BAÜ Fen Bil. Ens. Derg. (1999).1 (1)

FİBERLERLE TAKVİYELİ VİSKOELASTİK BİR MALZEMEYE HOMOJEN DEFORMASYONUN UYGULANMASI

Nurşen ÖNTÜRK
Trakya Üniversitesi, Çorlu Mühendislik Fakültesi, Makina Müh. Böl.
Çorlu - Tekirdağ

ÖZET

Bu çalışmada, fiberlerle takviye edilmiş viskoelastik bir kompozit ortama ait gerilme bünye denklemine homojen deformasyon uygulanmıştır. Bunun için önce deformasyon geometrisi incelenmiş ve gerekli kinematik bağıntılar elde edilmiştir. Kompozit ortamda A ve B vektörleriyle gösterilen doğrusal fiberler kullanılmıştır.

Daha sonra homojen deformasyonda kullanılacak olan büyüklükler ve kompozit ortamdaki kısıtlamaları veren ifadeler elde edilmiştir.

Bundan sonra ortaya çıkan kinematik kısıtlamalar altında homojen deformasyona maruz kalan bir kompozit ortamın gerilme analizi yapılmıştır. Elde edilen gerilme bileşenleri daha sonra sıkışmazlık ve uzamazlık kısıtlamalarından dolayı ortamda oluşan p, T_a, T_b reaksiyon gerilmelerinin bulunmasında kullanılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Fiber vektörü, kompozit ortam, viskoelastik, gerilme, homojen deformasyon.

A HOMOGENEOUS DEFORMATION IMPOSED ON A VISCOELASTIC CONTINUUM REINFORCED BY FIBRES

ABSTRACT

In this study; the homogeneous deformations were applied to the stress constitutive equations for the viskoelastic composite medium. First, the deformation geometry was studied and the relevant kinematic relations were obtained. In the composite medium, straight fibres denoted by A and B were used.

Under the defined restrictions the stress analysis was made for the composite medium subjected to the homogeneous deformations. For the stress analysis purposes the medium was assumed to be homogeneous.

The stress components of this composite medium were used for obtaining the arbitrary values p, T_a, T_b, the reaction stresses, representing incompressibility and inextensibilities, respectively.

Key words: Fibre vector, compozite continuum, viscoelastic, stress, homogeneous deformation.

1. GİRİŞ

Kompozit malzeme denildiği zaman üstün özelliklere sahip bir malzeme oluşturmak üzere mikroskobik düzeyde iki veya daha fazla malzemenin birleştirilmiş hali anlaşılır. Genel olarak kompozit malzemeler:

- Fiber takviyeli kompozitler,
- Tabakalı kompozitler,
- Parçacıklı kompozitler

olmak üzere üç türlü oluşturulurlar. Burada fiber takviyeli viskoelastik bir kompozit ortam ele alınmıştır. Böyle bir ortama ait gerilme bünye denklemi, daha önceki bir çalışmada araştırmacı tarafından elde edilmiştir [1]. Bu çalışmada; Spencer'in elastik bir kompozit ortamın homojen deformasyonları için incelediği örnek problem [2], araştırmacı tarafından viskoelastik bir kompozit ortama uyarlanmıştır.

2. DEFORMASYON GEOMETRİSİ VE KİNEMATİK BAĞLAR

Kelvin-Voigt türünde viskoelastik, fiberli bir malzeme için gerilme bünye denklemi:

$$\begin{aligned} t_{kl} &= -p\delta_{kl} + T_a a_k a_l + T_b b_k b_l + \tau_{kl} \\ &= \sigma_{kl} + \tau_{kl} = \sigma_{kl} + {}_E\tau_{kl} + {}_D\tau_{kl} \end{aligned} \tag{2.1}$$

şeklinde elde edilmiştir[1]. Burada A ve B fiber ailelerinin uzamadığı ve ortamın sıkıştıramadığı kabul edilmiştir. (2.1) denkleminde, ${}_E\tau_{kl}$ ile gösterilen elastik gerilme aşağıda görüldüğü gibi nonlineer bir şekilde elde edilmiştir [1].

