Anadolu Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi B- Teorik Bilimler
Anadolu University Journal of Science and Technology B- Theoretical Sciences
2016 - Cilt: 4 Sayı: 2
Sayfa: 91 - 98
DOI: 10.20290/btdb.53177
Geliş: 15 Şubat 2016 Düzeltme: 31 Mart 2016 Kabul: 23 Mayıs 2016

ANADOLU ÜNİVERSİTESİ

SIERPINSKI ÇİZGELERİN OYUN KROMATİK VE OYUN RENK SAYILARI

Ummahan AKCAN [1], Emrah AKYAR [1,*], Handan AKYAR [1]

[1] Matematik Bölümü, Fen Fakültesi, Anadolu Üniversitesi, Eskişehir, Türkiye

ÖZET

Bu çalışmada, $n \geq 1$ ve $k \geq 2$ iken $S(n,k)$ Sierpinski çizgelerinin oyun renk sayısı ve özel olarak $k = 3$ için $S(n,k)$ Sierpinski çizgelerinin oyun kromatik sayısı hesaplanmıştır. Ayrıca Sierpinski çizgeler ile ilgili bazı açık problemlerden de bahsedilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Sierpinski çizge, Oyun kromatik sayısı, Oyun renk sayısı

GAME CHROMATIC NUMBER AND GAME COLORING NUMBER OF SIERPINSKI GRAPHS

ABSTRACT

In this study, we find exact values for the game coloring number of the Sierpinski graphs $S(n,k)$ for $n \geq 1$ and $k \geq 2$. Furthermore, game chromatic number of the Sierpinski graphs $S(n,k)$ for $k = 3$ is determined. Moreover, we present certain open problems on Sierpinski graphs.

Keywords: : Sierpinski graph, Game chromatic number, Game coloring number

1. GİRİŞ

Çizgelerde boyama ilk olarak dört renk problemi ile başlamıştır. Brams dört renk problemini ispatlamak için haritalarda boyama oyunu (map coloring game) kavramını tanımlamıştır. Brams'ın tanımladığı bu oyun Gardner'ın Mathematical Games adlı makalesinde verilmiştir [4]. Bir çizgenin oyun kromatik sayısı ise (game chromatic number) ilk olarak Bodlaender tarafından iki kişilik sonlu bir oyun yardımıyla tanımlanmıştır [1]. G sonlu bir çizge ve X'de renkler kümesi olsun. Genellikle Alice ve Bob olarak adlandırılan iki oyuncu, ilk olarak Alice başlamak üzere sırasıyla X kümesinden seçtikleri renklerle komşu köşe noktalar farklı renklerde olacak şekilde çizgenin köşe noktalarını boyasınlar. Eğer X kümesindeki renklerle çizgenin tüm köşe noktaları bu şekilde boyanabilirse Alice oyunu kazansın. Eğer oyunun herhangi bir aşamasında X kümesindeki tüm renklerle boyanan noktalara komşu olan ve boyanmamış bir nokta kalıyorsa oyunu Bob kazansın. Oyuncular optimal stratejileri ile oynadıklarında oyunu kimin kazanacağı elbette çizgenin yapısına ve X kümesindeki renklerin sayısına bağlıdır. V, bir G çizgesinin köşe noktalarının kümesi olmak üzere eğer $|X| \geq |V|$ ise Alice'in her zaman oyunu kazanacak bir stratejisi vardır. Diğer taraftan X kümesindeki renkler yeterli sayıda değilse örneğin, $\chi(G)$ bir G çizgesinin kromatik renk sayısını göstermek üzere $|X| < \chi(G)$ ise Bob'un her zaman oyunu kazanacak bir stratejisi vardır. Bir çizgenin oyun kromatik sayısı Alice'in her zaman kazanabileceği bir stratejinin olduğu X kümesindeki minimum renk sayısı şeklinde tanımlanır ve bir G çizgesinin oyun kromatik sayısı χ_g ile gösterilir. Verilen tanımlardan doğal olarak

$$\chi(G) \leq \chi_g(G) \leq \Delta(G) + 1$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $\Delta(G), G$ çizgesindeki maksimum dereceyi göstermektedir.

