

Dinamik Sistemlerde Kaotik Zaman Dizilerinin Tespiti

Nihat PAMUK*

TEİAŞ 5. İletim Tesis ve İşletme Grup Müdürlüğü, Sakarya.

Özet

Dinamik sistemler doğrusal veya doğrusal olmayan metotlar kullanılarak incelenirler. Kaotik zaman dizileri, başlangıç şartlarına olan duyarlılığının yanında geniş bantlı, gürültü ve benzeri periyodik olmayan bir yapıya sahiptirler. Bu nedenle kaotik sistemler evrendeki birçok sorunun cevabını taşımaktadır. Günümüzde, geniş bir uygulama alanı bulan kaotik hareketin belirlenmesi aşamasında kullanılan yöntemlerden bazıları; tuhaf çekiciler, güç spektrumları ve Lyapunov üstelleridir. Bu çalışmada, dinamik sistemlerdeki kaotik yapının belirlenmesi ele alınarak, kullanılacak yöntemler incelenmiştir. Uygulama aşamasında kaotik bir modeli incelemek ve doğrusal olmayan stokastik süreçten ayırmak oldukça zorlaşmakta, bu tür problemlerin çözümünde tuhaf çekicilerin boyutu büyük önem kazanmaktadır. Bu nedenle, çeşitli dinamik sistemlere ait zaman dizileri üzerine kaotik boyut analizleri yapılmıştır.

Anahtar kelimeler: Kaos, dinamik sistem, zaman dizileri, kaotik boyut analizi.

Determination of Chaotic Time Series in Dynamic Systems

Abstract

The dynamic systems are analyzed by using linear or nonlinear methods. Besides the sensitive dependence to the initial conditions, chaotic time series have a wideband, noise and like non periodic structure. Therefore chaotic systems have answers to many questions in the universe. Nowadays, chaos theory is used wide range applications such as strange attractor, power spectrums and Lyapunov exponents. In this study, the determination of chaotic structure was discussed and methods were used in dynamic systems. A chaotic model is very difficult to distinguish nonlinear stochastic process in during the implementation stage. The large size of strange attractors is significant in these kinds of problem solutions. Hence, chaotic dimension analysis methods have been applied on the time series of various systems.

Keywords: Chaos, dynamic system, time series, chaotic dimension analysis.

* Nihat PAMUK, nihatpamuk@gmail.com

1. Giriş

Kaos, başlangıç şartlarına aşırı duyarlı olan ve gürültü benzeri geniş güç spektrumuna sahip olan, düzensizliğin düzeni şeklinde tanımlanabilir. Bilimsel anlamda ilk defa Fransız filozof Henry Poincare tarafından 20. yüzyılın başlarında astronomi çalışmaları sırasında, karmaşık bir sistemin kararlılığı ile ilgili olan çalışmalarda kullanılmıştır [1]. Başlangıç koşullarındaki çok küçük farklar sonuçta büyük farklar oluşturmakta ve kestirilebilirlik imkânsızlaşmaktadır. Düzgün davranışa sahip dinamik sistemlerde çok küçük parametre değişikliği sonucu sistem kaosa sürüklenmektedir. Günümüzde kaotik hareket analizi; ekonomi, biyoloji, kimya, bilişim, tıp, mühendislik, çevrebilim ve meteoroloji alanlarında geniş olarak yapılmakta ve uygulama alanı bulmaktadır. Çevre bilimciler meteorolojik gözlemler, karbon emisyonu, iklim değişikliği gibi verilerle küresel ısınmanın etkilerinin nasıl olacağını; ekonomistler faiz oranları, borsada meydana gelen dalgalanmalarla ekonomik verilerin nasıl değişeceğini; yerbilimciler sismik dalgalarla depremin zamanını; biyologlar ise çevre şartlarından nesli tükenmekte olan bir türün popülasyonunun nasıl değişeceğini tahmin ederek bu süreçleri kontrol altına almak isterler.

Süreçleri kontrol edebilmek için eldeki verilerin analiz edilmesi gerekmektedir. Veriler üzerinde durağanlık testleri, olasılık dağılımları, Fourier analizleri, Otokorelasyon fonksiyonları ve Hurst üstellerinin hesaplanması gibi yöntemler uygulanabilir. Ancak bu yöntemler veriler gürültü içerdiğinde veya verilerin elde edildiği sistemler doğrusal olmadığı zaman sonuçlar tatmin edici değildir. Bu nedenle doğrusal olmayan zaman dizilerini analiz etmek için farklı arayışlar ortaya çıkmıştır. Kaos konusunda bilimsel anlamda ilk araştırma, bir meteorolog olan Lorenz'in 1963 yılında sıvılardaki türbülans hareketi ile ilgili bir çalışma yapması ile başlamıştır [2]. Lorenz'in çalışmasındaki denklem sisteminin sayısal çözümü, düzenli olmayan hareketler içermekteydi. Kaotik analizde 1970'li yıllardan sonra yeni yöntemler ortaya konmuştur. Ruelle ve Takens 1971 yılında sıvılardaki türbülans durumunu açıklarken tuhaf çekici (strange attractor) kavramını ortaya atmışlardır [3].

Kaos'un yapısında oluşan düzen tartışması ise Greick ile başlamıştır [4]. Yine bir dinamik analizi olan Wolf, bu tür sistemlerde başlangıçtaki bilginin üstel bir hızla kaybını ve kestirilebilirliğin ortadan kalktığını, sistemin Lyapunov üstellerden hareketle ortaya konmuştur. Kaotik bir çözüm veren başlangıç koşullarına çok yakın bir başka grup için çözüm, bir önceki çözümden üstel olarak farklı zaman aralıklarında uzaklaşır. Bu uzaklaşmanın ölçüsü Lyapunov üsteli olup pozitif bir Lyapunov üsteli kaotik, negatif ise düzgün davranışı ortaya koyar [5]. Ayrıca sinüzoidal olarak bir kesilip bir tekrarlanan davranışlarının analizinde klasik yöntemlerin yetersizliği ise Thomson ve Stewart tarafından ifade edilmiştir [6]. Doğrusal olmayan dinamik sistemlerin gelişigüzel ve tahmin edilemez bir davranış göstermesi kaos olarak adlandırılmıştır [7].

