n = x_0^{(1)} + \varepsilon x_1^{(1)} + \varepsilon^2 x_2^{(1)} + \dots O(\varepsilon^n) \\ x^{(2)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n x_n = x_0^{(2)} + \varepsilon x_1^{(2)} + \varepsilon^2 x_2^{(2)} + \dots O(\varepsilon^n) \end{aligned} \quad (2)$$

Asimptotik özellik, seri açılımda verilen “ ε ” parametresinin “0” a yakınsaması ve bu nokta etrafında bölgesel (*lokal*) analiz yapılması ile oluşur. (1) denklemi ile çözümü aranan parametre $f(x)$ denkleminde yerine konduğunda, her terim, kendi içinde bir denklem oluşturur ve daha kolay çözülebilen basit denklemlere dönüşür (2). Diferansiyel denklemler de benzer şekilde çözülür ancak çözüm yöntemleri sınır değerlerini de içerecek şekilde daha karmaşık yöntemler içerebilir.

Pertürbasyon uygulamasında birçok farklı yöntem kullanılır; örneğin denklemde yüksek mertebe terimlerin katsayısı küçük bir çarpan ile ifade edilir ve veya tamamen yeni bir “ ε ” parametresi eklenir. Çözümün sonunda “ ε ” parametresine “1” veya “0” değeri vererek gerçek çözüme ulaşılabılır. Bölüm 2’de pertürbasyon yaklaşımına örnekler verilmektedir.

Pertürbasyon içeren herhangi bir “çözümü zor” (veya analitik yollarla mümkün olmayan), denklem, asimptotik analiz-pertürbasyon yönteminde $f(\varepsilon)$ olarak Eş. 3’de verildiği üzere temsil edilsin.

$$f(\varepsilon) \rightarrow \text{çözüm} [f(\varepsilon)] = \sum a_n \varepsilon^n; \varepsilon = 1 \rightarrow \text{çözüm} [f(\varepsilon)]: \sum a_n \quad (3)$$

Bu yaklaşımda problem, “ $f(\varepsilon)$ ” serisinin a_n elemanlarını bulmaya dönüşür. Seri iraksak olabilir; iraksak serilerde asimptotik analiz teknikleri içinde çeşitli toplama yöntemleri ile anlamlı sonuca ulaşılabilir. Hatta iraksak seriler asimptotik olarak sonuca, yakınsak serilerden çok daha hızlı yakınsayabilir [1, 6]. Ayrıca, asimptotik yaklaşımlarda, gerçek değere olan yaklaşım, seri içindeki terim sayısının fazlalığı ile değil, çözüm yapılacak noktaya asimptotik olarak ne kadar yakınsandığı ile ölçülür. Matematiksel bir ifadeyle, yakınsak seri çözümlerinde ($n \rightarrow \infty$) doğruluk açısından önemli iken, asimptotik (iraksak) seri çözümlerinde ($\varepsilon \rightarrow 0$) önem kazanır. Dolayısıyla serinin tüm elemanlarını bulmak yerine, birinci terim (*leading order term*) yanında düzeltici birkaç terimi bulmak, sonuca yeterince yakınsayarak ulaşmak için yeterli olabilir.

Diferansiyel Maxwell denklemleri ile modellenen elektromanyetik yayımların, Pertürbasyon Teorisi ile çözümünde ise başlangıç koşulları (*initial conditions*) veya sınır değerleri (*boundary conditions*) kritik rol oynar. Hangi başlangıç koşulunun bilindiğine göre çözüm yöntemleri de değişiklik gösterir. Aşağıdaki bölümlerde, Pertürbasyon Teorisi’ne farklı yaklaşım örnekleri verilecektir.

2.1. Pertürbasyon Teorisi’nde Analitik Yaklaşımlar (Analytic approaches in perturbation theory)

Bu bölümde, Pertürbasyon Teorisi örnekleri verilirken, makalede kullanılan tekil pertürbasyon yöntemi daha detaylı olarak ele alınacaktır.

2.1.1. Sıradan Pertürbasyon (Regular perturbation)

Sıradan pertürbasyon problemleri, denklem katsayılarında oluşan değişimin denklemin derecesini ve denklem tipini değiştirmedığı durumlardır. Bu gibi problemlerde pertürbasyon, çıkış fonksiyonunda önemli farklılıklara yol açmaz.

Sıradan pertürbasyon, $f(x) = x^3 - x + \varepsilon = 0, \varepsilon \ll 1$ fonksiyon çözümü üzerinden açıklanabilir.

Eş. 2’de verilen açılıma uygun olarak denklemi sağlayan tüm çözümlerin $x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + O(\varepsilon^3)$ formatında olduğu varsayılp denklemde yerine konursa; $(x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2)^3 - (x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2) + \varepsilon = 0$ denklemi elde edilir. Buradan benzer üslü pertürbasyon (ε) terimleri gruplarsa Eş. 4’de verilen denklem grubu elde edilir.

$$\left. \begin{aligned} (i) \quad \varepsilon^0 \rightarrow x_0^3 - x_0 &= 0; \\ (ii) \quad \varepsilon^1 \rightarrow 3x_0^2 x_1 - x_1 &= 0; \\ (iii) \quad \varepsilon^2 \rightarrow 3x_0 x_2 - x_2 + 3x_0 x_1^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

(i)’den, $x_0 = 0, \pm 1$ (*leading order term*); ve (ii)’den $x_1 = 1/1 - 3x_0^2$ (1.düzeltilme terimi) olarak çözülür ve diğer çözümler de benzer şekilde, $x = \varepsilon + O(\varepsilon^2)$ ve $x = \pm 1 - (1/2)\varepsilon + O(\varepsilon^2)$ olarak bulunur. Burada x için bulunan asimptotik seri açılımı, aynı zamanda yakınsak (*convergent*) “power serisi”dir. Seriyi 2. ve daha yüksek düzeltme terimleri de benzer şekilde eklenebilir ancak asimptotik serilerin genel karakteristiği olarak doğruluk, giriş bölümünde de bahsedildiği üzere terim sayısı artışı ile değil, asimptotik değere yaklaşım ile artar.

Aynı yaklaşım ile $x^2 - 3.99x + 3.02 = 0$ örneğinde pertürbasyon parametresi, $\varepsilon = 0,01$ olarak seçildiğinde denklem; $x^2 + (\varepsilon - 4)x + (3 + 2\varepsilon) = 0$ şekline dönüşür ve yukarıda açıklanan yöntem ile çözülebilir.

Bu denklemlerde pertürbasyonun “0” olması durumunda denklemin üstel derecesi ve karakteristiği korunduğundan sıradan (*regular*) özellik gösterir.

2.1.2. Tekil pertürbasyon (Singular perturbation)

Tekil pertürbasyon problemlerinin en önemli belirteci, pertürbasyon parametresinin en yüksek dereceli terimin katsayısı olması ve dolayısıyla “0” olduğunda denklemin karakteristiğinin değişmesidir.

Bölüm 2.1.1’de $f(x) = x^3 - x + \varepsilon = 0, \varepsilon \ll 1$ örneğinde verilen pertürbasyon, en üst seviyeli terime uygulanırsa, $\varepsilon x^3 - x + 1 = 0$ fonksiyonu ile modellenilebilir. Fonksiyonda “ $\varepsilon=0$ ” durumunda denklem karakteristiğinin değiştiği, 3. dereceden (kübik) fonksiyonun 1.dereceden doğrusal (*linear*) bir fonksiyona dönüştüğü görülmektedir. Sıradan pertürbasyon çözümü olarak, $x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + O(\varepsilon^3)$ açılımı denklemde yerine konup benzer üslü pertürbasyon (ε) terimleri Eş. 5’deki gibi gruplarsa;

$$\left. \begin{array}{l} (i) \quad \varepsilon^0 \rightarrow -x_0 + 1 = 0; \\ (ii) \quad \varepsilon^1 \rightarrow -x_1 + x_0^3 = 0; \\ (iii) \quad \varepsilon^2 \rightarrow -x_2 + 3x_0^2 x_1 = 0 \end{array} \right\} \quad (5)$$

denklemleri elde edilir.

(i)'den $x_0 = 1$, (i) ve (ii) den $x_1 = 1$; (i), (ii), (iii)'den; $x_2 = 1/3$ bulunur. Bu durumda denklemin tek çözümü;

$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 = 1 + \varepsilon + \varepsilon^2 / 3$ olur. Aslında 3. dereceden bu denklemin 3 kökü olması gerekirdi ancak tek çözüm bulunabildi, çünkü diğer çözümler, $\varepsilon \rightarrow 0$ iken sonsuza yakınsayarak çözüm kümesinden çıktı. Bu durum, fonksiyonun ilk teriminin $\varepsilon \rightarrow 0$ iken kaybolmasıyla 3.derece bir fonksiyondan 2.derece bir fonksiyona dejenere olmasının bir sonucudur. Pertürbasyon teorisi diğer 2 köke aşağıda açıklanan "Tekil Pertürbasyon Yöntemi" adımları ile ulaşılır.

- $x(\varepsilon)$ denklemleri ölçeklendirilir : $x(\varepsilon) = \frac{y(\varepsilon)}{\delta(\varepsilon)}$
 - δ faktörü, "baskın denge" (*dominant balance*) yöntemi ile belirlenir,
 - $x = \frac{y}{\delta}$ denklemde yerine konur ve $\varepsilon \frac{y^3}{\delta^3} - \frac{y}{\delta} + 1 = 0$ denklemi elde edilir,
 - Denklemin katsayıları; $(\frac{\varepsilon}{\delta^3}, \frac{1}{\delta}, 1)$ dir. Bunlar arasında her çift kombinasyonu için baskın denge yöntemi uygulanır. Ancak, birbirine asimptotik olarak eşit hangi iki terimin, diğer terim(ler)'e baskın olduğunu bulmaktır.
 - (1. ve 3. katsayılar): $\frac{\varepsilon}{\delta^3} \sim 1 \rightarrow \delta \sim \varepsilon^{1/3}$; katsayılar; $1, \frac{1}{\varepsilon^{1/3}}, 1 \Rightarrow \varepsilon \rightarrow 0$ iken, "1. ve 2. terimler, 3. terimden çok daha büyüktür" denemez, çünkü 2. terim, $1/\varepsilon^{1/3}, \varepsilon \rightarrow 0$ iken diğer 2 terimden büyüktür. Dolayısıyla, "bu iki terim denklemde baskındır" varsayımı doğru değildir.
 - (2 ve 3. katsayılar): $\frac{1}{\delta} \sim 1 \Rightarrow \delta = 1$ olur ve başlangıçtaki denklem formuna geri döndüğünden bu seçim de bir çözüm olmaz (*trivial solution*).
 - (1 ve 2. katsayılar): $\frac{\varepsilon}{\delta^3} \sim \frac{1}{\delta} \rightarrow \delta \sim \varepsilon^{1/2}$;
 - 1. 2. ve 3. katsayılar; $\frac{\varepsilon}{\varepsilon^{3/2}}, \frac{1}{\varepsilon^{1/2}}, 1$ olur ve $\frac{1}{\varepsilon^{1/2}}, \frac{1}{\varepsilon^{1/2}}, 1 \Rightarrow \varepsilon \rightarrow 0$ iken, 1. ve 2. terimler, 3. terimden çok daha büyüktür. Dolayısıyla "bu iki terim denklemde baskın"dır varsayımı, asimptotik olarak doğru bir varsayımdır.
 - Bir önceki adımda belirlenen ölçeklendirme faktörü ($\delta \sim \varepsilon^{1/2}$), denkleme uygulandığında,
- $$\varepsilon \frac{y^3}{\delta^3} - \frac{y}{\delta} + 1 = 0 \rightarrow \varepsilon \frac{y^3}{\varepsilon^{3/2}} - \frac{y}{\varepsilon^{1/2}} + 1 = y^3 - y + \varepsilon^{1/2} = 0$$
- denklemleri elde edilir.