* Sorumlu Yazar: eakyar@anadolu.edu.tr

Bir çizgenin oyun kromatik sayısını üstten sınırlamak için bazı kavramlar tanımlanmıştır. Zhu tarafından tanıtılan işaretleme oyunu (marking game), yukarıda bahsettiğimize benzer iki kişilik bir oyundur [18]. Bu oyunda yine Alice oyuna ilk başlayandır ve oyuncular sırayla oynamaktadırlar. Ancak burada noktaları boyamak yerine sırasıyla işaretlemektedirler. Herhangi bir k pozitif tamsayısı için, eğer oyunun herhangi bir aşamasında işaretlenmemiş bir noktanın kendinden önce k tane işaretlenmiş noktası varsa oyunu Bob kazanır. Aksi halde, yani oyun süresince her noktanın kendinden önce işaretlenmiş noktalarının sayısı en fazla $k-1$ ise oyunu Alice kazanır. Bir çizgenin oyun renk sayısı (game coloring number), Alice'in her zaman kazanabileceği bir stratejinin var olduğu en küçük k sayısına eşittir. Bir çizgenin oyun renk sayısı $\mathrm{col_g}$ ile gösterilir ve açıktır ki herhangi bir G çizgesi için

$$\chi_g(G) \leq \mathrm{col_g}(G) \tag{1}$$

olur.

Literatürde çeşitli çizgelerin oyun kromatik ve oyun renk sayıları ile ilgili çok sayıda çalışma bulunmaktadır. Bir $\mathcal{H}$ çizge ailesinin oyun kromatik ve oyun renk sayıları ise sırasıyla

$$\chi_g(\mathcal{H}) = \max\{\chi_g(G): G \in \mathcal{H}\}$$

ve

$$\mathrm{col_g}(\mathcal{H}) = \max\{\mathrm{col_g}(G): G \in \mathcal{H}\}$$

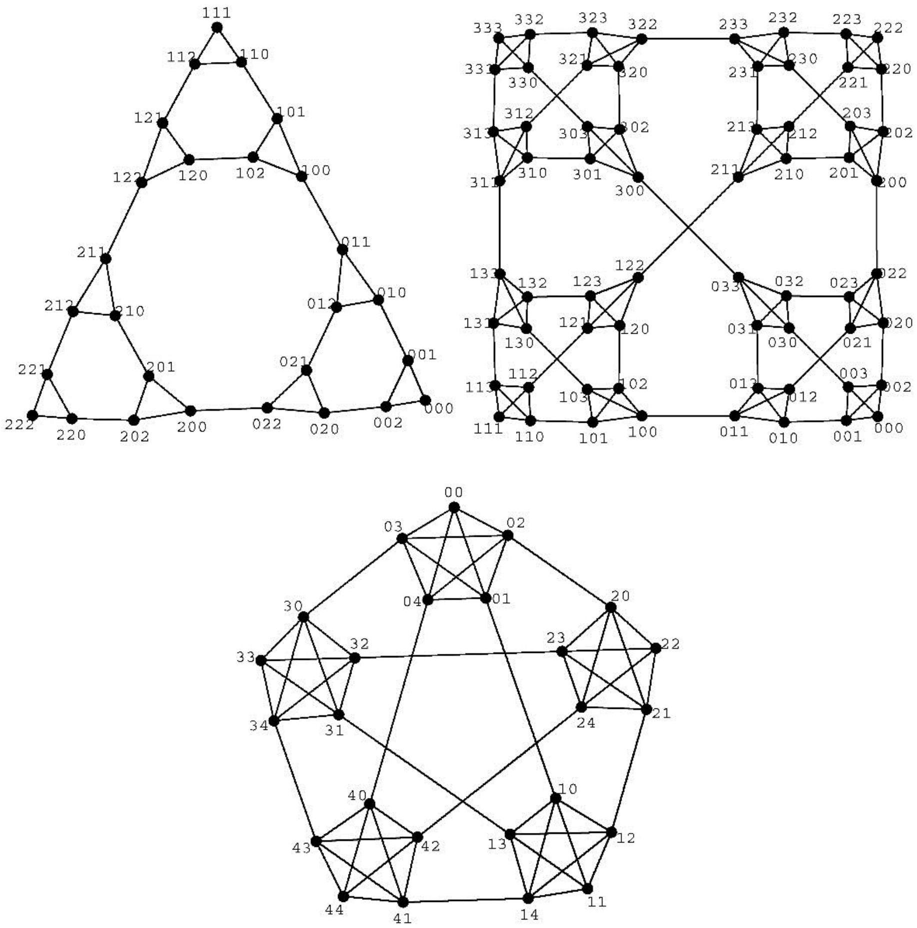
şeklinde tanımlanır. Buna göre $\mathcal{F}$ ağaçların, $\mathcal{C}$ kaktüslerin, $\mathcal{OP}$ dış düzlemsel (outer planar) çizgelerin, $\mathcal{P}$ düzlemsel çizgelerin, $\mathcal{TG}$ toroidal grid çizgelerin ailesi olmak üzere $\chi_g(\mathcal{F}) = \mathrm{col_g}(\mathcal{F}) = 4$, $\chi_g(\mathcal{C}) = \mathrm{col_g}(\mathcal{C}) = 5$, $6 \leq \chi_g(\mathcal{OP}) \leq 7$, $\mathrm{col_g}(\mathcal{OP}) = 7$, $8 \leq \chi_g(\mathcal{P}) \leq 17$ ve $11 \leq \mathrm{col_g}(\mathcal{P}) \leq 17$, $\chi_g(\mathcal{TG}) = \mathrm{col_g}(\mathcal{TG}) = 5$ sonuçları elde edilmiştir [2,3,5,8-10,15-19].