Kaotik sistem denklemlerle ifade ediliyorsa deterministik kaos olarak adlandırılır. Kaotik sistemlerin matematiksel modelleri doğrusal olmayan bir yapıya sahiptir. Hem sürekli zamanlı diferansiyel denklemlerde hem de ayrık zamanlı fark denklemleri ile ifade edilebilmektedir. Sistemlerin matematiksel modellerinin olması determinizm kavramını ortaya koyarken uzun dönemdeki davranışın kestirilemez olması; kaotik sistemleri doğrusal olmayan sistemler altında incelenen birçok modelden farklı kılmaktadır. Kaotik sistem modelleri basit olmasına karşın davranışları çok karmaşık gözükmektedir. Kaotik sistemlerden elde edilen verilere geleneksel birçok istatistik test

uygulandığında üretilen zaman dizilerinin analizini geleneksel yöntemlerle yapmak yetersiz kalmaktadır. Bu nedenle doğrusal olmayan zaman dizilerinin analizlerinde kaotik analiz algoritmaları ön plana çıkmaktadır. Doğrusal olmayan dinamiklerin incelenmesi için geliştirilen bu metotlarla tanımlanamayan doğrusal olmayan davranışlar eğer giriş verilmeden elde ediliyorsa 'kaotik davranış olarak adlandırılır [8]. Bu davranışın limit döngüden farklı olan özellikleri temel olarak;

- Başlangıç şartlarına aşırı duyarlılık göstermesi,
- Rastgele değil deterministik tipte olması,
- Sınırsız sayıda değişik periyodik salınımlar içermesi,
- Gürültü sinyali veya benzeri güç spektrumuna sahip olması,
- Genliği ve frekansı tespit edilemeyen ancak sınırlı bir alan içerisinde değişen karmaşık davranışlar olmasıdır.

2. Dinamik Davranış Türleri ve Kaos Hareketleri

Dinamik sistemlerde davranış türleri; periyodik, yarı periyodik veya kaotik hareket olarak sınıflandırılır. Davranış türlerine ait sınıflandırma şekilleri özetlenecek olursa;

2.1. Kestirilebilir düzgün hareket

Parametresine veya başlangıç koşullarına duyarsız olan periyodik veya yarı periyodik hareketlerdir.

2.2. Kestirilemez düzgün hareket

Birden fazla periyodik davranışın var olduğu, çoklu düzgün çekicilerin gözlemlendiği ve uzun zaman içindeki davranışın başlangıç koşullarına hassaslık gösterdiği davranıştır.

2.3. Geçici kaos hareketi

Davranış kaotik yapıya sahip ve kuvvetli çekici bir özellik gösterir. Ancak bir süre sonra periyodik bir yapıya dönüşür.

2.4. Aralıklı kaos hareketi

Çeşitli zaman aralıklarında kaotik süreçlerle kesintiye uğramış periyodik davranış olup, düzgün davranış süresi kestirilemez. Verilen son iki davranış yapısına göre, dinamik bir sistemin kaosa sürüklendiği süreçte karşılaşılabilen iki farklı durum, kaos'un geçici olması veya aralıklarla ortaya çıkmasıdır. Başlangıçta uzun veya kısa süreli kaotik davranış gösteren sistem, bu durumu atlınca bir nokta çekiciye veya periyodik çekiciye dönüşür.

Aralıklı kaos hareketi ise periyodik davranış rastgele genişlikte zaman dilimlerinde kaotik davranışlarla kesilmesidir [9]. Kaotik dinamikte, ilginç bir diğer tanımlama da 'kriz' tanımlamasıdır. Bu tanım mevcut kaotik durumdaki parametre değişimi sonucu ani değişimi ortaya koyar [10]. Başlangıçta kaotik davranan bir sistem aniden periyodik bir yapıya dönebilir veya belirli bir bölgede ortaya çıkan kaos hareketi, daha uzun veya daha kısa hale gelebilir.

2.5. Dar bant kaos hareketi

Faz uzayında davranışlar periyodik davranışlara yakınlık gösterirler. Güç spektrumları belirli frekanslarda uzun ve geniş pikler oluşturur.

2.6. Geniş bant kaos hareketi

Çekiciler tuhaf olup, güç spektrumu frekansları ise geniş bant özelliği gösterir. Bunlarla birlikte piklerde, belirli veya belirsiz olarak düzensiz bir durum alırlar. Ayrıca bunların dışında, başlangıç koşullarındaki veya parametrelerdeki değişiklik sonucu ortaya çıkacak faz uzayı davranışındaki niteliksel değişiklikler (periyodiklik, çatallaşma, çekiciler v.d.) çatallaşma (bifurcation) teorisi olarak bilinir.

Parametrelerdeki küçük değişiklikler faz uzayı görüntüsünün özelliklerini değiştirmiyorsa sistem yapısal olarak kararlıdır. Faz uzayındaki bir yörünge bir nokta çekiciyi yakınsayabilir, periyodik çekiciye yerleşebilir veya faz uzayının belirli, kesirsel bir kısmını tuhaf bir çekici içine alabilir. Bu tür çekiciler Pozitif Lyapunov üsteli çekicisi de tuhaf kaotik çekici olarak adlandırılır [11] ve tuhaf çekici bir kaotik dinamiği temsil ettiği için, başlangıç koşullarına aşırı duyarlılık gösterir ve zaman içindeki gelişimi kestirilemez [12].

3. Kaotik Analiz Yöntemleri

Doğrusal olmayan zaman dizilerinin analizi, zaman dizilerindeki veriler ile verilerdeki doğrusal olmamayı hesaplayan tekniklerin duyarlılığına bağlıdır. Bir sistemde kaotik analiz yapmak için birçok yöntem mevcuttur [13-14]. Bu bölümde kaotik analizde en yaygın olarak kullanılan Poincare Haritalama, Güç Spektrumları, Lyapunov Üstelleri ve Fraktal Boyut Analizi tanıtılmıştır.

3.1. Poincare haritalama

Birçok durumda ayırık zamanlı bir sistemi analiz etmek, sürekli zamanlı bir sistemi analiz etmekten daha kolaydır. Poincare isimli bilim adamı bu işi başarmak için bir yöntem geliştirmiştir. Aslında bu yöntem, n. dereceden sürekli bir dinamik sistemi (n-1) dereceden ayırık zamanlı bir dinamik sisteme dönüştürme işlemidir [22].

Faz uzayında Poincare yüzeyi diye bilinen bir yüzey seçilir. Bu yüzey üzerinde yörüngeyi geçtiği noktalar işaretlenerek bir harita elde edilir. Poincare yüzeyi seçilirken belirli bir kural yoktur. Tamamen kişinin tecrübesine göre yörüngeyi geçtiği bir yüzey seçilir. Özerk olmayan sistemlerin ise Poincare haritasını elde etmek daha kolaydır. Faz uzayı izlenirken belirli aralıklarla örnek alınarak Poincare haritası elde edilir. Örnekleme süresi ise özerk olmayan sistemi süren büyüklüğün periyodudur.

Karmaşık sistemleri daha basit hale getirmek ve kararlılık analizi yapmak için elverişlidir [15]. Periyodik bir davranış Poincare haritalama yöntemi ile incelenirse, sabit bir nokta elde edilir. Çünkü sistemin periyodu ile aynı zaman dilimlerinde örnekler alınır, hep aynı nokta alınacağından tek bir nokta görülür. Sistemin periyodu ise kapalı bir çevrimdir. Fakat sistem kaotik ise, kapalı olmayan, gelişigüzel kapalı bir fraktal şekil oluşur.