$$
{}_E\tau_{kl} = 2\left(\frac{\partial\Sigma}{\partial I_1} + I_1\frac{\partial\Sigma}{\partial I_2}\right)c_{kl}^{-1} - 2\frac{\partial\Sigma}{\partial I_2}c_{kr}^{-1}c_{rl}^{-1} + 2\frac{\partial\Sigma}{\partial I_7}\left(a_k c_{lr}^{-1}a_r + a_l c_{kr}^{-1}a_r\right)
$$

$$
+2\lambda_b^2\frac{\partial\Sigma}{\partial I_8}\left(b_k c_{lr}^{-1}b_r + b_l c_{kr}^{-1}b_r\right) + \lambda_b\frac{\partial\Sigma}{\partial I_9}\cos 2\Phi\left(a_k b_l + a_l b_k\right)
$$

$$
+\lambda_b\frac{\partial\Sigma}{\partial I_{10}}\cos 2\Phi\left(a_k c_{lr}^{-1}b_r + a_l c_{kr}^{-1}b_r + b_l c_{lr}^{-1}a_r + b_l c_{kr}^{-1}a_r\right) + 2\lambda_b^2\frac{\partial\Sigma}{\partial I_6}b_k b_l \quad (2.2)
$$

${}_D\tau_{kl}$ ile verilen disipatif gerilme ise, d deformasyon hızları tansörüne göre lineer olarak aşağıdaki gibi elde edilmiştir [1].

$$
{}_D\tau_{kl} = \left[\lambda_v\delta_{kl} + c_1 a_k a_l + d_1 b_k b_l + d_{21}\lambda_b\cos 2\Phi\left(a_k b_l + b_k a_l\right)\right] d_{mm}
$$

$$
+2\mu_v d_{kl} + \left[c_1\delta_{kl} + c_{11}a_k a_l + c_{12}\lambda_b^2 b_k b_l + f_{12}\lambda_b\cos 2\Phi\left(a_k b_l + b_k a_l\right)\right] a_i d_{ij} a_j
$$

$$
+\left[d_1\lambda_b^2\delta_{kl} + c_{12}\lambda_b^2 a_k a_l + d_{22}\lambda_b^2 b_k b_l + f_{21}\lambda_b^3\cos 2\Phi\left(a_k b_l + b_k a_l\right)\right] b_i d_{ij} b_j
$$

$$
+\left[2d_{12}\lambda_b\cos 2\Phi\,\delta_{kl} + 2f_{12}\lambda_b\cos 2\Phi\, a_k a_l + 2f_{21}\lambda_b^3\cos 2\Phi\, b_k b_l\right.
$$

$$
\left. +2\lambda_b^2\left(\beta_{12} + \gamma_{22}\cos^2 2\Phi\right)\left(a_k b_l + b_k a_l\right)\right] a_i d_{ij} b_j \qquad (2.3)
$$

Bu çalışmadaki kompozit ortamda A ve B vektör alanlarıyla gösterilen doğrusal fiberler Şekil 1 ‘de görüldüğü gibi dağılmıştır. Fiberlerin her biri deformasyondan önce X_1 ekseni ile Φ açısı yapmaktadır. X_3 ekseni X_1X_2 düzlemine dik seçilmiştir. Ayrıca X_1 ve X_2 eksenleri de X_3'e dik olup farklı ailelere ait doğrusal fiberlerin açıortaylarını teşkil etmektedir. Buna göre deformasyondan önceki ve sonraki fiber dağılımı aşağıdaki denklemlerde gösterilmiştir [2].

$$
A^T = \left[\cos\Phi, \sin\Phi, 0\right], \quad B^T = \left[\cos\Phi, -\sin\Phi, 0\right],
$$

$$
a^T = \left[\cos\phi, \sin\phi, 0\right], b^T = \left[\cos\phi, -\sin\phi, 0\right] \qquad (2.4)
$$

Öte yandan homojen deformasyon, t zamanı göstermek üzere,

$$
x_1 = \lambda_1(t)X_1, \quad x_2 = \lambda_2(t)X_2, \quad x_3 = \lambda_3(t)X_3 \qquad (2.5)
$$