Bu denklem artık sıradan pertürbasyon yöntemi ile çözülebilir, çünkü yapılan dönüşüm ile en üst dereceli terim (y^3), pertürbasyonun 0'a yakınsaması durumunda yok olmamaktadır.

$y = y_0 + \varepsilon y_1 + O(\varepsilon^2)$, $y^3 - y + \varepsilon^{1/2} = 0$ denkleminde yerine konup eşit üslü pertürbasyon parametreleri gruplanarak elde edilen denklemler çözüldüğünde,

$$y = \pm 1 - \frac{1}{2} \varepsilon^{1/2} + O(\varepsilon^2) \text{ bulunur. } x = \frac{y}{\delta} = \frac{y}{\varepsilon^{1/2}} \text{ baskın denge}$$

ölçeklendirme çevrimi $y = \varepsilon^{1/2} x$ ile geri alınırsa,

$$x_{2,3} = \pm \frac{1}{\varepsilon^{1/2}} - \frac{1}{2} + O(\varepsilon^2) \text{ olur. Böylece "kayıp" 2 kök de bulunmuş olur.}$$

Yukarıda açıklanan yöntem tekil pertürbasyon tekniğinin temelidir ve Maxwell Denklemleri gibi diferansiyel denklemlerde de gerektiğinde aynı şekilde uygulanabilir. 3.1 bölümünde analitik pertürbasyon yöntemleri açıklanacak ve elektromanyetik yayılım denklem çözümü için kullanılacaktır.

2.2. Pertürbasyon Teorisi'nde Sayısal Yaklaşımlar (Numeric approaches in perturbation theory)

2.2.1. Ters saçılım problemleri-TSP (Inverse Scattering Problems-ISP)

Cevabın bilindiği, ancak sorunun bilinmediği, ya da sonucun bilindiği halde sebebin bilinmediği ve araştırıldığı problemlere "Ters Problem" veya "Ters Saçılım Problemleri" denir (Şekil 2). Ters saçılım problemlerinde, herhangi bir yüzeye Elektromanyetik (EM) dalga uygulandığında, bu yüzey, eğer EM dalganın üretildiği ortam koşullarına tam uyumlu, "perfect match" değilse, gelen dalganın bir bölümünü geri yansıtır ve bu yansıma çeşitli yöntemlerle hesaplanabilir/ölçülebilir. Bu bölümde bir yüzeyden gelen elektromanyetik yansımanın; faz, genlik ve istatistiksel özelliklerindeki değişimlerin ölçüldüğü durumlarda değişimlere neden olan parametreler ele alınmıştır. Objede herhangi bir deformasyon oluşturmadan sadece yüzeyden yapılan ölçümlerle kesin olarak belirlenemeyen alt katmanlarının elektriksel parametreleri (ε, μ, σ) ve/veya fiziksel özellikleri (tabaka içindeki yeri, kalınlığı, fiziksel özellikleri gibi) hakkında bilgi çıkarımları üzerinde teorik bilgiler verilecektir.



Şekil 2. Ters Saçılım Problemi (Inverse Scattering Problem- ISP)

2.2.2. Rastlantısal dağılımlar ve Monte Carlo yöntemi ile TSP'lere yaklaşım (Monte Carlo based random distributions approach for RSP)

Elektriksel özellikleri farklı herhangi iki yüzey arasında yansıma oluşur. Katman sayısı artınca, katmanların iç yüzeylerin arasında iç yansımaları da oluşur (Şekil 3).

Çok katmanlı yapılarda, en üst tabakadan uygulanan RF sinyali (Şekil 3), içeride tabakalardan yansıyarak üst yüzeyde toplam bir yansıma

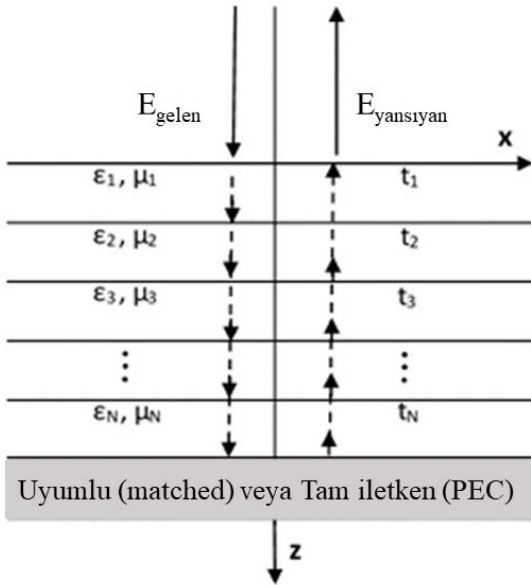
değeri oluşturur. Çalışmalarımızda kullandığımız değer Eş. 6 ile hesaplanabilmektedir [7].

$$R_{i,i+1} = \frac{r_{i,i+1} + R_{i+1,i+2} e^{-j2k_i t_{i+1}}}{1 + r_{i,i+1} R_{i+1,i+2} e^{-j2k_i t_{i+1}}} \quad (6)$$

burada, $r_{i,i+1} = \frac{\mu_{i+1} k_i - \mu_i k_{i+1}}{\mu_{i+1} k_i + \mu_i k_{i+1}}$, dalga boyu $k_i = 2\pi f \sqrt{\epsilon_i \mu_i}$

Şekil 3’de, katman (i) ve (ii) arasındaki yansımaya katsayısını hesaplayan genel ifade (4)’de verilmiştir. “R” değeri yinelemeli (recursive) olarak hesaplanır ve herhangi 2 tabaka arasındaki (i,i+1) yansımaya katsayısını (reflection coefficient) simgeler. $R_{0,1}$ ise, yüzeyde görünen ve içerideki tüm 2.derece yansımaları içeren bileşke yansımaya katsayısıdır (Şekil 3). Problemlerin çözümünde iç tabakaların ölçüm zorluğu nedeniyle tahmin edilen değerlerde özellikle fiziksel (t) ve elektriksel (ϵ, μ) sapmalar görülebilir. Parametredeki bu değişimler, çok küçük olduğu durumda olasılık dağılım fonksiyonları ile temsil edilebilir. Böylelikle ters saçılım probleminin çeşitli pertürbasyon uygulamaları yapılabilir.

Yapıya bağlı olarak en alttaki tabaka “Tam İletken” (PEC-Perfect Electric Conductor) olabilir ve bu durumda sinyal faz değiştirerek aynı genlikte geri yansır. En alt tabaka, sonsuza uzanan bir yeraltı katmanı gibi gösterilmek istenirse, bu kez “uyumlandırılmış (matched)” sınır değeri seçilir ve tabakaya ulaşan sinyal geri yansımadan, tamamen absorbe edilir [7]. Çalışmamızda, 0’dan farklı değere sahip elektriksel parametreler (ϵ, μ, σ) stokastik olarak kendi değeri etrafında değiştirilmiş ve çok katmanlı yapıda yansımaya karakteristiğinde değişimlere bakılmıştır. Burada amaç, sisteme müdahale etmeden ölçülemeyen parametrelerin (yer altında su kaynağının yeri, başka bir sıvının elektriksel özelliği, deri altında farklılaşan yapılar gibi) tahmin edilenden farklı (pertürbe) olmuş durumunu modellemektir. Normal (Gaussian) olasılık dağılımlı değişimlerin ortalama (mean) ve standart sapma (variance) değerleri ile parametreye uygulanan pertürbasyon tipi değiştirilmiş ve çıkış (output) parametresindeki değişim gözlenmiştir [8, 9].



Şekil 3. Basit yansımaya problemi tanımı (Definiton for a simple reflection problem)

2.2.2 bölümünde örnek uygulaması verilen daha genel yapıda, herhangi bir parametrenin, fiziksel yapısında (kalınlık, derinlik), veya elektriksel (ϵ, μ, σ) özelliklerinde oluşan ve bu makalede [8] “pertürbasyon” olarak tanımlanan değişimin çıkış parametresine etkisi çerçeve bir yazılım ile değerlendirilmiştir. Değişimlerin tek tek (sadece kalınlık veya dielektrik sabiti değişimi) veya birbiri ile aynı anda (dielektrik sabiti ve rastgele değişim fonksiyonu ve iletkenlik katsayısı, gibi) uygulanmasına olanak verecek bir genel uygulama üretilmiştir. Bu uygulamada ayrıca pertürbasyon tipi sadece normal dağılım ile değil, Laplacian, Rice, Nakagami gibi farklı dağılım tipleri ile de temsil edilmiştir.

Tarafımızca yeraltı sularının kirlilik tespitine ilişkin yapılan uygulamada [9, 10] ise, simülasyon gerçekliğini artırmak ve gerçek dünyaya daha fazla yaklaşabilmek amacıyla, ölçülen yansımaya sinyaline sabit veya SNR değerine bağlı olarak rastlantısal gürültü eklenmiştir.

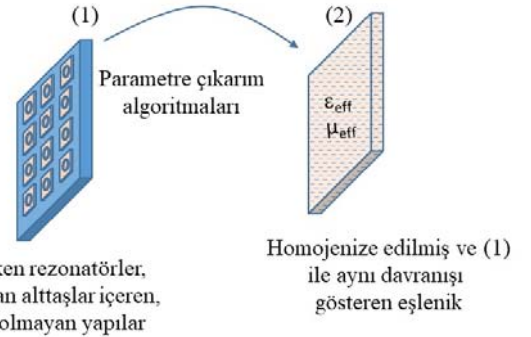
2.2.3. FDTD Yöntemi ile zaman uzayında pertürbasyon yaklaşımı (Perturbation approach in time domain by FDTD)

Tek boyutlu Elektromanyetik dalganın yayıldığı bir ortamda elektriksel parametrelerde oluşan farklılıklar Zamanda Sonlu Farklar (FDTD-Finite Difference Time Domain) yöntemi irdelenmiştir. Yayılım hattı üzerinde oluşan ve pertürbasyona yol açan engellerin dielektrik sabitindeki değişim, sınır yansımaya parametresi değişimleri, uygulanan sinyal tipi, gürültü faktörü gibi bazı küçük değişikliklerin sonuca olan etkisi bir yazılım aracılığıyla gözlenmiştir.