3.2. Güç spektrumları

Dinamik sistemler, sürekli veya kesikli değişkenlere ait $F(t)$ zaman dizileri ile ifade edilirler. Herhangi bir $F(t)$ fonksiyonu periyodik bileşenlerin üst üste gelmesi ile oluşur. Bu bileşenlerin oransal büyüklüklerinin belirlenmesi spektral analiz olarak adlandırılır [16]. $F(t)$ 'nin yapısına göre farklı iki yolla gösterim yapılır. $F(t)$ periyodik ise, spektrum frekansları, temel frekansların tam katları olan hareketlerin doğrusal bileşimi olarak

ifade edilir. Bu bileşim fourier dizisini oluşturur. $F(t)$ periyodik değil ise, sürekli frekanslı hareketlerin bir bileşimi ile ifade edilir. Böyle bir spektrum ise fourier dönüşümünü verir. Bu gösterim kaotik dinamik davranış için kullanışlıdır. $F(t)$ 'nin fourier dizi gösterimi;

$$F(t) = f(t + nT), \quad 1/T = \omega_0 / 2\pi \quad \text{ise,} \quad (1)$$

$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{j\omega_0 t n} \quad (2)$$

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3)$$

şeklinde verilir. Bileşenin genliği a_n ile gösterilir. Bileşenin kaotik olduğunu gösteren en önemli ölçüt, bu bileşene ait güç spektrumunun geniş bant yapısına sahip olmasıdır [13].

Bir dinamik sistemde karşılaşılabilecek davranış türlerinden T periyotlu davranış için güç spektrumu $(1/T)$ temel frekans ve bunun uyumlarında $(2/T), (3/T), \dots$, genlik olarak gittikçe zayıflayan piklerden oluşur. Yarı periyodik bir davranış için ise $(1/T_1), (1/T_2), \dots$ gibi farklı iki veya daha fazla temel frekans ve bunların $(2/T_1), (2/T_2), (3/T_1), (3/T_2), \dots$, uyumlarında genlik olarak gittikçe zayıflayan piklerden oluşur. Ayrıca yarı periyodik titreşimler için $\omega_1/2, \omega_1/3$ gibi alt uyumlarda ve bunların $2\omega_1/3, 3\omega_1/2, \dots$, gibi uyumlarında da piklere rastlanır. Kaotik hareket için güç spektrumu ise geniş bir bant için yükseklik ve genişlikleri rastgele olan piklerden oluşur.

3.3. Lyapunov üstelleri

Deterministik sistemlerde kaos, başlangıç koşullarına duyarlılık gösteren bir yapıya sahiptir. Faz uzayında birbirine yeterince yakın iki başlangıç noktasındaki hareketlerin zaman içinde birbirlerinden ortalama bir üstel faktörle uzaklaşıp, yakınlaşmaları kaotik sistemler içinde var olan bir gerçektir. Bu üstel faktör Lyapunov üsteli olarak adlandırılır [17]. Faz uzayının boyutu kadar Lyapunov üsteli olup her bir üstel o yöndeki açılma veya büzülmenin ölçüsünü gösterir. Sistemi temsil eden diferansiyel denklem sistemlerinden hareketle değişim hesabı kullanılarak sisteme ait Lyapunov üstellerinin elde edilmesi 1985 yılında Wolf tarafından gerçekleştirilmiştir. İki başlangıç noktası arasındaki uzaklık d_0 olmak üzere, daha sonraki bir zamanda bu uzaklık;

$$d(t) = d_0 e^{\lambda t} \quad (4)$$

olarak yazılır. Buradan birinci Lyapunov üsteli λ ;

$$\lambda = \frac{1}{t_N - t_0} \sum_{k=1}^N \log_2 \frac{d(t_k)}{d(t_{k-1})} \quad (5)$$

şeklinde hesaplanır [7]. Faz uzayının boyutuna göre her bir boyuttaki uzaklaşma ve yakınlaşma bir λ ile ifade edildiğine göre, sisteme ait Lyapunov üstel spektrumu; λ_1 en büyük üstel olmak üzere, $\lambda_1 > \lambda_2, \dots$, şeklinde yazılır. Kaotik bir sistemden söz edebilmek için en az bir pozitif Lyapunov üsteline sahip olması gerekir. Herhangi bir

sistemde; $\lambda_1 > 0$ ise davranış kaotik, $\lambda_1 < 0$ ise davranış düzenli yazılır [5]. Düzenli periyodik hareketler negatif Lyapunov üsteli ile ifade edilir. Çatallaşma noktaları sınırlı düzenli hareketlere karşılık gelir ve üstel değeri sıfırdır. Lyapunov üstelleri dinamik sistemin çekicilerinin tiplerini karakterize etmeye yardımcı olur [8]. Üç boyutlu bir faz uzayında karşılaşılan Lyapunov spektrumları aşağıdaki gibidir.

$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$

$(-, -, -)$: sabit nokta

$(0, -, -)$: limit nokta

$(0, 0, -)$: iki kabartılı

$(+, 0, -)$: sağlam çekici (kaotik hareket)

“+ üstel”, çekicinin kaos durumunda olduğunu, “0 üstel”, bir hareket boyunca üstelden daha yavaş bir değişme olduğunu ve “- üstel”de uzayın bir çekicisinin var olduğunu gösterir. Bu şekilde devam edilerek, daha büyük boyutlarda Lyapunov spektrumlarının üstelleri yazılabilir.

3.4. Fraktal boyut analizi

Fraktal geometri, doğadaki nesnelerin geometrik özelliklerini tanımlamak için Mandelbort tarafından ortaya atılmıştır. Fraktal geometriye sahip şekiller, öklid biçimindeki nesnelere farklı özelliklere sahiptirler. Mandelbort bazı nesnelerin boyutunu ölçerken eğer ölçüm yapılan birimin hassas olmaması halinde nesnelerin geometrisindeki detayların gözden kaçtığını göstermiştir. Eğer ölçüm yapılan birim çok hassas ise nesnelerin uzunluğu çok fazla olacaktır. Alanı sonlu olan bir nesnenin uzunluğu ölçülemeyecek kadar büyük olacaktır [18]. Bu tip nesnelere karakterize etmek için matematiksel bir araca ihtiyaç duyulur. Bu araç fraktal boyuttur.

Doğal bir nesne ile bu nesnenin gömülü olduğu uzayın boyutunun farklı olduğu bilinmektedir. Doğadaki bir nesnenin gömülü olduğu uzayın boyutu, serbestlik derecesi veya nesneyi tanımlamak için gerekli değişken sayısıdır. Gömülü olan uzayın boyutunun pozitif tam sayı olduğu aşikârdır. Bir nesnenin boyutu ise bu değişkenler tarafından tanımlanmış uzayın doldurulduğu kısımdır.

