

*Araştırma Makalesi–Research Article*

## Bir Boyutlu Hücresel Dönüşümlerin Terslenebilirliği Reversibility of One-Dimensional Cellular Automata

Ferhat Şah<sup>1\*</sup>

*Geliş / Received: 04/03/2022*

*Revize / Revised: 26/04/2022*

*Kabul / Accepted: 26/04/2022*

### ÖZ

Bu makalede bir boyutlu sonlu lineer hücresel dönüşümler üzerinde çalışıyoruz. Sıfır Sınır Şartı altında yerel kurallar yardımıyla temsili matrisi elde ettik. Elde edilen bu matrislerin sonlu cisimler üzerinde hangi şartlar altında tersinin olup olmadığını veren bir algoritma tanımladık. Bu aynı zamanda bize hücresel dönüşüm ailesinin terslenebilirliği hakkında fikir veriyor. Son olarak hücresel dönüşümlerin bu ailelerine bazı örnekler veriyoruz.

*Anahtar Kelimeler- Hücresel Dönüşümler, Sıfır Sınır Şartı, Terslenebilirlik*

### ABSTRACT

In this paper, we study one dimensional finite linear cellular automata. We obtained the representative matrix with the help of local rules under the null boundary condition. We have defined an algorithm that gives whether these obtained matrices have an inverse on finite fields under what conditions. This also gives us an idea of the reversibility of the cellular automata family. Finally, we give some examples of these families of cellular automata.

*Keywords- Cellular Automata, Null Boundary Condition, Reversibility*

<sup>1\*</sup>Sorumlu yazar iletişim: [fsah@adiyaman.edu.tr](mailto:fsah@adiyaman.edu.tr) (<https://orcid.org/0000-0003-4847-9180>)  
İktisat Bölümü, İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi, Adıyaman Üniversitesi, Adıyaman, Türkiye

## I. GİRİŞ

Literatürde cellular automata ya da automata theory olarak adlandırılan hücresel dönüşümler (Kısaca CA) ilk olarak Stanislaw Marcin Ulam ve Macar asıllı Amerika vatandaşı matematikçi John von Neumann'ın karşılıklı çalışma ve tartışmaları sonucu ortaya çıkmıştır. Neumann (1966) [7], DNA'nın kendini kopyalamasından hareketle iki boyutlu 29-durumlu ve kendi adını taşıyan dört hücreli (merkez hücre ile beraber beş hücreli) özel komşuluğu (Neumann komşuluğu) kullanan özel bir hücresel dönüşümü bilim dünyasıyla tanıştırdı. Araştırmacılar kompleks bir yapının hareketlerini modellemek için CA'nın araştırılmasına ilgi gösterdiler. Hedlund (1969) [5], CA'nın bazı özel kurallarının kaotikliğini araştırdı. 106 kuralının topolojik olarak karışık olan ve pozitif topolojik entropiye sahip kaotik bir alt sistem tanımladığını buldu. Wolfram (1983) [9], polinomlar aracılığıyla bir boyutlu CA'yı cebirsel olarak araştırdı. Hücresel dönüşümlerin istatistiksel mekanikte kendiliğinden düzenini araştırmak için basit matematiksel modelleri kullandı. Das ve ark.(1993) [3] tarafından, matris cebirleri kullanılarak bir boyutlu CA karakterize edildi ve lineer CA'nın incelenmesi için yeni bir metot geliştirildi. CA'nın yapısı diğer çalışmalardan ayrı olarak polinom cebirleri yardımıyla incelendi. Ayrıca, makalede daha çok hybrid (melez) CA lar üzerine odaklanıldı. CA'nın temsili matrislerinin terslenebilirliği hakkında algoritmalar verildi.

Hücresel dönüşüm çalışırken en önemli problemlerden biri hücresel dönüşümün terslenebilir olup olmadığıdır. Hücresel dönüşümlerin terslenebilirliği konusu çok önemlidir. Çünkü CA terslenebilirse onun ilk formuna dönüş yapılabilir. Bu durumdan da birçok bilim dalı fayda sağlayabilir.