Bu yöntemle, Maxwell denklemlerinin diferansiyel formu sade bir şekilde ayrıklaştırılabilir. Bu çalışmada da, kavramsal bir inceleme yapıldığından tek boyutlu FDTD yöntemi kullanılmıştır. [11]

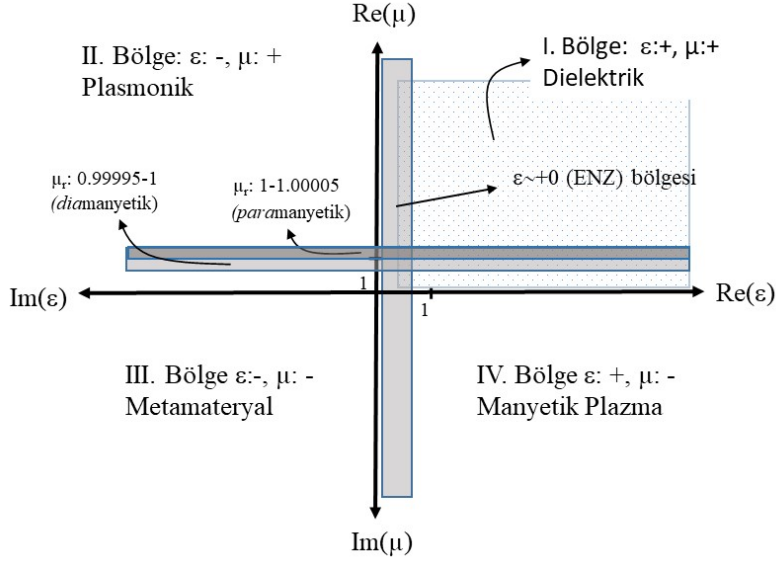
2.3. Metamateryal ve Epsilon Near Zero (ENZ) kavramı (Metamaterials and Epsilon Near Zero (ENZ) concept)

Metamateryaller, özellikle optik frekanslarda, detektör, anten, bilgisayar teknolojilerinde yeni ufuklar açan ve üzerinde yoğun araştırmalar yapılan bir konudur. Doğada bulunan materyallerin dielektrik sabiti (ϵ) ve manyetik geçirgenlik sabiti (μ) değerleri genel olarak pozittir. Ancak periyodik rezonatör yapıları ile oluşturulan meta-malzemelerin eşdeğer elektriksel değerleri (+) veya (-) olabilmektedir [12]. Metamateryaller, iletken rezonatör ve yalıtkan malzemelerin fabrikasyon ile birleştirilmesi sonucunda eşdeğer olarak doğal yollarla oluşamayacak elektriksel parametreler elde edilebilir (Şekil 4).



Şekil 4. Metamateryal malzeme oluşumu (Schematic construction of a matamaterial)

Dielektrik sabiti (ϵ) ve manyetik iletkenlik sabiti (μ)’nin pozitif veya negatif olma durumuna göre sınıflandırmaları Şekil 5’de verilmiştir.



Şekil 5. Elektriksel Parametrelerin bölgelere göre tanımları (Definition of regions according to electrical parameters)

- Bölge ($\epsilon > 0, \mu > 0$): Doğadaki malzemelerin büyük çoğunluğu bu sınıfa girer ve DSP (Double Positive Medium) olarak adlandırılır.
- Bölge ($\epsilon < 0, \mu > 0$): Plasmonik veya ENG (*Epsilon Negative Medium*) olarak anılır. Maddelerin plazma hali, belli frekanslar altında bu özelliği gösterir.
- Bölge ($\epsilon < 0, \mu < 0$): DNG (*Double Negative Medium*) olarak anılır. Bu tip malzemeler laboratuvar ortamında, suni olarak üretilirler. Bazı kaynaklarda bu bölge malzemeler Metamateryal olarak adlandırılırlar.
- Bölge ($\epsilon > 0, \mu < 0$): MNG (*Mu Negative Medium*) Bazı frekanslarda gyrotropik materyaller bu özelliği gösterebilir [4].

Metamateryaller, elektromanyetik, frekans bağımlı (terahertz/optik/Frekans seçici/tunable), plazmonik ve akustik olarak da sınıflandırılırlar. Genel olarak metamateryal çalışmaları, güneş pillerinden sayısal kayıt sistemlerine, medikal görüntüleme cihazlarından anten teknolojileri ve görünmezlik pelerinlerine kadar birçok alanda fiziksel sınırların aşarak yeni ufuklara yönelmesinde etkili olmaktadır [5, 6]. 2. bölümde, bir metamateryal içinde yol alan EM dalganın çok kısa sürede (nanosaniye (ns) mertebesinde) yayılımı, pertürbasyon yöntemi ile analiz edilmiştir.

3. Uygulamalar: EM Yayılımda Pertürbasyon Yaklaşımı (Applications: Perturbational approach in EM propagation)

3.1. EM Pertürbasyon Problemi Analitik çözüm uygulaması (EM perturbation problem, analytic solution application)

Bu çalışmamızda, Metamateryal tanım uzayının belli bir bölgesini oluşturan ve ENZ (Epsilon Near Zero) olarak adlandırılan, dielektrik sabitinin "0" a yakın olduğu bölgede, dielektrik sabiti değerinin değişiminin ve böyle bir materyal içinde Elektromanyetik alan değişimi incelenmiştir. Bu inceleme, Pertürbasyon Teorisi ve kavramlarını kullanarak çok küçük bir zaman dilimi içinde, dielektrik sabiti değerinin 0'dan farklı bir noktaya ilerlediğinde, Elektromanyetik dalganın materyal içindeki yayılım özelliklerini açıklamayı hedeflemektedir. Bu yaklaşım tekil özellik gösterdiğinden pertürbasyon teorisi, seri açılımlar için asimptotik analiz matematiğini kullanır. Asimptotik seri açılımı kullanılan Pertürbasyon çözümlerinin, Taylor Serisi temelli açılımlarla elde edilen çözümlere karşı en önemli üstünlüğü, denklem çözümünün iraksak olduğu noktalarda da tekil

pertürbasyon tekniği ile çözüm sunabilmesidir. Pertürbasyon Teorisi'nin temel matematiksel kavramı olan asimptotik analiz, bölgesel (*local*) çözüm sunar. Bu özelliği ile, iraksak nokta içeren uzaylarda çözüm sunmayan Taylor Serisi açılımlarına güçlü bir alternatif oluşturur. Taylor serileri, açılımın yapıldığı nokta çevresinde yakınsak olduğu bölgede oluşturulan serilerdir ve serideki terim sayısı arttıkça, doğruluk ve gerçek çözüme yakınlık artar. Pertürbasyon Teorisi'nde kullanılan asimptotik seriler ise bir noktaya asimptotik olarak yaklaşırken çözümler ürettiğinden, doğruluğu, o noktaya ne kadar yaklaştığına bağlıdır.

Formulasyon ve çıkarım sürecinde kullanılan elektrik alanların gösterimleri Tablo 1'de sunulmuştur.

Tablo 1. Elektrik Alan dönüşümleri ve Simgeleri (Electric Field transformations and their representations in the flow)

Elektrik Alan Vektörü (V/m): (x; y; z; t)	E
Elektrik Alan (x bileşeni) (V/m);	E_x
Elektrik Alan (x bileşeni) Frekans Fourier Dönüşümü	E_w
Elektrik Alan (x bileşeni); Uzamsal Fourier Dönüşümü	E_β
Birimsizleştirilmiş Elektrik Alan	\hat{E}
Pertürbasyon çözümü, "İç" (<i>inner</i>) Elektrik alan	E^i
Pertürbasyon çözümü, "Dış" (<i>outer</i>) Elektrik alan	E^o
Pertürbasyon çözümü, toplam Elektrik alan	\hat{E}

3.1.1. EM Yayılım Denklemleri (EM propagation equation)

Maxwell- EM yayılım denklemleri ve bunlardan türetilen kayıplı dalga yayılım denklemleri Eş. 7'de verilmiştir.

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} &= \sigma \mathbf{E} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{aligned} \right\} \rightarrow \nabla^2 \mathbf{E} - \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (7)$$

Denklemlerin daha sade ve anlaşılabilir olması için, "z" yönünde hareket eden Elektrik alanın "x" bileşeni, E_x olarak belirtilir. Çalışmamızda bu denklem formu kullanılacaktır (Eş. 8).

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \mu\sigma \frac{\partial E_x}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0 \quad (8)$$

$E(0) = 0; E' = C / \epsilon_r$

3.1.2. Uzamsal Çevrim (Spatial)

(4) denklemi, geleneksel çözüm yönteminde Frekans çevrimi (frequency transformation) ile çözülebilir. Frekans çevrimi temel prensibi Eş. 9'da verilmiştir.

$$\left. \begin{aligned} F_\omega \{E_x\} = E_\omega(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} E_x e^{-j\omega t} dt \\ \frac{\partial E_x}{\partial t} \rightarrow (j\omega)E_\omega; \quad \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} &\rightarrow (j\omega)^2 E_\omega = -\omega^2 E_\omega \\ E_\omega(0) = 0; \quad E'_\omega &= C / (\epsilon_r j\omega) \\ \rightarrow \frac{\partial^2 E_\omega}{\partial z^2} - j\omega\mu(\sigma + \omega\epsilon)E_\omega &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Denklem çözümünün tekil pertürbasyon yöntemine uyarlanabilmesi için uzamsal çevrim kullanılmıştır (Eş. 10).

$$\left. \begin{aligned} F_\beta \{E\} = E_\beta(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} E_x e^{-j\beta z} dz \\ \frac{\partial}{\partial z} \rightarrow (j\beta); \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} &\rightarrow (-\beta^2); \\ \rightarrow \epsilon_r \frac{\partial^2 E_\beta}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial E_\beta}{\partial t} + \omega^2 \epsilon_r E_\beta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Eş. 11 de, pertürbasyon parametresi, en yüksek dereceli türev teriminin katsayısı olduğundan denklem tekildir.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 E_\beta}{\partial t^2} \equiv E''_\beta, \quad \frac{\partial E_\beta}{\partial t} &\equiv E'_\beta \rightarrow \\ \epsilon_r E''_\beta + \mu\sigma E'_\beta + \omega^2 \epsilon_r E_\beta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

3.1.3. Birimsizleştirme (non dimensionalization)

PDH (Principle of Dimensional Homogeneity): Bir eşitlikte tüm bileşenler aynı boyutta ve aynı birimde olmalıdır.

Birimlerin toplanabilmesi için üstel olarak artan "x"nin birimli parametre olmaması gerekir. (örneğin "x"; uzunluk ölçüsü ve birimi metre (m) ise, (x²)nin birimi (m²), (x³)ün birimi (m³) olur ve örneğin, 1 + x + x² / 2! + x³ / 3! + ... toplamı farklı birimler içerdiğinden doğru bir işlem olmaz. Aynı şekilde, Elektromanyetik alan denkleminin asimptotik seri açılımının yapılabilmesi için Elektrik alan "E" (V/m) ve zaman "t"(s) parametrelerinin birimsizleştirilmesi gereklidir. Birimsizleştirme, parametrenin kendi sınıfından bir sabite oranlanarak birimden arındırılması ile sağlanır.

$$\tilde{E} = \frac{E_\beta}{E_0} \text{ (birimsiz); } \tau = \frac{t}{t_0} \text{ (birimsiz)} \cdot E_0 \text{ ve } t_0 \text{ için, birden fazla}$$

çözüm olabilir. Örneğin; $t_0 = \frac{1}{\omega}$ nin birimi saniye (s) olduğundan,

$\frac{t}{t_0}$ birimsizdir. Aynı şekilde $t_0 = \frac{\sigma}{\epsilon}$ ifadesinin de birimi (s)'dir ve bu da bir çözümdür.

$$t_0 = \frac{\sigma}{\omega^2 \epsilon}; E_\beta = \tilde{E} E_0; t = \tau t_0;$$

başlangıç değeri : $\epsilon_r \frac{\partial E_\beta}{\partial t} = C \rightarrow E_0 = \frac{\epsilon_0 C}{\sigma}$ kullanılacaktır (Eş. 12).