şeklindedir[2]. Görülüyor ki $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ belli ise deformasyon bellidir. Burada kullanılacak olan F, C, c^{-1} ve j gibi bazı büyüklükler:

Deformasyon gradyanı : $F = \left[x_{k,K}\right] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$

(2.6)

Green deformasyon tansörü : $C = F^T F = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{bmatrix}$ (2.7)

Cauchy deformasyon tansörü : $c^{-1} = C$ (2.8)

Sıkışmazlık şartı : $j = \det F = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$ (2.9)

şeklinde, uzamazlık şartları da ;

A fiber ailesi için: $C_{KL} A_K A_L = A^T C A = \lambda_1^2 \cos^2 \Phi + \lambda_2^2 \sin^2 \Phi = 1$ (2.10)

B fiber ailesi için: $C_{KL} B_K B_L = B^T C B = \lambda_1^2 \cos^2 \Phi + \lambda_2^2 \sin^2 \Phi = 1$ (2.11)

şeklinde hesaplanır. Kompozit ortamdaki bu kısıtlamalardan dolayı λ_i 'lerden sadece bir tanesi keyfi olarak verilebilir. Ortam, kinematik olarak buna müsaittir. Homojen deformasyondan dolayı Φ açısı , ortamın tüm noktalarında sabit olup Şekil 1'de görüldüğü gibi noktadan noktaya değişmemektedir.

$\Phi = sabit$ (2.12)

Şekil 1. Ortamdaki fiber dağılımı.

Deformasyon homojen olduğu için deformasyondan önce doğrusal olan fiberler , deformasyondan sonra doğrusal kalırlar[3].

$$a = FA \quad , \quad \begin{bmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\Phi \\ \sin\Phi \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (2.13)$$

$$b = FB \quad , \quad \begin{bmatrix} \cos\phi \\ -\sin\phi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\Phi \\ -\sin\Phi \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (2.14)$$

(2.13) ve (2.14) denklemlerinden deformasyondan sonraki fiber açıları için

$$a_1 = \cos\phi = \lambda_1 \cos\Phi \quad , \quad b_1 = \cos\phi = \lambda_1 \cos\Phi$$

$$a_2 = \sin\phi = \lambda_2 \sin\Phi \quad , \quad b_2 = -\sin\phi = -\lambda_2 \sin\Phi$$

$$a_3 = 0 \quad , \quad b_3 = 0 \qquad (2.15)$$

değerleri elde edilir. Deformasyondan sonraki fiberlerin açısını gösteren ϕ değerleri de, homojen deformasyondan dolayı noktadan noktaya değişmemektedir [3].

$$\phi = sabit \quad , \quad (\phi \neq \Phi) \qquad (2.16)$$

(2.9),(2.10),(2.11) ve (2.15) ifadelerinden deformasyon geometrisi ve deformasyon kinematiğine ait şu önemli noktalar tespit edilir [2].

i) Eğer $\lambda_1 \geq 0$ ve $\lambda_2 \geq 0$ ise; $\lambda_3 \geq \sin 2\Phi$ 'dir. Bu da X_3 doğrultusundaki uzamanın sınırsız olduğunu, $(\lambda_3)_{\min i} = \sin 2\Phi$ olması nedeniyle X_3 doğrultusundaki kısalmanın da sonlu ve sınırlı olduğunu gösterir.

Şekil 2. Fiberlerin birbirine dik olma durumu.

ii) $\lambda_3 = \left(\lambda_3\right)_{\min i} = \sin 2\Phi$ değerini aldığı zaman fiberler birbirine dik olurlar (Şekil 2).

iii) Fiberler deformasyondan önce birbirine dikse $2\Phi = 90^{\circ}$, $\lambda_3 \geq 1$ ve $\left(\lambda_3\right)_{\min i} = 1$ elde edilir. Bu da malzemenin X_3 doğrultusunda uzayabileceğini ancak kısalamayacağını gösterir. Burada elde edilen (2.15) eşitliklerinden görüldüğü gibi $|a| = |b| = |A| = |B| = 1$ olduğundan açıların değişmesi ancak birim fiber vektörlerinin dönmesi ile mümkün olur. Diğer taraftan verilen deformasyonda hız alanları da aşağıda görüldüğü gibi elde edilmiştir.