Kaotik sistemlerde elde edilen çekiciler tuhaf çekici diye adlandırılır. Bu çekiciler fraktal şekillere sahiptirler. Bu çekicilerin boyutu tam sayı olmayan fraktal boyutlardadır. Dolayısıyla kaotik çekicilerin boyutu bulunurken fraktal boyut kullanılır. Fraktal şekillerin boyutunun bulunabilmesi için kutu sayma prensibi ortaya atılmıştır. Kısaca düzensiz biçimdeki nesnelerin boyutunun bulunabilmesi için geliştirilmiştir. Fraktal boyutuna ihtiyaç duyulan şekil, uygun boyuttaki kutular içine alınmaktadır. Kutuların boyutu aynı olabileceği gibi farklıda olabilmektedir. Fraktal boyut eşitlik 6'dan hesaplanmaktadır.

$$\text{Fraktal Boyut} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\text{Log} N}{\text{Log}(1/\varepsilon)} \quad (6)$$

Eşitlik 6'da; N şekli kapsayan kutu sayısını, ε ise kutuların boyutunu göstermektedir.

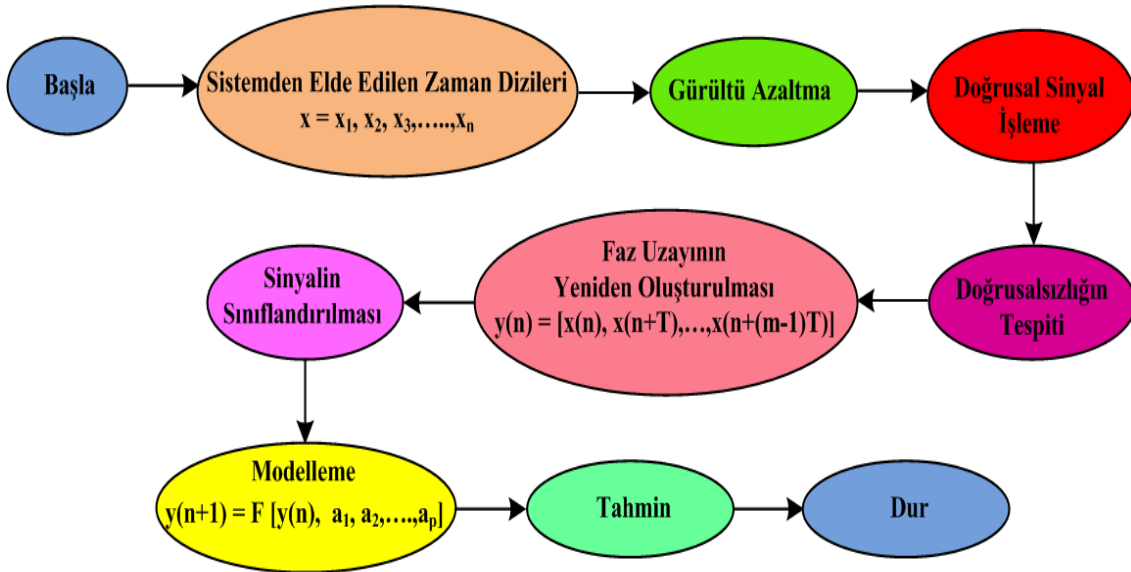
4. Kaotik Zaman Dizilerinin Analizi

Doğal olaylar zamana bağlı olarak, sürekli ve ayrık olmak üzere iki şekilde meydana gelir. Sürekli olaylar devamlı olarak ölçülmelidir. Zamanla gelişen olaylarda ayrık

zamanlı değişimler fark denklemleri veya tekrarlama yolu ile çözülür. Tekrarlama, ayrık zamanlı gelişmelerin gösterilmesinin matematiksel bir yoludur ya da bir işlemin üst üste yinelenmesi olarak kabul edilir. Sürekli zamanlı değişimler için de türevsel denklemler kullanılır [19]. Zaman içinde değişen herhangi bir büyüklüğün belirli aralıklarla ya da sürekli olarak ölçülmesi ile oluşan zaman dizilerinin analizinde ise yoğunlukla ne fark ne de türevsel denklemler bulunur.

Sisteme ait dinamiklerin en iyi şekilde analiz edilebilmesi için, sistemden alınan verinin mümkün olduğu en az ölçüde gürültüye sahip olması gerekir. Bu nedenle gürültü sinyalleri bastırılmalıdır. Kaotik sinyaller gürültü gibi geniş güç spektrumlarına sahip olduklarından, gürültü sinyallerinden ayrılmaları oldukça zordur. Bu nedenle doğrusal analiz geniş güç spektrumuna sahip sinyaller için iyi bir analiz metodu değildir. Kararsız dinamik sistemlere ait sinyallerin özelliği periyodik bir durumun olmamasıdır. Yine de sinyaldeki kararsızlığın veya değişimin kaynağını açıklayabilecek gizli bir periyodik durumu araştırmak için, ilk olarak spektral analiz uygulanabilir [17].

Doğrusal olmayan analize başlarken ilk yapılması gereken, skaler veri şeklindeki sinyalin faz uzayında oluşturulmasıdır. Skaler ölçüm; $x(n) = x(t_0 + n\tau_s)$ olarak gösterilir. Burada t_0 başlangıç zamanı, τ_s deneyde kullanılan cihazın örnekleme zamanıdır. $x(n)$, doğrusal olmayan devredeki bir gerilim ya da akım veya bir akışkan dinamiğindeki hız ya da yoğunluk olabilir [20]. Şekil 1’de, kaotik zaman dizisi analizlerine ait işlemler gösterilmektedir.



Şekil 1. Kaotik zaman dizisi analizine ait işlemler.

Sinyalin ölçüldüğü sisteme ait dinamikleri modellemek için iki yaklaşım bulunmaktadır. Birinci yaklaşım, $x(n)$ koordinatlarında fiziksel modelin yapılmasıdır. Modelin, çeşitli deneyler veya deneyin farklı özellikleri ile gerçekleştirilmesi gerekir. Eğer sistemin başlangıç koşullarına hassas bağımlılığının bir ölçüsünü veren Lyapunov üstellerinden birisi sıfır ise, dinamikleri belirlemek için türevsel denklemler düzenlenebilir çünkü türevsel bir denklem, sistemin sonlu bir zaman uzayındaki gösteriminden daha kesindir [20]. İkinci yaklaşım hız, basınç, sıcaklık, gerilim gibi değerlerdeki değişimler için matematiksel modellerin yapılmasına dayanır. Faz uzayı içinde hareket eşitliklerinin

çözümlemesi sonucu konumlanan çekicinin boyutları ve sistemin Lyapunov üstelleri gibi nicelikler için modelin durumları araştırılır [20].