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E_\beta}{\partial t} = \frac{E_0}{t_0} \frac{\partial \tilde{E}}{\partial \tau}; \quad \frac{\partial^2 E_\beta}{\partial t^2} = \frac{E_0}{t_0^2} \frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial \tau^2}; \\ \tilde{E}(0) = 0; \quad \tilde{E}'(0) = 1 / \tilde{\epsilon}_r \\ \rightarrow \left(\frac{\omega\epsilon}{\sigma} \right)^2 \tilde{E}'' + \tilde{E}' + \tilde{E} = 0; \\ \tilde{\epsilon}_r = \left(\frac{\omega\epsilon}{\sigma} \right)^2 \rightarrow \tilde{\epsilon}_r = \left(\frac{\omega\epsilon_0}{\sigma} \right)^2 \epsilon_r^2 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Eş. 12'de verilen $\tilde{\epsilon}_r = \left(\frac{\omega\epsilon}{\sigma} \right)^2 = \left(\frac{\omega\epsilon_0}{\sigma} \right)^2 \epsilon_r^2$, pertürbasyon

parametresi olarak belirlenen dielektrik sabiti (permittivite)'nin, frekans (ω) ve iletkenlik (σ) katsayılarını da içeren bir "süper pertürbasyon" parametresi olduğu gözlenmiştir. Birimsiz denklem Eş. 13'de verilmiştir.

$$\tilde{\epsilon}_r \tilde{E}'' + \tilde{E}' + \tilde{E} = 0, \tilde{E}(0) = 0; \tilde{E}'(0) = 1 / \tilde{\epsilon}_r \quad (13)$$

3.1.4. Pertürbasyon teorisi ile çözüm (Solution with perturbation theory)

3.1.4.1. Tekil pertürbasyon parametreleri (Parameters determination of singular perturbation)

(9)'da verilen denklem, en yüksek dereceden türevli terimin pertürbe edildiği, tekil (singular) denklemdir. Tekillik özelliği, pertürbasyonun olmadığı, $\tilde{\epsilon}_r = 0$ durumunda (leading term approximation); denklemin boyut değiştirmesi, 2. dereceden türev denkleminin 1 dereceli türev denklemine dönüşmesidir ($\tilde{\epsilon}_r = 0 \rightarrow \tilde{E}' + \tilde{E} = 0$)

Tekil denklemlerde, değişimin çok hızlı olduğu ve sistemin matematiksel boyutunun değiştiği bölge; iç (inner), değişimin görece çok fazla olmadığı bölge; dış (outer) olarak adlandırılır. Genel çözüm ise her iki bölgede farklı tekniklerle yapılarak bunların üst üste bindirilmesi (superpose) edilmesi ile elde edilir.

Pertürbasyon çözümlerinde diferansiyel denklemler genellikle aşağıda verilen sınır değer durumları ile sınıflandırılır.

- Başlangıç tabakası (Initial layer) problemleri: çözüm kümesi başlangıçta bir sıçrama yapar (iç çözüm), sonra düz bir yapıda seyrederek (dış çözüm),
- Sınır tabakası (Boundary layer) problemleri: denklemde üst ve alt sınırlarda ani sıçramalar olur
- İç tabaka sınır değeri (internal layer Boundary Value problem) problemleri: sıçrama, başlangıç veya bitiş sınırlarında olmayan ancak çözüm kümesi içinde ayrı bir bölgededir.

Bu makalede, pertürbasyon tekniği ile çözülen EM yayılım problemi, başlangıç değeri (*initial condition*) verilen ve zaman içinde azalan tipik başlangıç tabakası (*Initial layer*) problemidir. Bu probleme yaklaşım, iç (*inner*) ve dış (*outer*) bölge çözümleriyle olacaktır.

Çözümü hedeflenen denklem, Eş. 5'te verilen (birimsiz) “ $\tilde{\epsilon}_r \tilde{E}'' + \tilde{E}' + \tilde{E} = 0$, $E(0) = 0$; $E'(0) = 1/\tilde{\epsilon}_r$ ” denklemdir. Aşağıda, Pertürbasyon Teorisi kullanılarak yapılacak çözümde, elektrik alanın çok hızlı değiştiği, (metamateryale çarptığında ilk birkaç ns'de değişimler) iç çözüm; (E^i) ile, daha sonra, değişimin görece daha yavaş olduğu bölgedeki dış çözüm; (E^o) toplanır, $\hat{E} = E^i + E^o$.

Aşağıda, iç ve dış bölge çözümlenmeleri yapılacaktır,

- İç çözüm: Bu çözüm, bölüm 2.1.2'de açıklandığı gibi “baskın denge” yöntemi kullanarak bir ölçeklendirme sabiti bulmayı ve değişimin çok hızlı olduğu bölgeyi genişletip daha detaylı analiz yapılabilmesini hedefler.

Zaman genişletme faktörü (*scaling factor*) “ δ ” olsun.

$\tilde{\tau} = \frac{\tau}{\delta} \rightarrow \tilde{E}' = \frac{\hat{E}'}{\delta}$; $\tilde{E}'' = \frac{\hat{E}''}{\delta^2}$ dönüşümleri yapılsa,

$$\tilde{\epsilon}_r \tilde{E}'' + \tilde{E}' + \tilde{E} = 0 \rightarrow \frac{\tilde{\epsilon}_r}{\delta^2} \hat{E}'' + \frac{1}{\delta} \hat{E}' + \hat{E} = 0 \quad \text{denklemi}$$

elde edilir. Bu noktada amaç, \tilde{E}'' teriminin katsayısını pertürbasyon parametresi ($\tilde{\epsilon}_r$)'dan kurtarmaktır.

Baskın denge metodu denklemin 1. ve 2. terim katsayılarına

uygulanırsa; $\frac{\tilde{\epsilon}_r}{\delta^2} \approx \frac{1}{\delta} \rightarrow \delta = \tilde{\epsilon}_r \rightarrow \tilde{\tau} = \frac{\tau}{\tilde{\epsilon}_r}$ olur. 1-3 ve 2-3.

terim eşleşmeleri ise baskın denge şartlarını sağlamaktadır (Eş. 14).

$$\rightarrow E^{i''} + E^{i'} + \tilde{\epsilon}_r E^i = 0 : E^i(0) = 0; E^{i'}(0) = 1 \quad (14)$$

Asimptotik seri açılımı ile Eş. 8 denklemi, sıradan pertürbasyon problemi olarak çözülebilir (Eş. 15).

$$\rightarrow E^i = E_0^i + \tilde{\epsilon}_r E_1^i + O(\tilde{\epsilon}_r^2) \quad (15)$$

Seri açılımı, Eş. 8'de yerine konup benzer üslü pertürbasyon terimleri bir araya toplanırsa,

$$\left. \begin{aligned} \rightarrow \frac{\partial^2 E_0^i}{\partial \tilde{\tau}^2} + \frac{\partial E_0^i}{\partial \tilde{\tau}} = 0 \\ E_0^i(0) = 0; E_0^{i'}(0) = 1 \end{aligned} \right\} E_0^i = 1 - e^{-\tilde{\tau}} \quad (16)$$

Benzer şekilde, 1. terim çözümü Eş. 17'de verildiği gibi olur.

$$\left. \begin{aligned} \rightarrow \frac{\partial^2 E_1^i}{\partial \tilde{\tau}^2} + \frac{\partial E_1^i}{\partial \tilde{\tau}} = -E_0^i \\ E_1^i(0) = 0; E_1^{i'}(0) = 0 \end{aligned} \right\} E_1^i = 2 - \tilde{\tau} - (2 + \tilde{\tau})e^{-\tilde{\tau}} \quad (17)$$

Toplam iç çözüm, Eş. 16 ve Eş. 15'de bulunan çözümlerin Eş. 13'de yerine konmasıyla bulunur (Eş. 18).

$$E^i = (1 - e^{-\tilde{\tau}}) + \tilde{\epsilon}_r [2 - \tilde{\tau} - (2 + \tilde{\tau})e^{-\tilde{\tau}}] + O(\tilde{\epsilon}_r^2) \quad (18)$$

- Dış çözüm: Dış çözüm için problemin önündeki en büyük engel, “iç çözüm” gibi başlangıç noktasından değil, hızlı değişimin sona erdiği bölgeden başladığı için, başlangıç koşullarını kullanamıyor olmasıdır. Ayrıca pertürbasyon parametresi en yüksek türevli terimin katsayısı olduğundan pertürbasyonun “0” olması durumunda denklem derecesi azalacaktır. Ancak dış çözümde, hızlı değişimin yaşandığı lokal çözümünden uzaklaşıldığı için, bu durum iç çözümde olduğu kadar büyük değişikliğe yol açmayacak, iç çözümün bittiği yer ile dış çözümün başladığı yerin uyumlandırılması ile denklemde baskın denge gibi bir çevrime gerek kalmayacaktır. Dış çözüm için de asimptotik seri açılımı Eş. 19'da belirtildiği gibi yapılabilir.

$$E^o = E_0^o + \tilde{\epsilon}_r E_1^o + O(\tilde{\epsilon}_r^2) \quad (19)$$

Dış çözüm seri açılımı da iç çözümde uygulandığı gibi, ana denklemde yerine konup benzer üslü pertürbasyon terimleri katsayıları “0” a eşitlenirse; E_0^o ve E_1^o için denklemler oluşur.

Ancak bu denklemlerin başlangıç noktaları tanımlı değildir çünkü dış çözüm, iç çözümün bittiği; çözümün bu aşamasında henüz belirlenmemiş bir noktadan başlar. Bu nedenle, jenerik çözümler üretilip, çeşitli uyumlama teknikler ile Eş. 20'de verildiği gibi çözüme ulaşılabılır.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E_0^o}{\partial \tau} + E_0^o = 0 \rightarrow E_0^o = Ae^{-\tau} \\ \frac{\partial E_1^o}{\partial \tau} + E_1^o = -\frac{\partial^2 E_0^o}{\partial \tau^2} \rightarrow E_1^o = (-A\tau + B)e^{-\tau} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Eş. 20'de bulunan E_0^o ve E_1^o değerleri Eş. 17'de yerine konursa, dış çözüm bulunur.

$$E^o = E_0^o + \tilde{\epsilon}_r E_1^o = Ae^{-\tau} + \tilde{\epsilon}_r (-A\tau + B)e^{-\tau} \quad (21)$$

Dış çözüm, yukarıda bahsedildiği üzere, “A” ve “B” bilinmezlerini içerir, parametrikler. Bu parametreler, Eş. 12'de verilen iç çözüm ile farklı teknikler ile birleştirilerek bulunur. Başlangıç olarak fonksiyonun sürekliliği gereği, iç çözümün bittiği yerde dış çözüm başladığı varsayılır, bu noktaya anahtarlama noktası (*switching point*) adı verilir. İç çözüm ve dış çözüm bu noktada eşitlenir. Eşitliğin yazılabilmesi için, daha önce baskın denge yöntemi ile değiştirilen zaman parametresi ilk haline çevrilir ($\tilde{\tau} = \tau/\tilde{\epsilon}_r$). Bahsedilen işlemler Eş. 22'de yapılmış, ardından iç ve dış çözümler eşitlenmiştir.

$$E^o = E_0^o + \tilde{\epsilon}_r E_1^o = Ae^{-\tau} + \tilde{\epsilon}_r (-A\tau + B)e^{-\tau} \quad (22)$$

Zaman parametresi dış çözüm (19) ile aynı formata getirilen iç çözüm, anahtarlama noktasında [$t = \xi(\epsilon) = \tilde{\tau}$] dış çözüm ile Eş. 23'de verildiği gibi eşitlenir.

$$E^i(\xi) = E^o(\xi) \rightarrow$$

$$E^i = (1 - e^{-\tau/\tilde{\epsilon}_r}) + \tilde{\epsilon} \left\{ 2 - \frac{\tau}{\tilde{\epsilon}_r} - \left(2 + \frac{\tau}{\tilde{\epsilon}_r} \right) e^{-\tau/\tilde{\epsilon}_r} \right\}$$

$$= \left\{ 1 - \tau - (1 + \tau) e^{-\tau/\tilde{\epsilon}_r} \right\} + \epsilon \left\{ 2 - 2e^{-\tau/\tilde{\epsilon}_r} \right\}$$
(23)

Eş. 23’de, “A” ve “B” parametrelerinin yanı sıra, anahtarlama zamanı $t = \xi$ noktası da bilinmediğinden, kesin bir çözümü yoktur. Asimptotik analiz yöntemleri kullanılarak iç çözümün geçerli olduğu aralık ($t \leq \epsilon_r$) genişletilip dış çözüm alanında bazı varsayımlarla yaklaşık çözümler üretilebilir. Eş. 23 denklemine $e^{-\xi/\tilde{\epsilon}_r}$ parametresinin asimptotik olarak 0’a giderken ($\tilde{\epsilon}_r \rightarrow 0$) küçülmesi için, anahtarlama noktasının, $\xi \gg \tilde{\epsilon}_r$ olması gerekir. Bu varsayım, pertürbasyon parametresi ne kadar küçük ise, teorinin doğruluğu da o kadar yüksek olacaktır şeklinde yorumlanabilir.