$$v_1 = \left.\frac{\partial x_1}{\partial t}\right|_X = \dot{\lambda}_1 X_1 = \frac{\dot{\lambda}_1}{\lambda_1} x_1 = v_1\left(x_1\right) \qquad (2.17)$$

$$v_2 = \left.\frac{\partial x_2}{\partial t}\right|_X = \lambda_2 X_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_2} x_2 = v_2\left(x_2\right) \qquad (2.18)$$

$$v_3 = \left.\frac{\partial x_3}{\partial t}\right|_X = \lambda_3 X_3 = \frac{\lambda_3}{\lambda_3} x_3 = v_3\left(x_3\right) \qquad (2.19)$$

Elde edilen hız alanlarına bağlı olarak hız gradyanı ve deformasyon hızları tansörünün matrisi de:

$$L = \left[v_{k,l}\right] = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_1}{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_2}{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda_3}{\lambda_3} \end{bmatrix} = \left[v_{(k,l)}\right] \qquad (2.20)$$

şeklinde elde edilmiştir. L matrisi simetrik olduğundan, d deformasyon hızları matrisine eşittir. Bu matris hesaplandıktan sonra sıkışmazlık ve uzamazlık şartlarının L matrisine getirdiği kısıtlamalar :

$$\nabla . v = trd = \frac{\dot{\lambda}_1}{\lambda_1} + \frac{\dot{\lambda}_2}{\lambda_2} + \frac{\dot{\lambda}_3}{\lambda_3} = 0 \tag{2.21}$$

$$a^T L a = a^T d a = 0$$
(2.22)

$$b^T L b = b^T d b = 0 \tag{2.23}$$

şeklinde elde edilmiştir. Dikkat edilecek olursa (2.22) ve (2.23) denklemleri aynı sonucu vermektedir.

$$\frac{\dot{\lambda}_1}{\lambda_1} \cos^2 \phi + \frac{\dot{\lambda}_2}{\lambda_2} \sin^2 \phi = 0 \tag{2.24}$$

(2.24) denkleminden görüldüğü gibi $v_{1,1} = \frac{\dot{\lambda}_1}{\lambda_1} > 0$ ise, $v_{2,2} = \frac{\dot{\lambda}_2}{\lambda_2} < 0$ ‘dır. Bu da x_1 doğrultusundaki bir uzamaya daima x_2 doğrultusundaki bir kısalmanın eşlik ettiğini gösterir. Yukarıdaki (2.24) denkleminden

$$\frac{\dot{\lambda}_1}{\lambda_1} = -\frac{\dot{\lambda}_2}{\lambda_2} tg^2 \phi \tag{2.25}$$

ve (2.21) denkleminden de

$$\frac{\dot{\lambda}_3}{\lambda_3} = -\frac{\dot{\lambda}_1}{\lambda_1} - \frac{\dot{\lambda}_2}{\lambda_2} \tag{2.26}$$

eşitlikleri elde edilir. (2.25) , (2.26) ‘da yerine konursa

$$v_{3,3} = \frac{\dot{\lambda}_3}{\lambda_3} = \frac{\dot{\lambda}_2}{\lambda_2} tg^2 \phi - \frac{\dot{\lambda}_2}{\lambda_2} = \left(tg^2 \phi - 1\right) \frac{\dot{\lambda}_2}{\lambda_2} \tag{2.27}$$

bulunur. (2.25) ve (2.27) denklemleri deformasyonun herhangi bir hali için yorumlanırsa şu kinematik bağıntılar geçerli olur:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_1}>0,\frac{\lambda_2}{\lambda_2}<0 \quad \text{ise :} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\lambda_3}{\lambda_3}>0, tg^2\phi<1, \phi<45^o \\ \frac{\lambda_3}{\lambda_3}<0, tg^2\phi>1, \phi>45^o \end{array} \right\} \tag{2.28}$$

Bu da deformasyondan sonraki fiber açısına bağlı olarak x_3 doğrultusunda genleşme veya daralmanın meydana gelebileceğini göstermektedir.