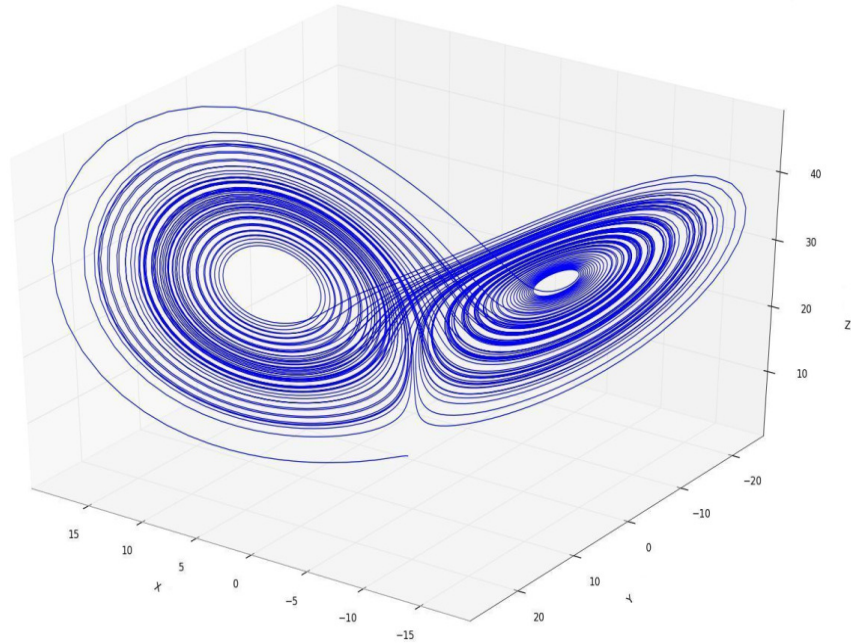
5. Çekici Tipleri

5.1. Lorenz çekicisi

Kaotik sürekli-zamanlı dinamik sistemlerden birisi Lorenz çekicisidir. Lorenz kaotik sistemi, kırk yıl kadar önce Lorenz tarafından, üç boyutlu akışkan konveksiyonu için bir model olarak sunulmuştur. Bu çalışmalarda üç değişkenden ikisi sıcaklık, diğeri hız alanı katsayısıdır. Lorenz denklemleri;

$$\begin{aligned}\dot{x} &= s(-x + y) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \quad s, r, b > 0 \\ \dot{z} &= -bz + xy\end{aligned}\tag{7}$$

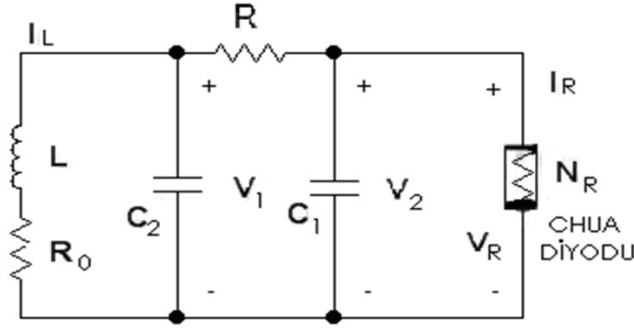
olarak ifade edilmiştir. Burada; s, r ve b durum değişkenleridir. Sistemin karakteristik özelliği, spektrumu geniş bir frekans bölgesine yayılmış periyodik olmayan salınımlar üretmesidir. Sistemin kaotik davranış sergilediği parametre değerleri; s=10, r=28 ve b=2,66'dır. Şekil 2'de söz konusu parametre değerlerine ait Lorenz çekicisinin görüntüsü gösterilmiştir.



Şekil 2. Lorenz çekicisine ait görüntü

5.2. Chua çekicisi

Chua 1983 yılında kendi adı ile anılan ve kaotik işaret üreten bir osilatör devresi geliştirmiştir. Bu osilatör devresi, birçok dinamik davranış sergileyen üçüncü dereceden basit bir otonom devreden oluşmaktadır. Şekil 3'de Chua devresi olarak adlandırılan nonlineer bir osilatör devresi gösterilmiştir.



CHUA DEVRESİ
Şekil 3. Otonom chua devresi

Chua devresi en karmaşık kaosu varlığının deneysel olarak kurulabildiği, sayısal olarak doğrulanabildiği ve matematiksel olarak kanıtlanabildiği en basit devrelerden biridir. Chua devresi kapasitör, indüktör gibi enerji depolayan elemanlar, lineer direnç ve Chua diyodu olarak adlandırılan bir nonlineer direnç N_R 'den oluşmaktadır. Chua devresine ait durum denklemleri aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

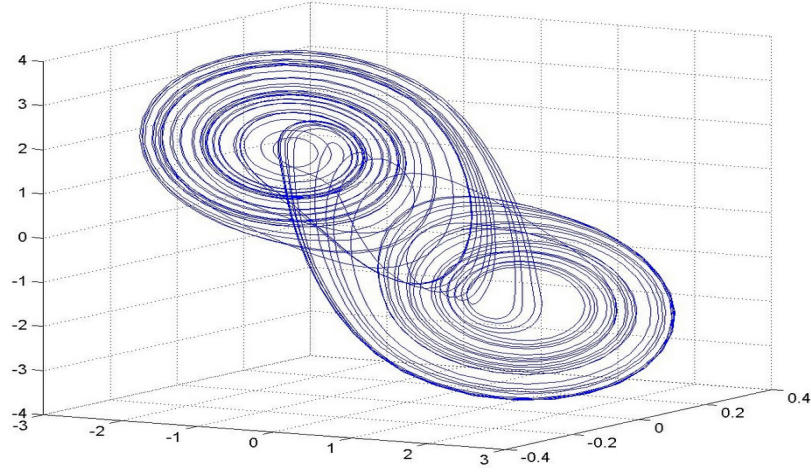
$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= \frac{g}{c_1}(v_2 - v_1) - \frac{1}{c_1}g(v_1) \\ \dot{v}_2 &= -\frac{g}{c_2}(v_2 - v_1) + \frac{1}{c_2}i_L \\ \dot{i}_L &= -\frac{R_c}{L}i_L - \frac{1}{L}v_2 \end{aligned} \quad (8)$$

Eşitlik 8'de $g(v_1)$ olarak tanımlanan N_R nonlineer direncinin parça parça doğrusal karakteristiğini temsil etmektedir.

N_R nonlineer direncin, iç bölgede G_a ve dış bölgede G_b eğimli $V - I$ karakteristiği bulunmaktadır. Karakteristik değerleri analitik olarak eşitlik 9 ile hesaplanır.

$$g(v_1) = \begin{cases} G_b V_R + (G_b - G_a) B_p & ; V_R < -B_p \\ G_a V_R & ; -B_p < V_R < B_p \\ G_b V_R + (G_a - G_b) B_p & ; V_R > B_p \end{cases} \quad (9)$$

Sistemin kaotik davranış sergilediği parametre değerleri sırasıyla; $B_p = 1.56$, $G_a = -8/7$ ve $G_b = -5/7$ 'dir. Şekil 4'de söz konusu parametre değerlerine ait Chua çekicisinin görüntüsü gösterilmiştir.