“A” ve “B” parametrelerinin en iyi değeri için, iç ve dış çözümlerin hangi noktada eşitlenmesi gerektiği farklı yöntemlerle belirlenir. “Patching”, “Van Dyke” yöntemleri bunlardan bazılarıdır [13]. Detay matematiksel çıkarımlara girmeden, “Patching” yöntemi ile bulunan “A” ve “B” parametreleri ile bunların geçerlilik sınırları Eş. 24’de verildiği gibi olur.

$$\tilde{\epsilon}_r \ll \xi \ll \tilde{\epsilon}_r^{1/2}, A = 1; B = 2 \rightarrow E^o(\tau, \tilde{\epsilon}) = e^{-\tau} + \tilde{\epsilon}_r(\tau + 2)e^{-\tau}$$
(24)

Genel pertürbasyon çözümü ise iç ve dış çözümlerin toplamıdır (Eş. 25).

$$\hat{E} = \begin{cases} \hat{E} = E^i + E^o \\ 1 - \tau - (1 + \tau)e^{-\tau/\tilde{\epsilon}_r} + 2\epsilon \left\{ 1 - e^{-\tau/\tilde{\epsilon}_r} \right\}; & 0 \leq \tau \leq \tilde{\epsilon}_r^{2/3} \\ e^{-\tau} + \tilde{\epsilon}_r(\tau + 2)e^{-\tau}; & \tau \geq \tilde{\epsilon}_r^{2/3} \end{cases}$$
(25)

Eş. 25’de verilen $\tilde{\epsilon}_r \ll \xi \ll \tilde{\epsilon}_r^{1/2}$ aralığına uygun olarak, başlangıç zamanından itibaren geçen $\xi = \tilde{\epsilon}_r^{2/3}$ süresi, “patch” noktası olarak belirlenmiştir. Bu değer, verilen aralıkta, anahtarlama için uygun alanlardan biri olmakla beraber, “en iyi” noktanın neresi olduğu, başka bir araştırmamızın konusu olacaktır.

3.1.4.2. Pertürbasyon teorisi uygulaması (Application with perturbation theory)

Bu bölümde, yukarıda elde edilen çıkarımlar kullanılarak ENZ malzeme içinde EM dalga yayılım benzetimleri yapılacaktır.

Pertürbasyon parametresinin belirleyen $\tilde{\epsilon}_r = (\omega\epsilon_0 / \sigma)^2 \epsilon_r^2$ denklemdeki değişkenlerin (f, σ, ϵ_r) sonuca etkileri karşılaştırmalı olarak incelenecektir.

- Sabit Frekans, sabit iletkenlik, değişken dielektrik sabiti ($f=1\text{GHz}$, $\sigma=0.02$, $0.06 \leq \epsilon_r \leq 0.6$)

Bu benzetimde, dielektrik sabiti $0.06 \rightarrow 0.6$ arasında değişirken, diğer değişkenler (frekans, iletkenlik sabiti) sabit tutulmuştur. Benzetim koşumu sonucunda elde edilen grafikler Şekil 6’da verilmiştir.

Benzetimde “birimsiz” dielektrik sabiti, $\tilde{\epsilon}_r = (\omega\epsilon_0 / \sigma)^2 \epsilon_r^2$, sistemin salınma geçmesi için gerekli en düşük dielektrik sabiti $\epsilon_{r,oscillate} = \sigma / (2\epsilon_0 2\pi f)$ dir. Pertürbasyon sabiti ($\tilde{\epsilon}_r$) arttıkça, sistemin salınma başladığı (Şekil 6iii) ve pertürbasyon çözümünün yakınsamasının bozulduğu gözlenmiştir. Bu makalede kullanılan pertürbasyon tekniğinin dışında tekniklerle salınım yapan sistemler için de pertürbasyon çözümleri üretilebilir. Bir diğer tespit, pertürbasyonun doğasına ve tanımına uygun olarak, $\tilde{\epsilon}_r$ küçüldükçe (Şekil 6i) asimptotik olarak 0’a yakınsadığı için, sistemin daha iyi çözüm üretmesidir.

- Sabit Frekans, dielektrik sabiti, değişken iletkenlik ($f=10^9=1\text{GHz}$, $\epsilon_r=0.1$, $0.003 \leq \sigma \leq 0.03$)

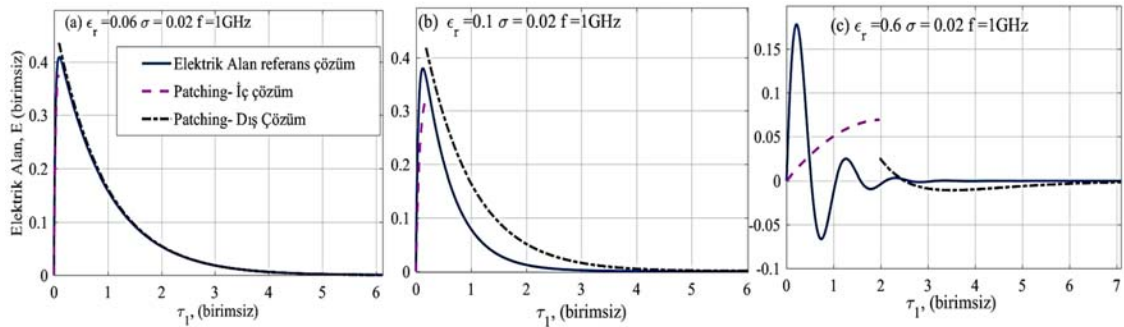
Bu kez, iletkenlik sabiti σ ; (a) 0.003, (b) 0.15, (c) 0.03 değişirken, dielektrik sabiti (ϵ_r) ve frekans sabit tutulmuştur. σ ’nın artması, pertürbasyon parametresini küçültürken, sistemin salınma girmesi için gerekli dielektrik sabiti değerini büyütmede, bir başka deyişle salınımı güçleştirmektedir. Bu olgular yukarıda açıklandığı üzere pertürbasyon çözümünü olumlu yönde destekleyen ve gerçek çözüme daha çok yaklaştıran durumlardır (Şekil 7).

- Sabit İletkenlik, sabit dielektrik sabiti, değişken frekans ($8.10^9 < f < 5.10^8$; $\epsilon_r=0.1$, $\sigma = 0.02$)

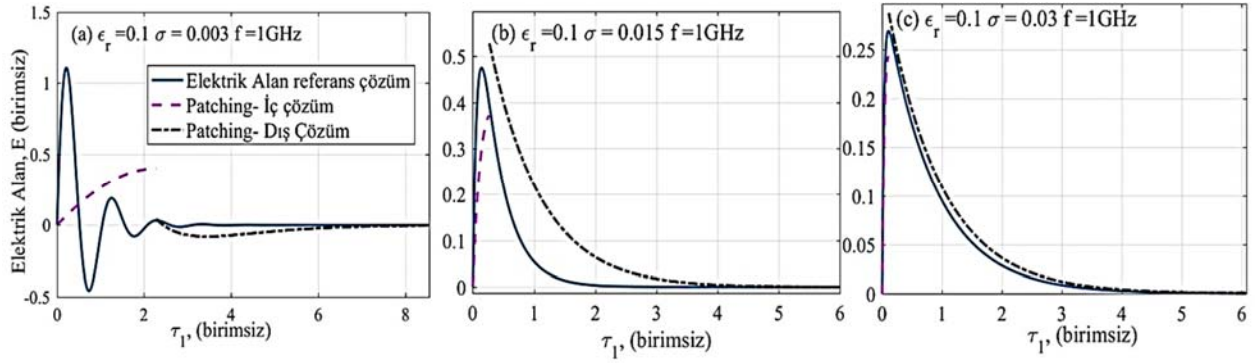
Bu benzetim koşulunda frekans, (a) 500 MHz; (b) 1 GHz ve (c) 8 GHz’e kadar artırılmıştır. Beklendiği şekilde frekans yükselince, sistem salınma girmiş ve pertürbasyon çözümü doğruluğu azalmıştır (Şekil 8). Benzetimde dielektrik sabiti ($\epsilon_r=0.1$) ve iletkenlik sabiti ($\sigma=0.02$) değiştirilmemiş, sadece frekansın etkisi irdelenmiştir.