3. GERİLME DAĞILIMI

Ortaya çıkan belli kinematik kısıtlamalar altında homojen deformasyona maruz kalan Şekil 1 'deki gibi bir kompozit ortamın gerilme analizi için bir basitleştirici/öğretici durum göz önüne alınmıştır. Cismin homojen olduğu ve aynı zamanda $X_3 = sabit$ düzlemine göre mekanik özellikler bakımından da ayna simetrisine (reflection) sahip olduğu varsayılmıştır. Gerilme dağılımı, bu düzlemlere göre ayna simetrisi altında invaryant kalacağından, Q koordinat transformasyon matrisi olmak üzere,

$$x_1' = x_1 \quad , \quad x_2' = x_2 \quad , \quad x_3' = -x_3 \tag{3.1}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad Q = Q^T = Q^{-1} \tag{3.2}$$

$$\tau' = Q\tau Q^T = \tau \tag{3.3}$$

ifadeleri elde edilir. (3.3) ifadesinin açık şekli yazıldığında

$$\tau_{31} = \tau_{32} = 0 \tag{3.4}$$

olduğu görülür. Bu da bağımsız gerilme sayısını altıdan dörde indirir.

Homojen deformasyonlar doğru çizgileri doğru çizgilere , elipsleri elipslere, elipsoidleri elipsoidlere, vs taşır [3]. Dolayısıyla τ_{kl}, λ, Φ, ϕ ve A, B, a, b vektörleri konuma bağlı olmazlar. (2.1) denklemi ile verilen toplam gerilme ifadesi matris notasyonu ile

$$t = -pI + T_a a a^T + T_b b b^T + \tau \quad (3.5)$$

şeklinde yazılır. Burada τ ‘nun $\tau = {}_E\tau + {}_D\tau$ olduğu hatırlanır ve de $a a^T$,$b b^T$ değerleri yerine konursa gerilme bileşenleri verilen koordinat sisteminde aşağıdaki gibi elde edilir.

$$t_{11} = -p + \left(T_a + T_b\right)\cos^2\phi + \tau_{11} \quad (3.6)$$

$$t_{22} = -p + \left(T_a + T_b\right)\sin^2\phi + \tau_{22} \quad (3.7)$$

$$t_{33} = -p + \tau_{33}$$

(3.8)

$$t_{12} = \left(T_a - T_b\right)\sin\phi\cos\phi + \tau_{12} \quad (3.9)$$

$$t_{23} = \tau_{23} = 0 \quad (3.10)$$

$$t_{31} = \tau_{31} = 0 \quad (3.11)$$

Diğer taraftan (2.1) denklemiyle verilen toplam gerilme ifadesi denge denklemini $\left(t_{kl,k} = 0\right)$ sağlamak zorundadır.

$$t_{kl,k} = -p_{,l} + T_{a,l}a_k a_l + T_{b,l}b_k b_l = 0 \quad (3.12)$$

Burada , cisimsel ve atalet kuvvetleri ihmal edilmektedir. (3.12) ‘den görüldüğü gibi p, T_a, T_b için seçilen keyfi sabit değerler için denge denklemi sağlanır.

$$p = k_1 \quad , \quad T_a = k_2 \quad , T_b = k_3 \quad (3.13)$$

Öte yandan,

$$tr\,\tau = \tau_{kk} = 0 \qquad \textit{(sıkışmazlık şartı)} \quad (3.14)$$

$$a^T \tau a = \tau_{kl} a_k a_l = 0 \quad \textit{(A fiber ailesi için uzamazlık şartı)} \quad (3.15)$$

$$b^T \tau b = \tau_{kl} b_k b_l = 0 \quad \textit{(B fiber ailesi için uzamazlık şartı)} \quad (3.16)$$