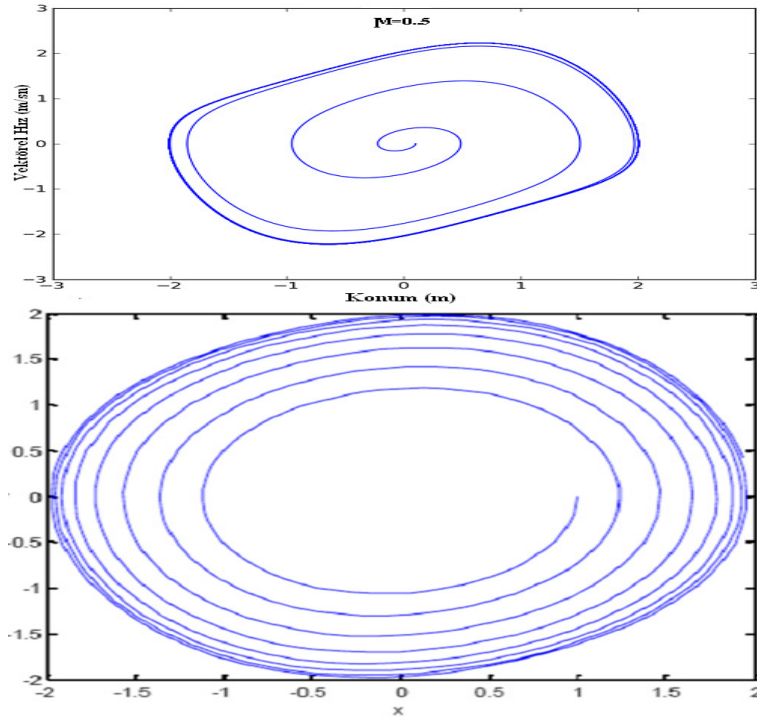
Şekil 4. Chua çekicisine ait görüntü

5.3. Van der pol çekicisi

Kaotik işaret üreten bir başka dinamik denklemde Van der pol kaotik çekicileridir. Sistemin dinamik denklemleri;

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + \mu(x - x^3) & ; (\mu > 0) \\ \dot{y} &= -x \end{aligned} \quad (10)$$

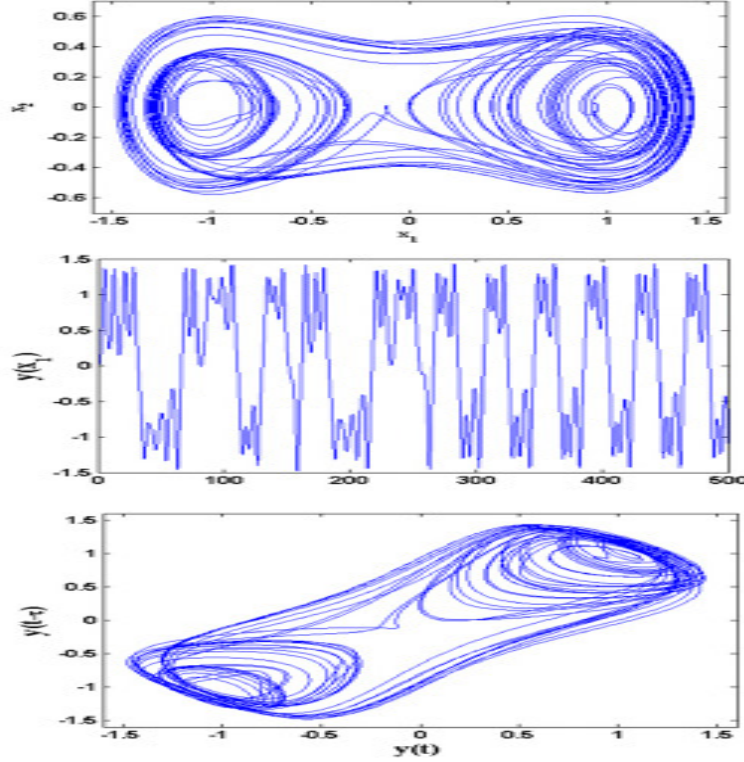
biçiminde ifade edilmiştir. Sistemin kaotik davranış sergilediği parametre değerleri $\dot{x} = 1$, $\dot{y} = -0,97$ ve $\mu = 0,5$ 'dir. Şekil 5'de söz konusu parametre değerlerine ait Van der pol çekicisine ait limit döngü görüntüsü gösterilmiştir.



Şekil 5. Van der pol çekicisine ait limit döngü görüntü

5.4. Duffing çekicisi

Duffing çekici denklemleri de diğer dinamik denklemler gibi otonom ve kendi kararını verebilen eşitliklerdir. Duffing çekicisi bu hali ile doğrusal olmayan dinamik sistemlerin ilk örnek uygulamalarında kullanılır. Bu sistem yay, doğrusal olmayan elektronik devreler, plazmalardaki iyonize dalgalar, josephson parametrik kuvvetlendiricisi, süper iletkenler gibi fiziksel sistemler için model olarak kullanılmaktadır. Şekil 6'da Duffing çekicisinin görüntüsü verilmiştir.



Şekil 6. Duffing çekicisine ait görüntü

Duffing çekicisinin dinamik denklemleri aşağıda gösterilmiştir.

$$\ddot{y}(t) + 2\mu\dot{y}(t) + \omega_n^2 y(t) + \alpha_3 y(t)^3 = \omega_n^2 u(t) \quad (11)$$

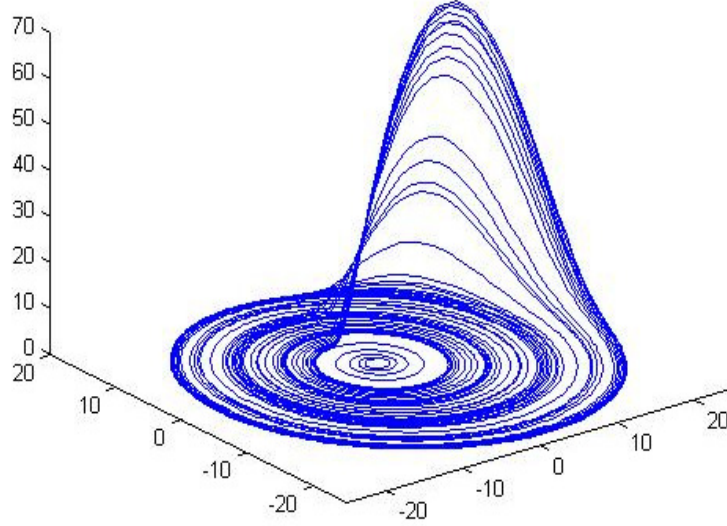
Eşitlik 11'de μ , ω_n , α_3 ve u kontrol değişkenleri olup, sistemin cevabını etkilemektedir. Sistemin kaotik davranış sergilediği parametre değerleri $\omega_n = 1.5$, $\mu = 0.15$, ve $\alpha_3 = 0.6$ ve $u = 1$ 'dir.