3.1.4.3. EM yayılım problemi Sayısal çözüm uygulamaları (EM perturbation problem, numeric solution application)

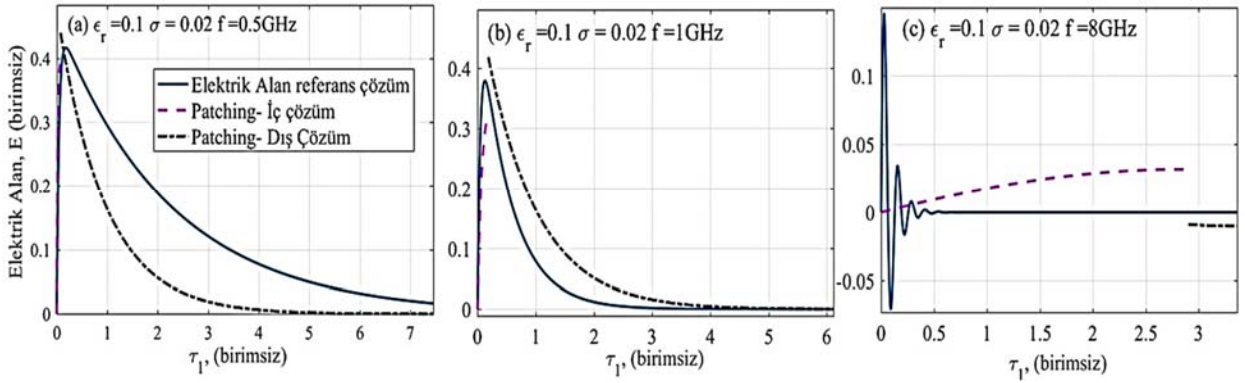
Bu uygulama grubunda, bir yüzeye Elektromanyetik (EM) dalga uygulanmış, yüzeyden yansiyarak dönen sinyal hesaplanmıştır. Sonraki adımda sistem parametrelerinde (elektriksel, fiziksel) üretim



Şekil 6. Dielektrik değişirken EM Dalga pertürbasyon çözümü (Perturbation solution while the permittivity changes)



Şekil 7. İletkenlik değişirken EM Dalga pertürbasyon çözümü (Perturbation solution while the conductivity changes)



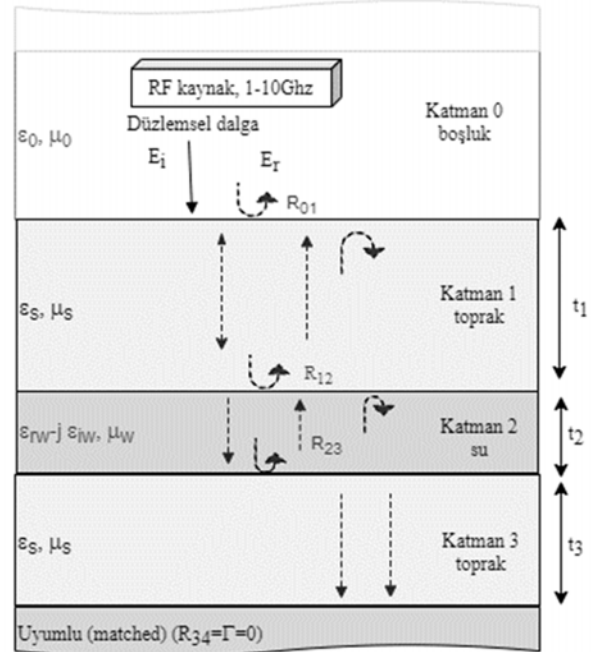
Şekil 8. Frekans değişirken EM Dalga pertürbasyon çözümü (Perturbation solution while the frequency changes)

veya analize dayalı oluşan küçük değişimlerin (pertürbasyon) yansıma çıkış işaretleri üzerine etkileri çalışılmıştır. Bu tür cevabın bilindiği, ancak sorunun bilinmediği, ya da sonucun bilindiği halde sebebin bilinmediği durumda, sebebin araştırıldığı problemler, ters problemler olarak adlandırılır. Ters problem çözümü kavramına uygun olarak sistem parametrelerinde oluşabilecek değişimlerin hangilerinin çıkış işaretine etkisinin daha fazla olduğunu kestirebilmek hedeflenmiştir.

3.1.5. Uygulama 1: Çok katmanlı tabakalarda yansıma problemi genelleştirilmesi (Generalization of multilayer reflection problem)

Tarafımızca yapılan bu çalışmada, bir yapıda oluşabilecek tüm değişimleri (pertürbasyonları) tek tek veya aynı anda devreye alarak çıkış yansımasında oluşan değişiklikleri hesaplayabilecek genel bir çerçeve yazılımı geliştirilmiştir [8]. Uygulamada, herhangi bir elektriksel parametrede (ϵ, μ, σ), malzemenin veya ortamın fiziksel yapısında (kalınlık, derinlik) oluşan ve makalede pertürbasyon olarak tanımlanan değişimin çıkış parametresine etkisi rastgele dağılım fonksiyonları ile temsil edilmiş ve çerçeve bir yazılım ile hesaplanmıştır. Olasılık dağılımları genel olarak; “sınırlı” (*Bounded: Beta, Uniform, Kumaraswamy* gibi), “sınırsız” (*Unbounded- Laplace, Gumbel, Normal* gibi) veya “pozitif” (*nonnegative- Burr, Nakagami, Rice* gibi) altında gruplanmış ve bunların kombinasyonları da çalışmamızda uygulanmıştır. Örneğin aynı problemde su tabakasının kalınlığının pertürbasyonu, “Rice” tipi olasılık dağılım fonksiyonu ile temsil edilirken dielektrik değerindeki değişim Normal (Gaussian) dağılım ile temsil edilebilmektedir. Çalışmamızda karmaşık olasılık problemleri Monte Carlo koşullarıyla çözülmüş ve çıkış yansımasının olasılık dağılımı elde edilmiştir [8]. Çoklu yansımalar özelinde tanımlanan problemler “çoklu yansıma formülü” kullanılarak Pertürbasyon Teorisi bakışı ile bulunmuş ve genel olarak “Sıradan (*Regular*)” problem özelliği göstermiştir [14]. Sıradan

problemlerde, giriş parametrelerinde beklenen değere göre sapmaları simgeleyen rastgele değişimler, çıkış yansıma karakterinde ve olasılık dağılım fonksiyonlarında çok farklı özellikler, ani değişimler göstermemiştir.



Şekil 9. Çok katmanlı yapılarda yansıma problemi modeli (reflection modelling in multi layer structures)

Çalışmamızda belli katmanlarda oluşan farklılıkların (örneğin yer altında bir su tabakasının derinliğinin değişimi) belirleyici özelliklerini bulabilmek için çıkışta oluşan parametrenin birçok stokastik çözümlemede olduğu gibi 1. moment (μ , ortalama değer), 2. moment (σ , standart sapma) değerleri incelenmiş, ancak fark yaratacak bilgi taşımadığı gözlenmiştir. Bunun üzerine 3. moment (*skewness*) ve 4. moment (*kurtosis*) değerlerine de bakılmıştır. 3. ve 4. moment dağılımları, normal dağılım uygulanan bir değişim etkisinin çıkışta ne kadar normal dağılımdan uzaklaştığının bir ölçüsüdür. Bu şekilde, yüzeyin altında kalan ve görünmeyen tabakadaki değişim fark edilebilmektedir. Ayrıca parametrelerdeki pertürbasyon, Normal (*Gaussian*) dışında bir dağılıma sahip olabilir. Bu durumu modelleyen farklı olasılık dağılımları uygulandığında, çalışmamız içinde belli durumlarda belirteç olabilecek farklılıklara rastlanmıştır [8]. Rastgele özellik gösteren çıkış parametresinin *skewness* ve *kurtosis* değerleri ile, olasılık dağılımındaki değişikliklere bakıp, referans ölçümlerle karşılaştırılarak EM dalganın uygulandığı yüzeyin (yeryüzü, insan derisi, duvar, vb.) altında/arkasında neler olduğuna dair tahminler yapılabilmektedir.

3.1.6. Uygulama 2: su kirliliği tahmini (Estimation for water contamination)

Bu çalışmamızda suyun kirlenmesine yol açabilecek kimyasalların suda oluşturduğu iletkenlik artışının dışarıdan ek bir tahribat olmaksızın ölçülerek kirlilik oranı hakkında bilgi edinilmesi amaçlanmıştır [9]. Suyun kirlenmesi ve su kalitesi, içindeki bazı bileşenlerin artışı ile orantılıdır. Çalışmamızda, frekansa bağlı olarak yerin altında belli bir derinlikte olduğu bilinen su tabakasının iletkenlik değerinde küçük değişimler (pertürbasyonlar) kirlilik göstergesi olarak kullanılmıştır. (Şekil 10)

Belli iletkenlik değerleri altında frekansı değiştirerek veya belli frekans değerlerinde iletkenliği değiştirirken ölçülebilen yansıma katsayısındaki değişimleri gözlemleyen bir uygulama, çalışma kapsamında tarafımızca geliştirilmiştir. Çalışma sonuçları bölüm 4.1'de verilmektedir.

3.1.7. FDTD yöntemi ile pertürbasyon uygulaması (Perturbation application by FDTD method)

Genel tanımlaması 1.2.3 bölümünde verilen FDTD kavramının pertürbasyon alanına uygulamasında, tek boyutlu EM dalga çözümleri simüle edilmiş ve bu yapıda pertürbasyonlar yaratılarak çözümün nasıl değiştiği irdelenmiştir. Zaman-uzay boyutunda kafes (*grid*)'lere ayrılan ortamda elektrik ve manyetik alanlarda 1. ve 2. türevler,

sayısal olarak alınır ve yinelemeli olarak birbirini besleyen dalga ilerler [15]. Şekil 10'da, tipik bir elektromanyetik dalga yayılım hattı üzerinde bünye parametresi (ϵ_r) değiştirilerek oluşturulan engele bağlı pertürbasyon gösterilmiştir. Uygulamada sınır değerleri PEC (tam iletken), giriş sinyali, darbe (*impulse*) olarak tanımlanmıştır. Belli sayıda ötelemelerle (*iterasyonlar*) dalganın yapı içinde ilerlemesi, pertürbasyon etkisi göstermek üzere yapının ortasında tanımlanan, farklı dielektriğe sahip engele (pertürbasyon) çarparak yayılan dalgaların birbiri ile girişimi incelenmiştir. Çalışma sonuçları bölüm 4.2'de verilmektedir.

4. Sonuçlar ve Tartışmalar (Results and conclusions)

4.1. Su kirliliği tahmini çalışması sonuçları (Results for Estimation for water contamination)

Şekil 11a ve Şekil 11b'de, Su kirliliği tahminine yönelik yaptığımız çalışmanın sonuçları verilmiştir.

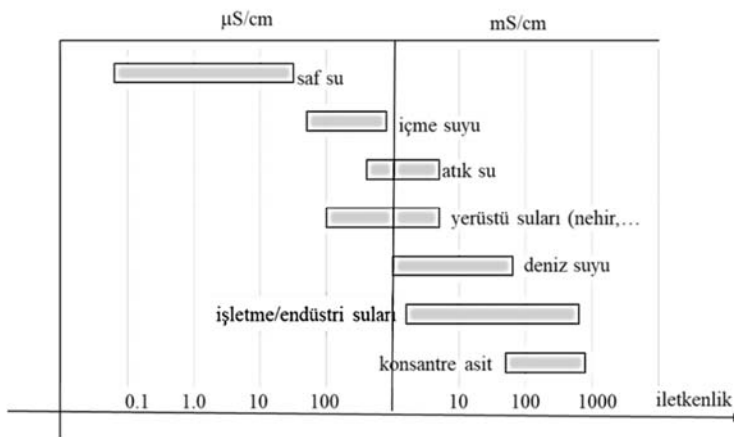
Şekil 11a ve Şekil 11b'den örnek olarak şöyle bir sonuç çıkarılabilir: bölgedeki yeraltı suyu ile ilgili yapılan çalışmalarda, $f=3.7$ GHz'de, o bölgedeki temiz suyun iletkenlik değeri ($\sigma=100$) iken yansıma değeri (-17 dB) ölçülmüş olsun. Zaman içinde yeraltı suyunun kirlenmesine neden olabilecek fabrika atıkları, su baskını gibi etkenler oldu ve aynı frekansta yansıma değeri bu kez (-35 dB) olarak ölçülsün. Bu durumda grafiklerden faydalanılarak suyun iletkenlik katsayısının 400-500 $\mu\text{S}/\text{cm}$ olduğu sonucu çıkarılabilir. İletkenlik değerindeki bu artış, sudaki kirlenmenin olası bir belirteçidir.