Şimdi $n \geq 1$ ve $k \geq 1$ olmak üzere $S(n,k)$ Sierpinski çizgesinin tanımını verelim. Bir $S(n,k)$ Sierpinski çizgesinin noktalarının kümesi $\{0,1,\dots,k-1\}$ tamsayılarının tüm mümkün n'li bileşenlerinden oluşur. Yani $V(S(n,k)) = \{0,1,\dots,k-1\}^n$ şeklinde oluşturulur ve farklı $u = (u_1,u_2,\dots,u_n)$ ve $v = (v_1,v_2,\dots,v_n)$ $köşe$ noktaları için aşağıdaki koşulları sağlayan bir $h \in \{1,2,\dots,n\}$ sayısı varsa u ve v köşe noktaları arasında bir kenar vardır.

i. $t = 1,2,\dots,h-1$ için $u_t = v_t$,
ii. $u_h \neq v_h$,
iii. $t = h+1,\dots,n$ için $u_t = v_h$ ve $v_t = u_h$.

Bu tanıma göre $S(3,3)$, $S(3,4)$ ve $S(2,5)$ Sierpinski çizgelerinin ek olarak sunulan Maple 2015 yazılımı yardımıyla elde edilen çizimleri Şekil 1'de verilmiştir.

Sierpinski çizgelerin önemli birçok özelliği vardır ve bunlardan en önemlisi $S(n,3)$ çizgesi ile H_n Hanoi çizgelerinin izomorf olmasıdır [11]. Literatürde yapılan çalışmalarda Sierpinski çizgelerin bazı metrik özellikleri çalışılmış ve kromatik sayısı $\chi(S(n,k)) = k$, kromatik indeksi $\chi'(S(n,k)) = k$ ve k tek sayı iken total kromatik sayısı $\chi''(S(n,k)) = k+1$ olarak elde edilmiştir [7, 13]. Daha sonra bu sonuç geliştirilerek $n \geq 2$ için $\chi''(S(n,k)) = k+1$ olduğu gösterilmiştir [6]. Ayrıca $S(n,3)$ çizgesinin acyclic kromatik indeksi $\chi'_a(S(n,3)) = 3$ olduğu, tek bir Hamilton döngüsü içerdiği ve tek bir şekilde 3-kenar boyanabildiği kanıtlanmıştır [12, 14]. Bunun yanında çizgelerde boyama konusunda $S(n,k)$ Sierpinski çizgeleri ile ilgili henüz kanıtlanamamış birçok problem de mevcuttur. Örneğin, $S(n,k)$ Sierpinski çizgelerin oyun kromatik indeks sayısı (game chromatic index), oyun kromatik sayısı, liste kromatik sayısı (list chromatic number), bağlılık kromatik sayısı (incidence chromatic number), bağlılık oyun kromatik sayısı (incidence game chromatic number) henüz çalışılmamış konulardandır.



Şekil 1. $S(3{,}3)$, $S(3{,}4)$ ve $S(2{,}5)$ Sierpinski çizgeleri

Bu çalışmada ise Sierpinski çizgesinin oyun kromatik sayısı ve oyun renk sayısı hesaplanmıştır.

2. SIERPINSKI ÇİZGELERİN OYUN RENK VE OYUN KROMATİK SAYILARI

Önce $n \geq 1$ ve $k \geq 2$ için $S(n,k)$ Sierpinski çizgesinin oyun renk sayısını veren aşağıdaki sonucu verelim.

Teorem 2.1 $n \geq 1$ ve $k \geq 2$ olmak üzere

$$\mathrm{col}_g(S(n,k)) = \begin{cases} k & , \quad n = 1 \text{ ise} \\ k+1 & , \quad n \geq 2 \text{ ise} \end{cases}$$

olur.

Kanıt. Eğer $n = 1$ ise $S(1,k) \cong K_k$ ve $\mathrm{col}_g(K_k) = k$ olduğundan kanıt açıktır. Burada K_k, k köşe noktalı tam çizgeyi göstermektedir.