5.5. Rössler çekicisi

Kaotik sürekli zamanlı dinamik bir sistem olan Rössler çekicisi, kimyasal reaksiyonların dinamiği ile ortaya çıkmıştır. Sistemin dinamik denklemleri;

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -(y + z) \\ \dot{y} &= x + ay \quad a, b, c > 0 \\ \dot{z} &= b + z(x - c) \end{aligned} \quad (12)$$

biçiminde ifade edilmiştir. Rössler çekicisine ait $a = 0.2$, $b = 0.2$ ve $c = 5.7$ parametre değerleri için bulunan Rössler çekicisi görüntüsü şekil 7'de verilmiştir.



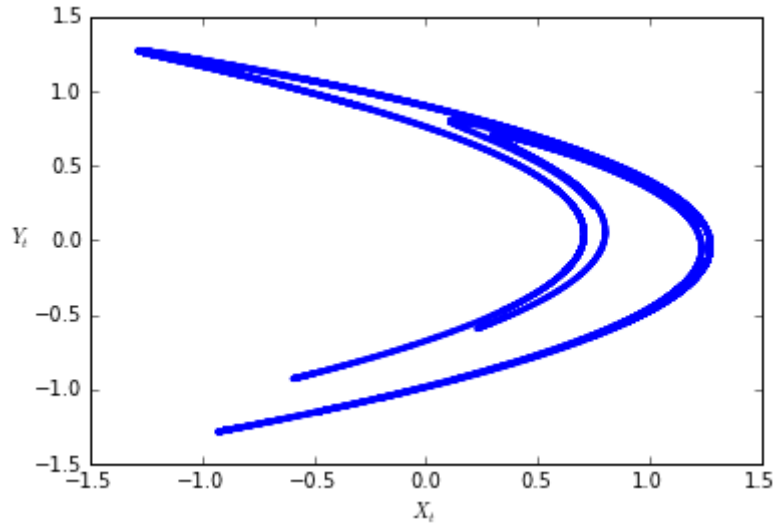
Şekil 7. Rössler çekicisine ait görüntü

5.6. Henon çekicisi

İki boyutlu kesikli zamanlı dinamik sistemlerden biri olarak, Fransız astronom Henon tarafından ortaya konmuştur. Sistemin dinamik denklemleri;

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= 1 + y_t - ax_t^2 \\ y_{t+1} &= bx_t \end{aligned} \quad (13)$$

biçiminde ifade edilmiştir. Henon çekicisine ait $a = 1.4$ ve $b = 0.3$ parametre değerleri için bulunan Henon çekicisi görüntüsü şekil 8’de gösterilmiştir.



Şekil 8. Henon çekicisine ait görüntü

5.7. Lojistik denklem – periyodik çiftleme

Tek boyutlu kesikli zamanlı sistem; $x_{t+1} = A x_t (1 - x_t)$; $x_t \in [0,1]$, $A \in [0,4]$ olarak ifade edilirse, lojistik denklem veya Verhulst dinamik (nüfus artış modeli) olarak adlandırılır.

A parametresinin değişimi sonucu parametrenin belirli değerlerinde periyodun çiftlenerek $2T, 4T, \dots$, gibi davranışlar göstermesi şeklinde ortaya çıkar. Bu sürecin en önemli özelliği A değerleri için bir ayarlama kuralı olmasıdır. A_t, A_{t+1}, A_{t+2} parametre değerleri periyot çiftlemesi için kritik değerler ise, t sonsuza giderken;

$$\delta = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A_{t+1} - A_t}{A_{t+2} - A_{t+1}} = 4.669201091029$$

değerini sağlamasıdır. δ sayısı, Feigenbaum sayısı veya universal katsayısı olarak bilinir. Pratikte bu limite 3. ve 4. dallanmada yakınsar. Bu süreç A'nın kritik bir değerine kadar sürer ve A'nın bu değerinden sonra kaos başlar.

6. Çekiciler İçin Kesirsel Boyutlar ve Sayısal Uygulamalar

Çekicilerin boyutları dinamik sistemi ya da kaosu tanımlama açısından önemlidir. Deterministik kaos ile rastgele gürültüyü birbirinden ayırt etmek tuhaf çekicilerin ölçümü ile mümkündür. 1991 yılında Ruelle tarafından deneysel zaman dizilerinden korelasyon boyutunun hesaplanması için algoritma geliştirilmiştir [21]. Aynı zamanda kapasite yada bilgi boyutu olarak da adlandırılan Kolmogorov entropi, belirli kısıtlar altında pozitif Lyapunov üstellerin toplamı süreç hakkında bilgi verir. Süreç ile ilgili Kolmogorov entropisinin sonuçları aşağıda verilmiştir.

<u>Kolmogorov Entropisi</u>	<u>Süreç</u>
$H = 0$	Regüler
$H > 0$	Kaotik
$H = \infty$	Stokastik

Basit çekiciler için boyut belirlemek çok önemli değildir. Çünkü kararlı bir denge noktasının kesirsel boyutu sıfırdır. Periyodik çekicinin boyutu da birdir. İkili periyodik bir çekicinin boyutu ise ikidir. Düzgün davranış gösteren sistemler için kesirsel boyut tam sayıdır. Kaotik çekicinin boyutu ise farklı olup, kesirlidir. Çekiciler için kesirsel boyutun belirlenmesi; çekiciye ait ilk elden bilgi sağlanması, bir noktanın çekici üzerindeki konumunu kestirmeyi sağlaması ve sistemin analizi için faz uzayının gerekli en az boyutu vermesi açısından önemlidir.

Boyutların ölçülmesi için değişik ölçütler vardır. Bunlardan en önemlileri; kapasite boyutu, Lyapunov boyutu, korelasyon boyutu ve bilgi boyutudur. Tablo 1'de daha önce bahsedilen çekici tiplerine ait zaman dizilerinin boyut ölçütleri verilmiştir. Tablo 1'de boyut ölçüleri verilen çekici tipleri için;

Lorenz çekicisinde $s=16, r=45.92, b=4$;
 Chua çekicisinde $B_p=1.19, G_a=-13/9, G_b=-3/5$;
 Van der pol çekicisinde $\mu=0.43$;
 Duffing çekicisinde $\mu=0.21, w_n=1.43, a_3=0.3$;
 Rössler çekicisinde $a=0.15, b=0.2, c=10$;
 Henon çekicisinde $x=1-1.4x_t^2+0.3y_t, y_{t+1}=x_t$ olarak alınmıştır.