4.2. FDTD yöntemi ile pertürbasyon uygulaması (Results for Perturbation application by FDTD method)

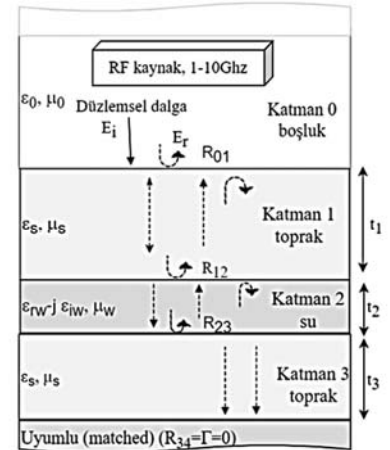
FDTD yöntemi ile pertürbasyon uygulaması için Şekil 12'de verilen yapı tanımlanmıştır. Yapıda giriş sinyali olarak darbe (*impulse*) sinyali kullanılmış, her iki uçta, tam yansıma oluşturacak (PEC) ile kaplandığı varsayılarak benzetimler tanımlanmıştır. Şekil 12'de, 5m uzunluğunda bir yapının içinde, orta nokta üzerinde pertürbasyonlar tanımlanmıştır. Belli sayıda iterasyonlar ile yapılan analizlerden örnek sonuçlar ise Şekil 13'de verilmiştir.

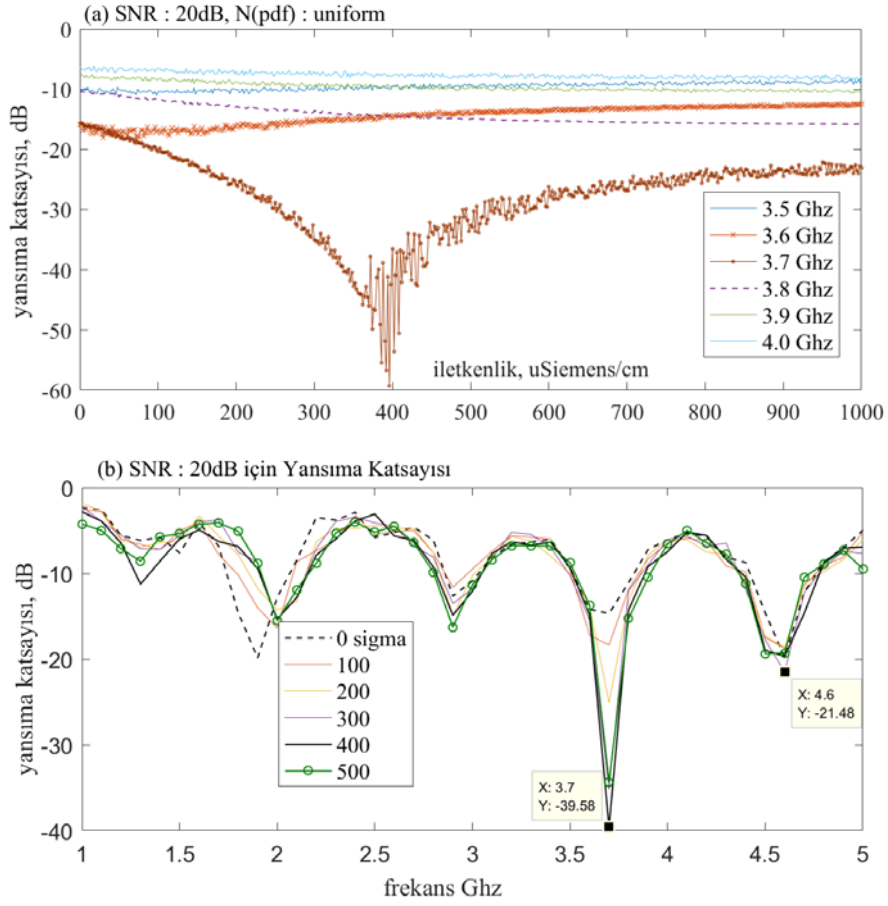
Şekil 13i de pertürbasyon olmayan durum ve buna karşılık gelen, 5000 iterasyon sonucunda yapı içinde kenarlardan tam yansarak içeride dolaşan dalganın durumu, referans olarak verilmiştir.

Şekil 13ii'de, yapının ortasına ($\epsilon_r=8$) olacak şekilde bir pertürbasyon uygulanmış ve buna karşılık gelen EM dalga yayılımı gösterilmiştir

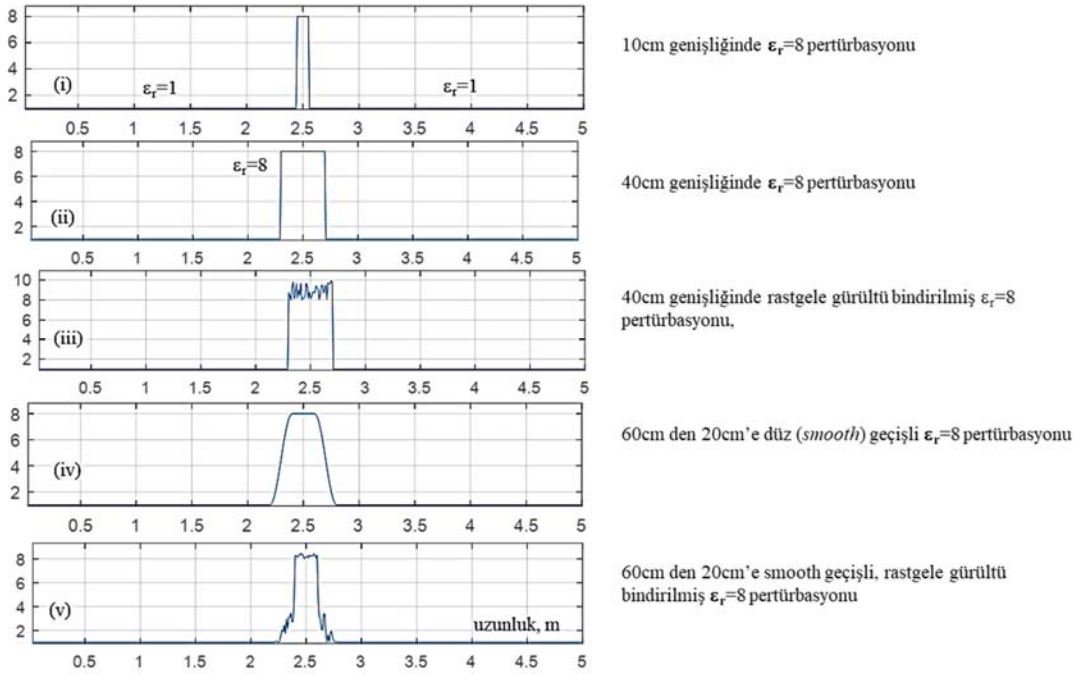


Şekil 10. Yeraltı su kirliliği modellemesi (underground water contamination modelling)

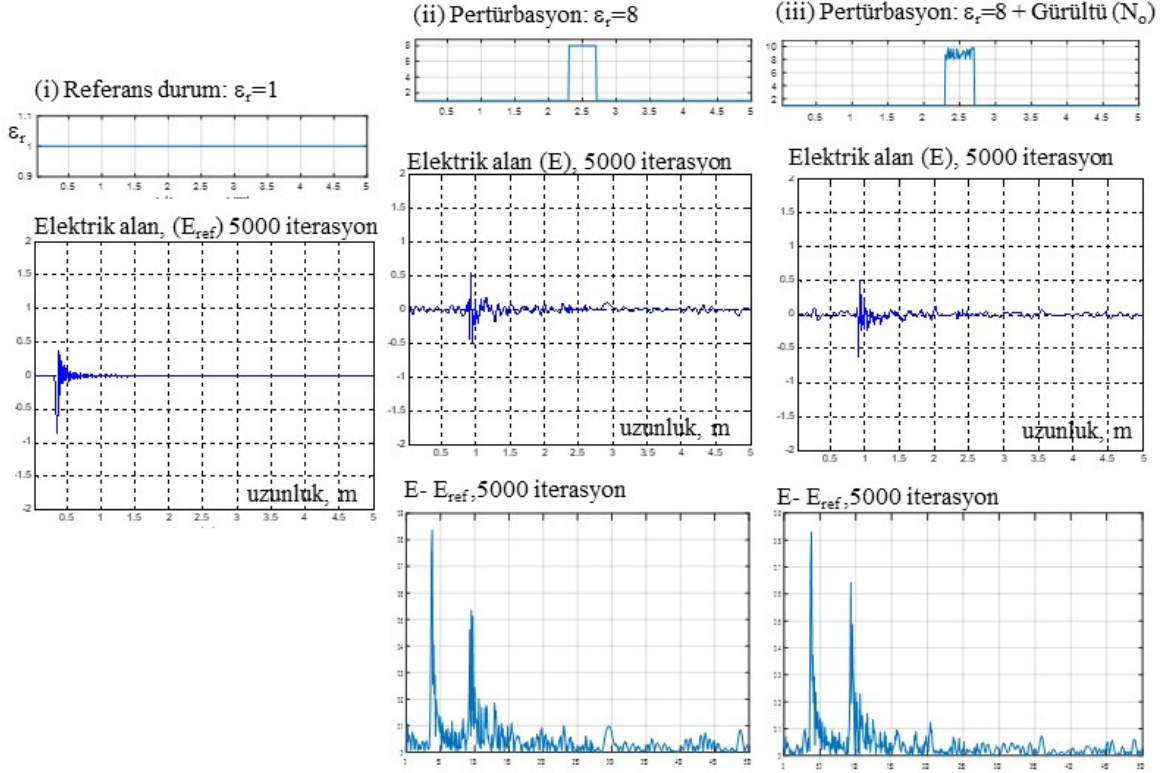




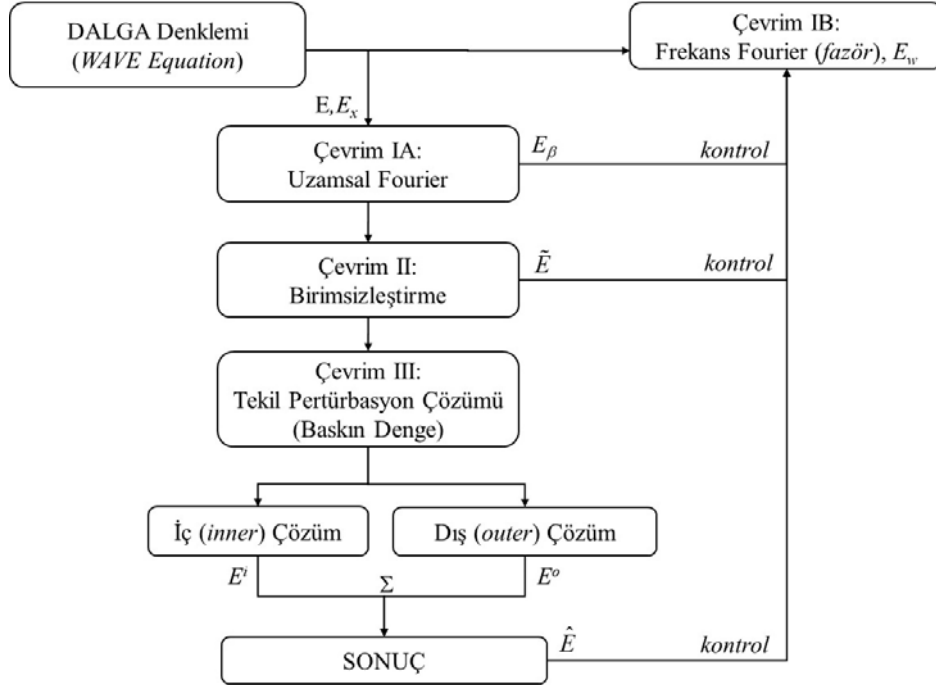
Şekil 11. (a) iletkenlik değişirken yansım katsayısı, (b) frekans değişirken yansım katsayısının değişimi
 ((a)reflection coefficient while conductivity changes, (b) reflection coefficient while fequency changes)