Hücresel dönüşümlerin terslenebilirliği üzerine birçok çalışma yapılmıştır. Çinkir ve ark., (2011) [2] bir boyutlu hücresel dönüşümlerin terslenebilirliğini, sonlu cisimler üzerinde ve periyodik sınır şartı altında incelediler. Yarı çap 2 olarak alındı. Global geçiş fonksiyonu yardımıyla elde edilen matrislerin terslerinin olup olmadığını belirlediler. Bu sayede eğer matris terslenebilirse hücresel dönüşümünde terslenebilir olduğu gösterildi. Del Rey ve ark. (2011) [4] tarafından yapılan çalışmada bir boyutlu hücresel dönüşümlerin terslenebilirliği  $Z_2$  cismi üzerinde gösterildi. Pentadiagonal bir matris formunun bir karakteristik matrisi tarafından tanımlanan hücresel dönüşümün terslenebilirliği determinant yardımıyla elde edildi. Chang ve ark., (2020) [1] tarafından intermediate sınır şartı altında bir boyutlu hücresel dönüşümün tersinin varlığı çeşitli algoritmalar elde edilerek gösterildi. Karakteristik matrisin yapısını gözlemleyerek sonlu cisim üzerinde lineer hücresel dönüşümlerin terslenebilirliği incelendi. Şiap ve ark., (2013) [8] yılında yayınladıkları çalışmada yarı çapı  $2r+1$  olarak bir boyutlu hücresel dönüşümün terslenebilirliğini incelediler. Bu çalışma periyodik sınır şartı altında yapıldı. Ayrıca devirli kodların üreteç matrisi ile hücresel dönüşümün kural matrisi arasında bir ilişki belirlendi. Böylece hücresel dönüşümlerin tersinirlik probleminin, cebirsel kodlama teorisi aracılığıyla belirlenebileceği gösterildi. Akın (2021) [13] de yaptığı çalışmada yarıçapı 4 olarak periyodik sınır şartı altında 9-devirli bir boyutlu hücresel dönüşümlerin terslenebilirliğini inceledi. Terslenebilirlik kriterlerini katsayılar ve kural matrisi yardımıyla belirledi.

Bu çalışmada bir boyutlu hücresel dönüşümün terslenebilirliğinin, sıfır sınır şartı altında ve özel bir yere 1 kural yardımıyla  $Z_p$  cismi üzerinde en genel halini vereceğiz. Hücresel dönüşümün terslenebilir olup olmadığını araştırmanın, onun karakteristik matrisinin terslenebilirliğinin araştırılması ile eşdeğer olduğu gösterilecektir.

## II. MATERYAL VE YÖNTEM

$Z_m = \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$  halkası verilsin.  $x = (x_n)_{n=-\infty}^{n=\infty}$  iki taraflı sonsuz bir dizi olsun. Bu şekildeki dizilerin uzayı  $Z_m^Z$  ile verilsin. Yarıçapı  $r$  olan  $f$  lokal kuralı  $f : Z_m^{2r+1} \rightarrow Z_m$  olmak üzere

$$f(x_{-r}, \dots, x_r) = \left( \sum_{i=-r}^{i=r} w_i x_i \right) \pmod{m} \quad (1)$$

Denklem (1) ile tanımlansın. Burada  $w_i \in Z_m$  dir. Bu  $f$  lokal kuralı ile üretilen  $F : Z_m^Z \rightarrow Z_m^Z$  ye toplamsal (additive) CA denir ve Denklem (2) 'deki gibi ifade edilir(Siap ve ark,2011) [11]:

$$Fx = (y_n)_{n=-\infty}^{n=\infty}, y_n = f(x_{n-r}, \dots, x_{n+r}) = \left( \sum_{i=-r}^{i=r} w_i x_{n+i} \right) \pmod{m} \quad (2)$$

$\mathbf{Z}_2$  cismi üzerinde tanımı verilen bir boyutlu CA yapısı, her hücrenin değeri 0 veya 1 olarak alınan hücre veya blokların örgüsü gibi düşünülebilir. Eğer  $r = 1$  alınırsa, bu halde hücrenin bir sonraki geçiş durumu kendisine ve diğer iki komşusuna bağlı olarak elde edilebilir. Hücreler sadece lokal komşuluğa bağlı belli kurallara göre ayrı zaman adımlarında evrilebilir.