kısıtlamalarına, $(2.4)_3$ ve $(2.4)_4$ eşitlikleri yerleştirilirse

$$\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33} = 0 \quad (3.17)$$

$$\tau_{12} = 0 \tag{3.18}$$

$$\tau_{12}\cos^2\phi + \tau_{22}\sin^2\phi = 0 \tag{3.19}$$

denklemleri bulunur. Bu denklemlerden de;

$$\tau_{11} = -\tau_{22} tg^2\phi$$

(3.20)

$$\tau_{33} = \tau_{22}\left(tg^2\phi - 1\right) \tag{3.21}$$

eşitlikleri bulunur. (3.18), (3.20) ve (3.21) eşitlikleri (3.6) , (3.8) ve (3.9) 'da yerine yazılırsa gerilme bileşenleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$t_{11} = -p + \left(T_a + T_b\right)\cos^2\phi - \tau_{22} tg^2\phi \tag{3.22}$$

$$t_{22} = -p + \left(T_a + T_b\right)\sin^2\phi + \tau_{22} \tag{3.23}$$

$$t_{33} = -p + \tau_{22}\left(tg^2\phi - 1\right) \tag{3.24}$$

$$t_{12} = \left(T_a - T_b\right)\sin\phi\cos\phi \tag{3.25}$$

Burada elde edilen gerilme bileşenlerinden sadece bir tanesi bağımsız olup diğer üç gerilme keyfidir. Bu keyfilik p , T_a , T_b keyfi reaksiyon gerilmelerinin bulunması için kullanılabilir. Bu amaçla keyfi olan üç gerilme $t_{22} = t_{33} = t_{12} = 0$ şeklinde seçilip (Bu, X_1 doğrultusunda tek eksenli gerilme hali demektir.) , (3.22), (3.23), (3.24), (3.25) gerilme bileşenlerinde yerine konursa

$$p = \tau_{33} = \tau_{22}\left(tg^2\phi - 1\right) \tag{3.26}$$

$$T_a = T_b = \left[\frac{tg^2\phi - 2}{\cos^2\phi - \sin^2\phi}\right]\tau_{22} \quad , \left(2\phi \neq 0^o, 90^o\right) \tag{3.27}$$

reaksiyon gerilmeleri bulunur. Bulunan p , T_a , T_b değerleri (3.6) 'da yerine konursa

$$t_{11} = 2\tau_{22}\left(1 - tg^2\phi - \cot g^2\phi\right) \tag{3.28}$$

gerilmesi elde edilir. O halde verilen şekilde fiberlerle takviye edilmiş olan ve X_1 doğrultusunda tek eksenli bir gerilmeye maruz kompozit ortamdaki gerilme dağılımı

$$t_{11} = 2\tau_{22}\left(1 - tg^2\phi - \cot g^2\phi\right) \tag{3.29}$$

$$t_{22} = t_{33} = t_{12} = t_{23} = t_{31} = 0 \qquad , \left(\phi \neq 0^0 \ , 90^0\right) \tag{3.30}$$

şeklinde elde edilir. Bu denklemlerde gözüken τ_{22} değeri de

$$\tau_{22} = {}_E\tau_{22} + {}_D\tau_{22} \tag{3.31}$$

formunda olduğundan, (1.2) ve (1.3) ile verilen bünye denklemlerinden bulunur.

Burada ele alınan problem Spencer'in Şekil 1'de gösterilen problemiyle aynıdır. Bu problemde Spencer, elastik bir kompozit malzemeyi düşünmüş ve toplam gerilmenin bünye denklemiyle elde edilecek terimleri üzerinde herhangi bir işlem yapmamıştır. Gerilmenin bu kısmını reaksiyon gerilmeleriyle birlikte toplam gerilme ifadesinin sağ tarafında bünye denklemleriyle bulunmak üzere muhafaza etmiştir.

Dolayısıyla bu safhaya kadar Spencer ve araştırmacı tarafından yapılan işlemler, malzemenin bünyesine bağlı olmayan işlemlerdir.