Tablo 1. Çekici tiplerine ait zaman dizilerinin boyut ölçütleri

Çekici Tipi	Korelasyon Boyutu	Lyapunov Üstelleri	Lyapunov Boyutu	Kapasite Boyutu
Lorenz	2.05	$\lambda_1 = 2.167$ $\lambda_2 = 0.000$ $\lambda_3 = -32.43$	2.07	0.130
Chua	1.03	$\lambda_1 = 2.335$ $\lambda_2 = 0.000$ $\lambda_3 = -12.91$	1.09	0.413
Van der pol	1.53	$\lambda_1 = 0.369$ $\lambda_2 = -2.374$ $\lambda_3 = -8.981$	2.12	0.148
Duffing	2.11	$\lambda_1 = 1.621$ $\lambda_2 = -1.040$	1.97	0.028
Rössler	2.29	$\lambda_1 = 0.130$ $\lambda_2 = 0.000$ $\lambda_3 = -14.17$	2.01	0.011
Henon	1.21	$\lambda_1 = 0.603$ $\lambda_2 = -2.340$	1.26	0.354

7. Sonuçlar

Zaman dizileri doğrusal metotlarla analiz edildiği zaman elde edilen sonuçlar genellikle gerçeğin eksik bir yorumudur. Daha duyarlı sonuçlar elde edebilmek için olaylardaki doğrusal olmamanın modellenmesine ihtiyaç duyulmaktadır. Doğrusal olmayan dinamik sistemlerin modellenmesi için kaos teorisinin sağladığı birçok ölçüm ve değişmez vardır. Bu metotlar kullanılarak yapılan modellerin doğrusal modellere göre gerçeğin yorumuna daha çok yaklaştığı görülmektedir. Bu çalışmada zaman dizilerinin boyutlarını tespit etmek için kullanılan kaotik analiz metotları ve bunların zaman dizileri üzerindeki bazı uygulamaları açıklanmıştır.

Dinamik sistemlerde kaotik zaman dizilerinin boyut hesaplamalarının doğruluğu çeşitli faktörlere bağlı olarak değişkenlik göstermektedir. Hesaplamalarda kullanılan nokta sayısı, örnekleme frekansı faz uzayının oluşturulması için gereken zaman gecikmesi, gömülü boyut ve sinyaldeki gürültü boyut hesaplamalarında etkili olan parametrelerdir. Kaotik verinin analizinde boyut sayısının artması ile birlikte, gerekli olan veri uzunluğu ve işlem zamanı da artmaktadır. Bu parametrelerin belirlenmesindeki farklılıklar aynı zaman dizisi üzerinde değişik sonuçlar vermektedir. Özellikle yüksek boyutlarda çalışan, veri uzunluğunu ve işlem zamanını azaltmaya yönelik yeni algoritmalar geliştirilebilir veya mevcut olanlar bu doğrultuda iyileştirilebilir.

Kaynaklar

- [1] Isham, V., Discussion on the meeting on chaos, **Journal of Royal Statistical Society**, 54, 2, 451-454, (1992).
- [2] Lorenz, E.N., Deterministic non-periodic flow, **Journal of the Atmospheric Sciences**, 20, 2, 130-141, (1963).

- [3] Özer, B., Akın, E., Kaos kuramı, **Bilişim Ansiklopedisi**, Papatya Yayıncılık, 39s., İstanbul, (2005).
- [4] Greick, J., **Chaos: making a new science**, Oxford Sciences Publications, 19-26. Oxford, England, (1987).
- [5] Wolf, A., Swift, J.B., Swinney, H.L., Vastano, J.A., Determining lyapunov exponents from time series, **Physica D**, 16, 1, 285-317, (1985).
- [6] Thompson, J.M., Steward, H.B., **Nonlinear dynamics and chaos**, Jhon Wiley, 138-149, New York, USA, (1986).
- [7] Yardım, F.E., Afacan, E., Lorenz tabanlı diferansiyel kaos kaydırmalı anahtarlama (DCSK) modeli kullanılarak kaotik bir haberleşme sisteminin simülasyonu, **Gazi Üniversitesi Mühendislik Mimarlık Fakültesi Dergisi**, 25, 1, 101-110, (2010).
- [8] Gündüz, G., **Kargaşa kaos ve şekil oluşumları**, METU Press, 93, Ankara, (2002).
- [9] Moon, F.C., **Chaotic vibrations**, John Wiley, 103, New York, USA, (1987).
- [10] Sprott, J.C., **Chaos and time-series analysis**, Oxford University Press, 31-37, Oxford, England, (2003).
- [11] Kostelich, E.J., Schreiber, T., Noise reduction in chaotic time – series data: a survey of common methods, **Physical Review Evaluation Letter**, 48, 2, 1752-1763, (1993).
- [12] Kaplan, D.T., Glass, L., Direct test for determinism in a time series, **Physical Review Evaluation Letter**, 48, 1, 427-430, (1992).
- [13] Yılmaz, D., Güler, N.F., Kaotik zaman serisinin analizi üzerine bir araştırma, **Gazi Üniversitesi Mühendislik Mimarlık Fakültesi Dergisi**, 21, 4, 759-779, (2006).
- [14] Özkaynak, F., Öksüztepe, E., Kaotik zaman serilerinin analizi, Bilimde Modern Yöntemler Sempozyumu, Dicle Üniversitesi, 1447-1459., Diyarbakır, (2010).
- [15] Baker, G., Gollub, F., **Chaotic dynamics an introduction**, Cambridge Press, 39-47, England, (1998).
- [16] Corana, A., Bortolan, G., Casaleggio, A., Most probable dimension value and most interval methods for automatic estimation of dimension from time series, **Chaos Solitons and Fractals**, 20, 4, 779-790, (2004).
- [17] Yonemoto, K., Yanagawa, T., **Estimating the lyapunov exponent from chaotic time series with dynamic noise**, MHF Preprint Series, 14-17, Kyushu University, Japan, (2004).
- [18] Yu, D., Lu, W., Harrison, R.G., Detecting dynamical nonstationarity in time series data, **Chaos**, 9, 4, 139-152, (1999).
- [19] Radhakrishnan, P., Lian, T.L., Sagar, B.S.D., Estimation of fractal dimension through morphological decomposition, **Chaos Solitons and Fractals**, 21, 3, 563-572, (2004).
- [20] Casaleggio, A., Corona, A., A posteriori tests to validate dimension estimates from time series, **Chaos Solitons and Fractals**, 11, 13, 2017-2030, (2000).
- [21] Ruelle, D., **Chance and chaos**, Princeton University Press, 173, (1991).
- [22] Özer, Ş., Zorlu, H., Doğrusal olmayan par sistemler kullanılarak kaotik zaman serisi kestirimi, **Gazi Üniversitesi Mühendislik Mimarlık Fakültesi Dergisi**, 27, 2, 323-331, (2012).