Matematsel bakış açısıyla  $i$ . hücrenin bir sonraki geçiş durumu  $(i-1)$ .,  $i$ . ve  $(i+1)$ . hücrelerin o anki durumunun bir fonksiyonu olarak temsil edilebilir.  $f$  yerel kuralı ile üretilen bir CA

$$\wp_i(t+1) = f(\wp_i(t), \wp_{i+1}(t), \wp_{i-1}(t)) \quad (3)$$

Denklem (3) ile ifade edilir (Khan ve ark,1997) [10].

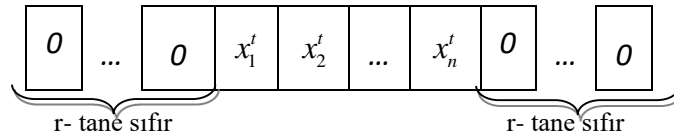
**Tanım 1**(Köroğlu,2012) [6] Bir hücresel dönüşümde her zaman adımı aynı türden geometrik şekillerin bir dizisinden oluşur. Bu dizilerin her birine o zaman adımındaki *konfigürasyon* denir.

**Tanım 2** (Köroğlu,2012) [6] Bir hücresel dönüşümde  $t$ -zaman adımındaki bir konfigürasyonu  $m \in \mathbb{N}$  olmak üzere  $t + m$ -zaman adımındaki başka bir konfigürasyona dönüştüren fonksiyona *global geçiş fonksiyonu* denir ve  $F = \langle f_1, f_2, \dots, f_n \rangle$  ile gösterilir. Burada  $n \in \mathbb{Z}^+$  başlangıç dizisindeki hücrelerin sayısı ve  $f_i, i = 1, 2, \dots, n$  ler de yerel geçiş fonksiyonlarıdır.

**Tanım 3** (Khan ve ark,1997) [10] Eğer sonlu 1D CA konfigürasyonunun bütün hücrelerine aynı kural uygulanırsa o zaman CA'ya tekdüze veya düzenli CA denir.

**Tanım 4** (Khan ve ark,1997) [10] Eğer sonlu bir 1D CA konfigürasyonunun farklı hücrelerine farklı kurallar uygulanırsa bu CA' ya hybrid (melez) CA denir.

**Tanım 5** (Köroğlu,2012) [16]  $r < n$  komşuluk yarıçapı olmak üzere  $N^t = [x_1^t, x_2^t, \dots, x_n^t]$ ,  $t$ -zaman adımındaki konfigürasyon olsun. Eğer her  $t$ -zaman adımındaki dizinin sol baştaki teriminin soluna  $r$  tane sıfır ve sağ baştaki teriminin yanına da  $r$  tane sıfır eklenerek sırasıyla sol ve sağ baştaki hücrelerin sola doğru ve sağa doğru komşulukları belirleniyorsa bu sınır şartına sıfır sınır şartı (null boundary condition) denir ve Şekil (1)'deki gibi gösterilir.



Şekil 1. Sıfır Sınır Şartı

### III. BULGULAR

$N^t = [x_1^t, x_2^t, \dots, x_n^t]$   $t$ . zamandaki bir boyutlu hücresel dönüşümlerin bir konfigürasyonu olsun.  $N^0$  başlangıç konfigürasyonu olsun. Bir boyutlu hücresel dönüşümler için çeşitli komşuluklar vardır. Bu çalışmada uygulama alanı en fazla olan en yakın komşuluk modeli kullanıldı. Bir boyutlu hücresel dönüşümlerin temsili matrislerini elde ederken bu çalışmada yarıçap 1 olarak alındı.  $p \geq 2$  asal sayılar olmak üzere toplama ve çarpma işlemi altında iyi tanımlı aşağıdaki lokal kural Denklem (4)'deki gibi tanımlandı.

$$x_i^{t+1} = \begin{cases} w_2 x_1^t + w_3 x_2^t \pmod{p}, & i = 1 \\ w_1 x_{i-1}^t + w_2 x_i^t + w_3 x_{i+1}^t \pmod{p}, & 2 \leq i \leq n-1 \\ w_1 x_{n-1}^t + w_2 x_n^t \pmod{p}, & i = n \end{cases} \quad (4)$$

$w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$  ve  $x_i$ ,  $i$ . hücrenin  $t$  zamandaki durumunu gösterir. Şimdi sıfır sınır şartı altında 1D CA' yı Denklem (5)'deki gibi tanımlayalım.