Araştırmacı tarafından Spencer'in problemi fiber kinematiği de işlenerek viskoelastik bir kompozit malzeme için çözülmüş ve gerilme dağılımı bulunmuştur. Bundan sonra (1.3) denkleminde sıkışmazlık ve uzamazlık şartları

$$\lambda_b = 1 \quad , \; d_{mm} = 0 \quad , \; a^T da = 0 \quad , \; b^T db = 0 \tag{3.32}$$

denklemlerinde yerine konup, (1.2) ile toplandığında bu problem için kullanılacak toplam gerilme ifadesi bulunur[4-6].

$$\tau = 2\frac{\partial\Sigma}{\partial I_1}c^{-1} + 2\frac{\partial\Sigma}{\partial I_2}\left(I_1c^{-1} - c^{-2}\right) + 2\frac{\partial\Sigma}{\partial I_7}\left(aa^Tc^{-1} + c^{-1}aa^T\right)$$

$$+ 2\frac{\partial\Sigma}{\partial I_8}\left(bb^Tc^{-1} + c^{-1}bb^T\right) + \frac{\partial\Sigma}{\partial I_9}\cos 2\Phi\left(ab^T + ba^T\right)$$

$$+\frac{\partial\Sigma}{\partial I_{10}}\cos 2\Phi\left(ab^Tc^{-1}+c^{-1}ba^T+ba^Tc^{-1}+c^{-1}ab^T\right)+2\mu_v d$$

$$+2\Big[d_{12}\cos 2\Phi\, I+f_{12}\cos 2\Phi\, aa^T+f_{21}\cos 2\Phi\, bb^T$$

$$+\left(\beta_{12}+\gamma_{22}\cos^2 2\Phi\right)\left(ab^T+ba^T\right)\Big]a^T db \qquad (3.33)$$

(3.33) denklemindeki $\mu_v, d_{12}, f_{12}, f_{21}, \beta_{12}$ ve γ_{22} katsayıları yalnız $\cos 2\Phi$, θ ve X 'e bağlıdır. Gene bu ifade , $(2.4)_3$, $(2.4)_4$,(2.8) ve (2.18) eşitliklerinin kullanılmasıyla λ_1 , λ_2 , λ_3 cinsinden bulunur ve buradan da τ_{22} gerilme bileşeni aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\tau_{22}=2\frac{\partial\Sigma}{\partial I_1}\lambda_2^2+2\frac{\partial\Sigma}{\partial I_2}\left[\left(\lambda_3^2+\lambda_1^2\right)\lambda_2^2\right]+4\frac{\partial\Sigma}{\partial I_7}\lambda_2^2\sin^2\phi+4\frac{\partial\Sigma}{\partial I_8}\lambda_2^2\sin^2\phi$$

$$-2\frac{\partial\Sigma}{\partial I_9}\cos 2\Phi\sin^2\phi-4\frac{\partial\Sigma}{\partial I_{10}}\lambda_2^2\cos 2\Phi\sin^2\phi+2\mu_v\frac{\lambda_2}{\lambda_2}$$

$$+2\left[d_{12}\cos 2\Phi+\left(f_{12}+f_{21}\right)\cos 2\Phi\sin^2\phi\right.$$

$$\left.-2\left(\beta_{12}+\gamma_{22}\cos^2 2\Phi\right)\sin^2\phi\;\right]2\frac{\lambda_1}{\lambda_1}\cos^2\phi \qquad (3.34)$$

Böylece X_1 doğrultusunda tek eksenli gerilmeye maruz fiberli viskoelastik kompozit ortama ait gerilme dağılımı (3.29) ile (3.34) denklemlerinin birleştirilmesiyle aşağıdaki gibi elde edilir.