Şekil 12. FDTD ile pertürbasyon uygulaması (Perturbation application by FDTD method)



Şekil 13. FDTD ile pertürbasyon uygulaması analiz örnekleri (Perturbation application by FDTD method, analysis samples)



Şekil 14. Pertürbasyon Teorisi ile çözümlenme adımları (Solution steps using perturbation theory)

Şekil 13iii'de ise bu kez aynı pertürbasyona "Normal" (Gaussian) olasılık dağılımlı gürültü bindirilmiş hali modellenmiştir. Her iki durumda, oluşan farklılıkları daha iyi görebilmek için elde edilen değerler Şekil 13ii ve Şekil 13iii'de, Elektrik alan dağılımı 13i'de verilen referans durumdan çıkarılmış ve normalize edilmiş çıktılar

Elektrik alan grafiğinin altında sunulmuştur. Örnek olarak sunulan grafiklerin sayısı uygulama ile artırılabilen ve pertürbasyon sonucunda ortaya çıkan farklı durumların tespiti için grafikler arasında aritmetik işlemler yapılabilmektedir. Yapılan farklı benzetimlerde elde edilen sonuçlarda, kapalı ve kayıpsız bir yapıda,

elektromanyetik dalganın iki uçtaki tam yansıtıcıdan (PEC) geri dönerek oluşturduğu örüntülerde kararsız bir duruma geçip, çok yüksek ve kararsız elektrik alan büyüklüğü değerlerine ulaşmadığı gözlenmiştir. Bu sonucun elde edilmesinde, yansıma denkleminin doğasında yer alan sıradan (*regular*) karakteristiğinin etkin olduğu değerlendirilmektedir.

5. Sonuçlar (Conclusions)

Bu makalede, elektromanyetik yayımlarda herhangi bir parametrede oluşan küçük değişimler “pertürbasyon” olarak tanımlanmış ve hesaplanmak istenen ana çıktıya etkisi analitik ve sayısal yöntemler ile çalışılmıştır. Sayısal yaklaşımlarda özellikle çok katmanlı yapılarda beklenen değerden sapma problemleri, ters saçılım problemi şeklinde çözümlenmiş ve örnek olarak yer altı su kirliliği tespitine yönelik bir öneri verilmiştir. Analitik örnek uygulama olarak, metamalzemeler ele alınmış ve bir Epsilon Near Zero (ENZ) materyalin içinde, Pertürbasyon Teorisi kullanılarak belli frekansta yayılan kayıplı elektromanyetik dalgaya zaman düzleminde çok kısa süre ve mesafe içinde verdiği tepki incelenmiştir. Şekil 14’te, analitik çözüm adımları özetlenmiştir.

Çalışmada, 4 farklı çevrim (uzamsal çevrim, frekans çevrimi, birimsizleştirme, baskın denge) aynı denkleme, farklı amaçlarla uygulanmıştır. Kayıplı Elektromanyetik yayılım denkleminin uzamsal (*spatial*) dönüşümüne uygulanan birimsizleştirme (*non-dimensionalization*) çevrimine, literatürde rastlanmamıştır. Elektromanyetik bir problemi modelleyen karmaşık bir denklemin birimsizleştirilerek, seri açılımları ile çözülebilecek bir çalışmaya örnek olması açısından bu çevrimin özgün olduğu değerlendirilmektedir.

Örnek çözümde iletkenlik katsayısının 0’a ne kadar yakın olduğuna bağlı olarak pertürbasyon çözümü de o kadar doğruluk gösterir. Buna karşılık incelenen çözümde pertürbasyon parametresi permittivite değerinin 0’a yaklaşması, dalganın salınımını ve propogasyon özelliklerini olumsuz etkilediği görülmüştür.

Zaman düzleminde (*time domain*), metamateryaller üzerinde Pertürbasyon Teorisi uygulamasının oldukça az olduğu gözlenmiştir. Nanosaniye (ns) düzeyinde bir zaman diliminde Epsilon Near Zero (ENZ) bölgesinde yer alan bir metamateryal içinde, elektromanyetik dalganın ilerleme karakteristiği, asimptotik analiz matematik altyapısını kullanan tekil Pertürbasyon Teorisi ile çözümlenmiştir. Metamateryal malzemede, ENZ çevresinde (dielektrik sabitinin 0’a yakınsadığı bölgede) tekil özellik göstermekte ve asimptotik analiz ile çözülen bu noktalarda EM dalganın yayılım özellikleri çok hızlı değişmektedir. Çok hassas ve ileri üretim teknolojileri gerektiren bu yapılarda EM dalga karakterinin çok kısa zaman aralığında, nasıl değiştiğinin anlaşılabilmesinin yapılacak çalışmalara katkıda bulunabileceği değerlendirilmektedir.

Birimsizleştirilen pertürbasyon parametresi, frekans ve iletkenliği içeren “süper pertürbasyon parametresine ($\tilde{\epsilon}_r = (\omega\epsilon / \sigma)^2$) dönüşmüştür. Bu şekilde problem çözümü sadece ENZ özellik gösteren dielektrik sabiti için değil, düşük frekans veya yüksek iletkenlik durumlarında ($\omega / \sigma \ll 0$ olması durumunda) da etkili olacaktır. Formülasyonda kullanılan uzamsal (*spatial*; x,y,z) çevrim, frekans çevrimi ile oluşturulan çözüme (*fazör*) oranla literatürde çok az rastlanmıştır. Bu çevrimin ana uygulanma nedeni, pertürbasyon parametresini en yüksek seviyeli terimin katsayısı haline dönüştürmektir. Uzamsal çevrim ve frekans çevrimi ile ayrı ayrı çözülen denklemlerin dispersiyon faktörünün az etkili olduğu, çözümlerin özellikle 1GHz ve üstü mikrodalga frekanslarında birbirine çok yakın olduğu çalışmalarda gösterilmiştir.

Çok katmanlı yapılarda yansıma karakteristikleri de frekansa bağlı olarak hesaplanan yansıma katsayısının elektriksel veya fiziksel parametrelerinin değişmesi (pertürbe olması) durumu sıradan (*regular*) pertürbasyon problemidir ve makale içinde örnekler verdiğimiz çalışmalarımızda, çıkış parametresinde çok büyük değişiklikler, beklendiği üzere, gözlenmemiştir. Bu durum, uygulanan sinyalin özelliklerine göre, detaylandırılmak istenen katmanın olasılık dağılım parametresinde, 1. moment (ortalama değer, *mean*) ve 2. moment (standart sapma, *variance*)’in yanında, 3. moment (*skewness*) ve 4. moment (*kurtosis*)’in de incelenmesiyle kısmen sağlanmıştır. Sonuçlarda, yansıma katsayısının bazı frekanslarda pertürbasyonlara karşı duyarlı olduğu (değişmediği) bazı frekanslarda ise duyarlı olmasından ötürü çok değiştiği gözlenmiştir. Bu durumun, yeraltındaki su kütlelerinin yerinin/kalitesinin değişiminin tespitinde [9], [10] veya tarafımızca yapılan, RAM (*Radar Absorbing Material*) parametrelerinin tasarımında [16] belli noktalarda kullanılabilmesi değerlendirilmiştir. Yüzeyle uygulanan sinyale tepki veren katmanlardan hangilerinin daha yüksek hassasiyette tasarlanıp üretilmesi gerektiği konusunda da fikir edinilebilmektedir. [14]

Çok katmanlı yapılarda olasılık dağılım fonksiyonunun çıkış parametresinin olasılık dağılım fonksiyonuna etkileri, Monte Carlo yöntemi ile gerçekleştirilmiştir. Bu yöntemde iterasyon sayısı 1000 ve üzeri olduğunda çıkış dağılımı belli bir doğruluğa ulaşmaktadır ve iterasyonun daha fazla artırılması, önemli bir farklılık yaratmamaktadır.

İleride yapılacak çalışmalarda Pertürbasyon Teorisinin farklı matematiksel kabiliyetlerinin analitik temelli yöntemleri de kullanılarak farklı EM problemlerin alternatif çözümleri ve doğrulanması hedeflenmektedir.

Kaynaklar (References)

1. Bender C. M., Steven A.O., Advanced mathematical methods for scientists and engineers I: Asymptotic methods and perturbation theory, Springer Science & Business Media, 1, 1999.
2. Holmes M.H., Introduction to perturbation methods. Springer Science & Business Media, 49-101, 2019.
3. Sadiku M. N., Monte Carlo methods for electromagnetics. CRC press, vol. Boca Raton, 1–224, 2018.
4. Lange G.C., Miura, R. M., Singular perturbation analysis of boundary value problems for differential-difference equations. V. Small shifts with layer behavior., SIAM Journal on Applied Mathematics, 54 (1) 249-272, 1994
5. Akkoca Ş., Bağdatlı S. M., Togun, N., Linear vibration movements of the mid-supported micro beam. J Fac Eng Arch Gazi Univ, 36 (2), 1089-1103, 2021
6. Paulsen W., Asymptotic analysis and perturbation theory. CRC Press, 1-521, 2013.
7. Akkaya M. K., Yılmaz A. E., Çok Katmanlı Soğurucularda Pertürbasyon Yaklaşımı ile Duyarlılık Analizi, URSI-Türkiye 2018 Bilimsel Kongresi, Konya-Türkiye, 6-8 Eylül, 2018.
8. Akkaya M. K., Yılmaz A. E., Monte Carlo-Based Random Modeling Approach for the Description and Electromagnetic Analysis of Multilayer Structures, Electrica, 21 (3) 388–407, 2021.
9. Akkaya M. K., Yılmaz A. E., Yeraltı Su Kirliliğinin Tahribatsız Yöntemlerle Tespitine Yönelik Bir Öneri, URSI-Türkiye 2018 Bilimsel Kongresi, Konya-Türkiye, 6-8 Eylül, 2018.
10. Akkaya M. K., Yılmaz A. E., A Proposal for Detection of Underground Water Contamination via Multilayer Reflection Approach, Int. J. Wirel. Microw. Technol., 11 (2), 39–45, 2021.
11. Veerlavenkaiah D., Raghavan S., Determination of propagation constant using 1D-FDTD with MATLAB., IEEE 2016 Int. Conference on Communication Systems and Networks (ComNet), 61–64, July 2017.
12. Alıcı K. B., The left hand of electromagnetism: Metamaterials, Doctoral dissertation, Bilkent University, Ankara, 2010.

13. JO'Malley R. E., O'Malley R. E., Asymptotic Approximations, Historical Developments in Singular Perturbations, Iowa State University, 358–360, 1999.
14. Chew W. C., Waves and fields in inhomogenous media, John Wiley & Sons. IEEE Press Ser. Electromagn. Wave Theory, 16, 1990.
15. Gilat A., Subramaniam V., Numerical methods for engineers and scientists: an introduction with applications using MATLAB. Wiley Publishing, 69–71, 1997.
16. Akkaya M. K., Yılmaz A. E., Radom Yapılarında Dış Etkilerin Sebep Olduğu Yapısal Bozulmaların Performans Üzerine Etkilerinin İncelenmesi, URSI-Türkiye Bilimsel Kongresi, Konya-Türkiye, 6-8 Eylül 2018.