$$0[x_1^t, x_2^t, \dots, x_n^t]0 \rightarrow 0[x_1^{t+1}, x_2^{t+1}, \dots, x_n^{t+1}]0 \quad (5)$$

Burada  $x_i^t \in \mathbf{Z}_p$  dir. Bu çalışmada hücrel dönüşümler sıfır sınır şartı altında tanımladığımız lokal kurallar yardımıyla karakterize edildi. Bir boyutlu hücrel dönüşümlerin terslenebilir olup olmadığını araştırmak için, karakteristik matrislerden yararlandı. Bir boyutlu hücrel dönüşümlere sıfır sınır şartı altında karşılı gelen  $T_n$  karakteristik matrisi yukarıdaki Denklem (4)'den faydalanılarak aşağıdaki gibi bulunur:

$$T_n = \begin{pmatrix} w_2 & w_3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ w_1 & w_2 & w_3 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_1 & w_2 & w_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_1 & w_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & w_2 & w_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & w_1 & w_2 & w_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & w_1 & w_2 \end{pmatrix}_{n \times n} \quad (6)$$

Burada Denklem (4)'den faydalanılarak  $N^t$  konfigürasyonu ve  $T_n$  karakteristik matrisi arasındaki ilişki aşağıdaki gibi Denklem (7) ile ifade edilebilir:

$$(N^{t+1})^T = T_n (N^t)^T \quad \text{mod } p \quad (7)$$

Eğer  $T_n$  matrisinin tersi varsa;

$$(N^t)^T = T_n^{-1} (N^{t+1})^T \quad \text{mod } p \quad (8)$$

Denklem (8) ile ifade edilir. Bu yüzden, bu çalışmanın temel amacı  $T_n$  matrisinin hangi durumlarda tersinin olup olmadığını incelemektir. Denklem (5)'deki gibi bir boyutlu sonlu hücrel dönüşümlerin ancak ve ancak onun karakteristik matrisi olan  $T_n$  'nin tersi mevcutsa terslenebilir olduğu bilinmektedir. Eğer  $T_n$  'nin rankı tam ise  $T_n$  karakteristik matrisi terslenebilirdir. Bununla birlikte  $T_n$  terslenebilirse, Denklem (5)'deki dönüşüm yani bir boyutlu sonlu hücrel dönüşüm de terslenebilirdir. Aksi durumda Denklem (5)'deki dönüşüm terslenemez bir dönüşümdür.

Karakteristik matris (kural matrisi) için bir örnek verelim. Kabul edelim ki  $n = 5$  olsun. Bu takdirde 5. Meriteden  $T_5$  karakteristik matrisi elde edilir. Aşağıdaki gibi sıfır sınır şartı altında  $1 \times 5$  boyutunda bir konfigürasyonu ele alalım.

$$0[x_1^t \ x_2^t \ x_3^t \ x_4^t \ x_5^t]0$$

Yukarıdaki konfigürasyon bilgi matrisi olarak da bilinir ve aşağıdaki şekilde gösterilir:

$$[X]_{1 \times 5}^t = [x_1^t \ x_2^t \ x_3^t \ x_4^t \ x_5^t].$$

Yukarıda verilen vektörün bütün hücrelerine lokal kural uygulanırsa,  $[X]_{1 \times 5}^{t+1}$  yeni bir bilgi matrisi elde edilir. Bu bilgi matrisinin girişleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}w_2x_1^t + w_3x_2^t &\rightarrow x_1^{t+1} \\w_1x_1^t + w_2x_2^t + w_3x_3^t &\rightarrow x_2^{t+1} \\w_1x_2^t + w_2x_3^t + w_3x_4^t &\rightarrow x_3^{t+1} \\w_1x_3^t + w_2x_4^t + w_3x_5^t &\rightarrow x_4^{t+1} \\w_1x_4^t + w_2x_5^t &\rightarrow x_5^{t+1}\end{aligned}$$

Böylece 5. Mertebeden  $T_5$  karakteristik matrisi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$T_5 = \begin{pmatrix} w_2 & w_3 & 0 & 0 & 0 \\ w_1 & w_2 & w_3 & 0 & 0 \\ 0 & w_1 & w_2 & w_3 & 0 \\ 0 & 0 & w_1 & w_2 & w_3 \\ 0 & 0 & 0 & w_1 & w_2 \end{pmatrix}_{5 \times 5}$$