$$t_{11}=\left(1-tg^2\phi-\cot g^2\phi\right)\left\{4\frac{\partial\Sigma}{\partial I_1}\lambda_2^2+4\frac{\partial\Sigma}{\partial I_2}\left[\left(\lambda_3^2+\lambda_1^2\right)\lambda_2^2\right]+8\frac{\partial\Sigma}{\partial I_7}\lambda_2^2\sin^2\phi\right.$$

$$+8\frac{\partial\Sigma}{\partial I_8}\lambda_2^2\sin^2\phi-4\frac{\partial\Sigma}{\partial I_9}\cos 2\phi\sin^2\phi-8\frac{\partial\Sigma}{\partial I_{10}}\lambda_2^2\cos 2\Phi\sin^2\phi+4\mu_v\frac{\lambda_2}{\lambda_2}$$

$$8\frac{\lambda_1}{\lambda_1}\cos^2\phi\left[d_{12}\cos 2\Phi+\left(f_{12}+f_{21}\right)\cos 2\Phi\sin^2\phi\right.$$

$$\left.-2\left(\beta_{12}+\gamma_{22}\cos^2 2\Phi\right)\sin^2\phi\right] \qquad (3.35)$$

SEMBOLLER:

A ,a	:A- fiber ailesinin deformasyondan önceki ve sonraki fiber dağılımı
B ,b	:B- fiber ailesinin deformasyondan önceki ve sonraki fiber dağılımı
C , c ; C , c	:Green ve Cauchy deformasyon tansörleri ve matrisleri
$C^{-1}, c^{-1}; C^{-1}, c^{-1}$	:Piola ve Finger deformasyon tansörleri ve matrisleri
d	:Deformasyon hızları tansörü
E , E	:Lagrange (maddesel) strain tansörü ve matrisi
e , e	:Euler (uzaysal) strain tansörü ve matrisi
F	:Deformasyon gradyanı matrisi
I , i	:Maddesel (Lagrange) ve uzaysal (Euler) koordinatlarda birim vektörler
$j = \det F$	:Deformasyon jokobiyeni
L	:Hız gradyanı matrisi
P	:A- fiber dağılımı tansörü
p	:Hidrostatik basınç
S	:B- fiber dağılımı tansörü
T_a, T_b	:Fiberlerin uzamazlığından kaynaklanan reaksiyon gerilmeleri
T , t ; T , t	:Maddesel ve uzaysal koordinatlarda gerilme tansörleri ve matrisleri
${}_E T$, ${}_E t$	:Maddesel ve uzaysal koordinatlarda elastik gerilme tansörleri
${}_D T$, ${}_D t$	:Maddesel ve uzaysal koordinatlarda disipatif gerilme tansörleri
Q	:Transformasyon matrisi
δ_{KL} , δ_{kl}	:Maddesel ve uzaysal koordinatlarda kronecker deltası

λ_a, λ_b	: a ve b fiber ailelerinin uzama oranları
$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$	:Asal doğrultudaki asal germeler
ρ_0, ρ	:Deformasyondan önceki ve sonraki kütle yoğunluğu
Σ	:Gerilme potansiyeli
σ_{kl}	:Toplam reaksiyon gerilmesi
τ	:Gerilme-bünye dağılımı matrisi
Φ	:Deformasyondan önce fiberlerin X_1 ekseni ile yaptığı açı
ϕ	:Deformasyondan sonra fiberlerin x_1 ekseni ile yaptığı açı
X_K, x_k $(K, k: 1,2,3)$	:Maddesel ve uzaysal koordinatlar

KAYNAKLAR

[1] Öntürk,N.; "İki Fiber Ailesi İle Takviyeli Viskoelastik Kompozit Ortamlarda Bünye Denklemlerinin Modellenmesi", Doktora Tezi, Gazi Üniversitesi, Mühendislik Mimarlık Fakültesi, Makina Mühendisliği Bölümü,

[2] Spencer, A.J.M.,"Deformation Of Fibre-Reinforced Materials", Clarendon Press, Oxford,(1972).

[3] Spencer,A.J.M.,"Continuum Mechanics, London, (1980).

[4] Erıngen,A.C.,"Nonlinear Theory Of Continuous Media ", Mcgraw-Hill Book Co.,(1962).

[5] Şuhubı,E.S.,"Sürekli Ortamlar Mekaniği", İstanbul Teknik Üniv. Rektörlüğü , (1993).

[6] Erıngen,A.C.,"Mechanics Of Continua",Robert E. Krieger Pub. Co.,Huntington, New York,(1980).