#### A. Sıfır Sınır Şartı Altında Bir Boyutlu Hücresel Dönüşümlerin Terslenebilirliği

Hücresel dönüşümlerdeki temel problemlerden biri de terslenebilirliktir. Eğer hücresel dönüşüm terslenebilirse, hücresel dönüşümün başlangıçtaki yapısı belirlenebilir. Doğrusal olmayan durumlarda hücresel dönüşümlerin terslenebilirliği çok zor bir problem olarak karşımıza çıkar. Bununla birlikte sonlu lineer hücresel dönüşümler bir matris ile temsil edilebildiğinden dolayı, çeşitli sınır şartları altında tersleri incelenebilir. Böylece cebirsel özellikler kullanılarak sonlu cisimler üzerinde terslenebilirlik problemi çalışılabilir.

Bir boyutlu lineer hücresel dönüşümleri sıfır sınır şartı altında karakterize etmek için,  $\mathbf{Z}_p$  cismi üzerinde matris cebirlerini kullanarak, hücresel dönüşümün hangi şartlarda terslenebilir olup olmadığını belirleyen algoritmayı aşağıdaki Teorem 1 yardımı ile verelim.

Denklem (6)'daki matrisin rankını hesaplamak için matris elementer satır ve sütun işlemleri uygulayarak Denklem (9)'daki gibi yeni matris elde edilir:

$$T_n = \begin{pmatrix} w_3^{-1}w_2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ w_3^{-1}w_1 & w_3^{-1}w_2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_3^{-1}w_1 & w_3^{-1}w_2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_3^{-1}w_1 & w_3^{-1}w_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & w_3^{-1}w_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & w_3^{-1}w_1 & w_3^{-1}w_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & w_1 & w_2 \end{pmatrix}_{n \times n} \quad (9)$$

**Teorem 1:**  $n \geq 2$  için, Denklem (6)'daki gibi tanımlanan karakteristik(kural) matrisi ele alalım.  $l_{2n-3}$  aşağıdaki rekürans denklemini sağlarsa;  $l_{-1} = w_2, l_0 = w_1$  ve

$$\begin{aligned}l_{2n-4} &= -w_3^{-1}w_1l_{2n-7}, \quad n \geq 3 \\ l_{2n-3} &= -w_3^{-1}w_2l_{2n-5} + l_{2n-4}, \quad n \geq 2\end{aligned}$$

$T_n$  matrisinin rankı  $(n-1) + \text{rank}(l_{2n-3})$ 'e eşittir.

**İspat:**  $n \geq 2$  üzerinden tümevarımla ispatı yapalım.  $n = 2$  için  $T_2 = \begin{pmatrix} w_2 & w_3 \\ w_1 & w_2 \end{pmatrix}$  matrisine sahip oluruz. Matrise elementer satır işlemleri uygulayarak yeni bir matris elde ederiz.

$$T_2 = \begin{pmatrix} w_3^{-1}w_2 & 1 \\ -w_3^{-1}w_2^2 + w_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$T_2$  matrisinin rankı,  $l_1 = -w_3^{-1}w_2l_{-1} + l_0$  'ın rankına bağlıdır.

$n = 3$  için  $T_3 = \begin{pmatrix} w_2 & w_3 & 0 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ 0 & w_1 & w_2 \end{pmatrix}$  matrisine sahip oluruz. Matrise elementer satır işlemleri uygulayarak yeni

bir matris elde ederiz.

$$T_3 = \begin{pmatrix} w_3^{-1}w_2 & 1 & 0 \\ w_3^{-1}w_1 & w_3^{-1}w_2 & 1 \\ -w_3^{-1}w_2l_1 + l_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$T_3$  matrisinin rankı,  $l_3 = -w_3^{-1}w_2l_1 + l_2$  'nin rankına bağlıdır. Yani , rank  $T_3 = 2 + \text{rank } l_3$  'e eşittir.

$n = 4$  için  $T_4 = \begin{pmatrix} w_2 & w_3 & 0 & 0 \\ w_1 & w_2 & w_3 & 0 \\ 0 & w_1 & w_2 & w_3 \\ 0 & 0 & w_1 & w_2 \end{pmatrix}$  matrisi elde edilir. Benzer elementer satır işlemleri uygulanırsa

aşağıdaki matrisi elde ederiz.

$$T_4 = \begin{pmatrix} w_3^{-1}w_2 & 1 & 0 & 0 \\ w_3^{-1}w_1 & w_3^{-1}w_2 & 1 & 0 \\ 0 & w_3^{-1}w_1 & w_3^{-1}w_2 & 1 \\ -w_3^{-1}w_2l_3 + l_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$T_4$  matrisinin rankı,  $l_5 = -w_3^{-1}w_2l_3 + l_4$  'nin rankına bağlıdır. Benzer şekilde devam edersek  $T_n$  'in  $(n-1)$ . satırı  $(0, 0, \dots, w_3^{-1}w_1, w_3^{-1}w_2, 1)$  dir. Tümevarımsal olarak  $(n-2)$ . satırı  $-(l_1)$  ile çarpıp son satıra eklersek son satır  $(0, 0, \dots, l_4, l_3, 0, 0)$  olur. Yeni elde ettiğimiz matrisin 2. satırını  $-(l_{2n-7})$  çarpıp son satıra eklersek son satır  $(l_{2n-4}, l_{2n-5}, \dots, 0, 0, 0, 0)$  olarak elde edilir. Son olarak yeni matrisin 1. satırını  $-(l_{2n-5})$  çarpıp son satıra eklersek son satır  $(l_{2n-3}, 0, \dots, 0, 0, 0, 0)$  olur. Son elde ettiğimiz matris ise aşağıda verilen Denklem (10)'daki gibidir:

$$T'_n = \begin{pmatrix} w_3^{-1}w_2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ w_3^{-1}w_1 & w_3^{-1}w_2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_3^{-1}w_1 & w_3^{-1}w_2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_3^{-1}w_1 & w_3^{-1}w_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & w_3^{-1}w_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & w_3^{-1}w_1 & w_3^{-1}w_2 & 1 \\ l_{2n-3} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{n \times n} \quad (10)$$

$$\text{rank } T_n = \text{rank } T'_n = \text{rank}(l_{2n-3}) + (n-1) \quad (11)$$

Denklem (11) elde edilirken [12] numaralı kaynaktan yararlanılmıştır.

**Örnek:**  $n=16, p=3$  alalım. Denklem (6)'daki matris de  $w_1 = 1, w_2 = 2, w_3 = 2$  alınırsa aşağıdaki  $T_{16}$  matrisi elde edilir.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{16 \times 16}$$

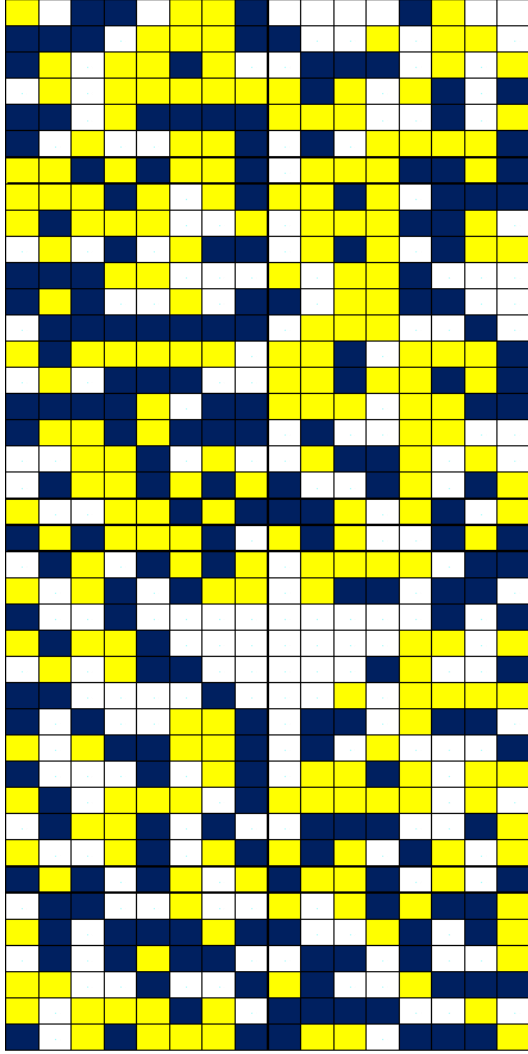
Teorem 1'deki rekürans denklemden kolayca matrisin rankı hesaplanabilir.

$$l_{2n-3} = -w_3^{-1} w_2 l_{2n-5} + l_{2n-4} ,$$

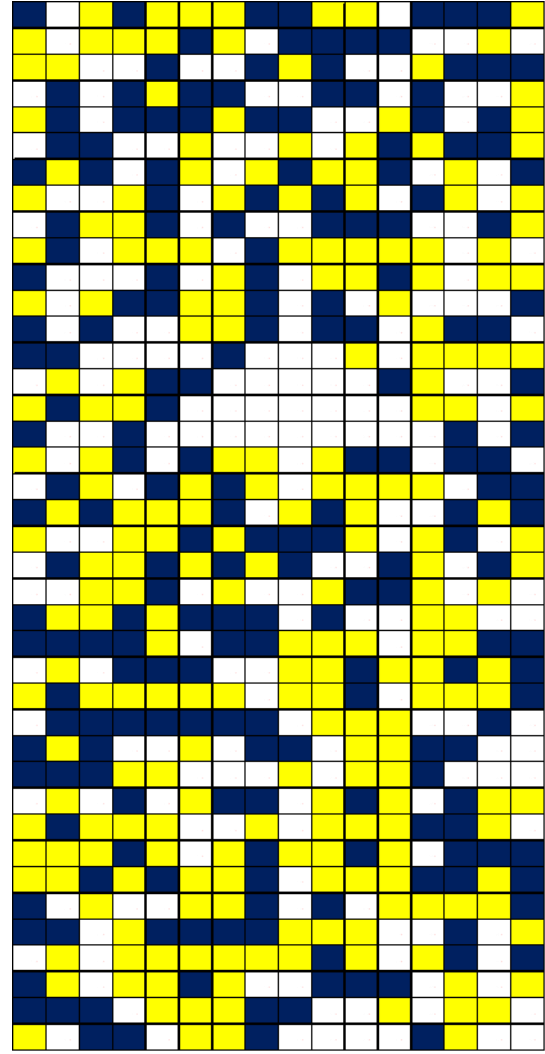
$$l_{29} = -w_3^{-1} w_2 l_{27} + l_{28} = -2^{-1} \cdot 2 \cdot 0 + 1 = 1$$

Bu takdirde  $T_{16}$  'nın rankı Denklem (11)'den  $(n-1) + \text{rank}(l_{2n-3}) = 15 + 1 = 16$  olarak elde edilir. Bu durumda matrisin rankı full olduğu için matrisin terslenebilir olduğunu bize verir. Böylece karakteristik matrisimize karşılık gelen hücrel dönüşümümüzde terslenebilirdir.

Şekil 2(a) ve Şekil 2(b) 'de rastgele bir başlangıç konfigürasyonu olarak, bir boyutlu hücrel dönüşümlerin durum-geçiş diyagramı ve onun tersi gösterilmiştir.  $T_{16}$  kural matrisi yardımıyla bütün konfigürasyonlar hesaplanmıştır. Böylece bir boyutlu hücrel dönüşümün geriye yönelik evrimi elde edilebilir. Başlangıç konfigürasyonu  $N^0 = (1022011200002100)$  olarak alalım.  $p = 3$  ve  $w_1 = 1, w_2 = 2, w_3 = 2$  olsun. Burada mavi renkleri temsil için 2, sarı renkleri temsil için 1 ve beyaz renkleri temsil için 0 kullanılmıştır. Şekil 2(a)'daki görüntüye durum geçiş diyagramı, Şekil 2(b)'deki görüntüye ise durum geçiş diyagramının ters görüntüsü denir.



Şekil 2(a). Durum-Geçiş Diyagramı



Şekil 2(b). Durum-Geçiş Diyagramı'nın Tersi

#### IV. SONUÇLAR

Hücrel dönüşümler üzerinde çalışmalar son yıllarda artış göstermiştir. Çalışmada bir boyutlu hücrel dönüşümler ele alındı. Daha önceki çalışmalarda, farklı sınır şartları altında bir boyutlu hücrel dönüşümler incelenildi. Fakat bu çalışmalar genellikle  $Z_2$  ve  $Z_3$  cisimleri üzerinde yapılmıştır. Çalışma,  $Z_p$  cismi üzerinde en genel halde yapıldı. Bir boyutlu hücrel dönüşümlerin yapısı sıfır sınır şartı altında çalışıldı.

Hücrel dönüşümlerde terslenebilirlik kavramı çok önemlidir. Bununla ilgili  $Z_2$  ve  $Z_3$  cisimleri üzerinde birçok çalışma yapılmıştır ama bu çalışmada  $Z_p$  cismi üzerinde terslenebilirlik incelenildi. Terslenebilirliğin hangi şartlar altında mevcut olup olmayacağını gösteren çok önemli bir algoritma verildi. Bu algoritma sayesinde birçok konu hakkında fikir sahibi olunabilir. (Kanserli Hücreler, Trafik Işıkları vb.) İleriki çalışmalarda bu algoritma sayesinde yukarıda bahsettiğimiz alanlarla ilgili uygulamalar yapılabilir.

Çalışmanın son kısmında elde edilen algoritma ile ilgili uygulama yapıldı. Çok yüksek mertebeli matrislerin ranklarını kolayca hesaplandı. Bu durumdan faydalanarak hücrel dönüşümlerin terslenebilirlikleri hakkında kolayca fikir sahibi olundu. Son olarak keyfi bir başlangıç değeri olarak, tersi bulunan matrisin de yardımıyla lokal kuralları tanımlayıp bir boyutlu hücrel dönüşümün Durum-Geçiş Diyagramını ve onun tersini gösteren şekiller elde edildi. (Şekil 2(a) ve Şekil 2(b) lokal kurallar yardımıyla, kurallar tek tek elde edilip Mapple



programında kodlaması yapılarak elde edilmiştir.) İleriki zamanlarda hücresele dönüşümlerin şifrelemeye veya kodlamaya olan uygulamalarına bakılabilir. Bu uygulamaların günlük hayata olan katkısının üzerine farklı çalışmalar yapılabilir.

### TEŞEKKÜR

Makalenin kalitesini ve okunabilirliğini önemli ölçüde arttıran, hakemlerin değerli ve yapıcı yorumları için teşekkürlerimi sunarım.

### KAYNAKLAR

- [1] Chang, C.C. & Yang Y. C., (2020). Characterization of reversible intermediate boundary cellular automata. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 1, 1-13
- [2] Cinkir, Z., Akın, H. & Siap, İ., (2011). Reversibility of 1D cellular automata with periodic boundary over finite fields  $Z_p$ . *Journal of Statistical Physics*, 143 (4), 807-823,
- [3] Das, A.K. & Chaudhuri, P. P. (1993). Vector space theoretic analysis of additive cellular automata and its applications for pseudo exhaustive test pattern generation. *IEEE Trans. on Computers* 42 (3), 340-35
- [4] Del Rey, A. M. & Rodriguez S., G. (2011). Reversibility of linear cellular automata, *Applied Mathematics and Computation*, 217 (21), 8360-8366
- [5] Hedlund, G.A. (1969). Endomorphisms and automorphisms of full shift dynamical system. *Mathematical System Theory*, 3, 320-375
- [6] Koroğlu, M.E. (2012). Hücresele Dönüşümlerle Hata Düzeltken Kodlar. Doktora Tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, 107.
- [7] Neumann, V. (1966). The theory of self-reproducing automata, *Univ. of Illinois Press*, Urbana
- [8] Siap, İ, Akın, H. & Koroglu, M.E. (2013). The reversibility of  $(2r + 1)$ -cyclic rule cellular automata. *TWMS J. App. & Eng. Math*, 2, 215-225
- [9] Wolfram, S., (1983). Statistical mechanics of cellular automata, *Rev. Mod. Phys.* 55 (3), 601-644
- [10] Khan, A.R. Choudhury, P.P. Dihidar, K. Mitra, S. & Sarkar, P. (1997). VLSI architecture of a cellular automata machine, *Computers and Mathematics with Applications*, 33, (5) 79-94.
- [11] Siap, İ, Akın, H. & F. Sah, (2011). Characterization of two dimensional cellular automata over ternary fields, *Journal Of The Franklin Institute*. 348 (2011), 1258-1275
- [12] Başar, F, (2002). Lineer Cebir. Uğurel Matbaası, Malatya, 468.
- [13] Akın, H. (2021). Description of Reversibility of 9-Cyclic 1D Finite Linear Cellular Automata with Periodic Boundary Conditions, *Journal of Cellular Automata*, 16, 127-151