Eğer $n \geq 2$ ise $S(n,k)$ Sierpinski çizgesinin verilen tanımından dolayı k tane derecesi $k-1$ olan ve $k(k^{n-1}-1)$ tane de derecesi k olan köşe noktası vardır. Alice nasıl bir seçim yaparsa yapsın, Bob en fazla k hamle yaparak (her bir hamlesinde derecesi $k-1$ olan noktaları seçerek) en son seçilen noktanın derecesinin k olmasını sağlar ve bundan dolayı $n \geq 2$ iken $\mathrm{col}_g\big(S(n,k)\big) = k+1$ elde edilir.

Özel olarak her n pozitif tamsayısı için $k = 1$ ise $S(n,k)$ Sierpinski çizgesi tek köşe noktasından oluşacağından $\mathrm{col}_g\big(S(n,k)\big) = 1$ olacağı açıktır.

Aşağıdaki teorem pozitif n tamsayısı için $S(n,3)$ Sierpinski çizgelerinin oyun kromatik sayısının değerini vermektedir.

Teorem 2.2 $n \geq 1$ olmak üzere

$$\chi_g\big(S(n,3)\big) = \begin{cases} 3 & , \quad n = 1 \text{ ise} \\ 4 & , \quad n \geq 2 \text{ ise} \end{cases}$$

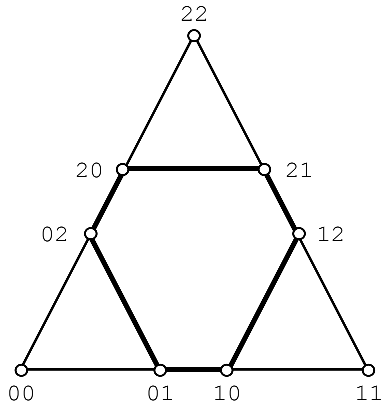
olur.

Kanıt. Eğer $n = 1$ ise $S(1,3) \cong K_3$ olduğundan $\chi_g(K_3) = 3$ elde edilir. Diğer taraftan $n \geq 2$ iken (1) eşitsizliğinden ve Teorem 2.1 den

$$\chi_g(S(n,3)) \leq 4 \tag{2}$$

olur.

Şimdi de $n = 2$ iken $S(n,3)$ Sierpinski çizgesinin oyun kromatik sayısının 4 olduğunu gösterelim. Eğer Bob'a 3 renk ile bir kazanma stratejisi verilirse $S(2,3)$ Sierpinski çizgesinin oyun kromatik sayısının alttan da 4 ile sınırlı olduğu elde edilir. Böylece (2) eşitsizliği yardımıyla istenen sonuç elde edilmiş olur.



Şekil 2. $S(2,3)$ Sierpinski çizgesi ve bu çizgenin C_6 alt çizgesi

Alice'in ilk hamlesi için iki durum söz konusudur:

1. Durum: Alice ilk hamlesinde C_6 alt çizgesi üzerinde (bkz. Şekil 2) herhangi bir köşe noktasını 1. renk ile boyasın. Burada C_6 çizgesi ile uzunluğu 6 birim olan döngü çizge ifade edilmektedir. Genelliği bozmaksızın Alice'in ilk hamlesinde `01` köşe noktasını boyadığını kabul edelim. Bu durumda Bob, Alice'in boyadığı köşe noktasından 2 birim uzaklıkta ve C_6 alt çizgesi üzerindeki bir köşe noktasını 2. renk ile boyar. Yine genelliği bozmaksızın Bob'un `12` köşe noktasını 2. renk ile boyadığını kabul edelim. Bu durumda `10` noktasının komşu iki noktası iki farklı renk ile boyandığından `10` noktası bir kritik nokta olur. Artık Alice ikinci hamlesinde ya bu kritik `10` noktasını ya da onun boyanmamış komşusu olan `11` noktasını boyamak zorundadır. Alice bu köşe noktalarından hangisini boyarsa boyasın Bob, ikinci hamlesinde ilk boyadığı köşe noktasından iki birim uzaklıkta ve C_6 alt çizgesi üzerindeki bir noktayı örneğin `20` köşe noktasını 3. renk ile boyar. Bu durumda `02` ve `21` köşe noktalarının komşu iki noktası iki farklı renk ile boyandığından bu köşe noktaları kritik noktalar olur. Alice aynı anda bu iki kritik noktayı savunamayacağı için Bob, 3 renk ile oyunu kazanır ve böylece

$$4 \leq \chi_g(S(2,3))$$

elde edilir.

2. Durum: Alice ilk hamlesinde C_6 alt çizgesi üzerinde olmayan bir noktayı 1.renk ile boyasın. Yine genelliği bozmaksızın Alice'in `22` noktasını boyadığını kabul edelim. Bu durumda Bob ilk hamlesinde geriye kalan ve derecesi 2 olan noktalardan birini 2. renk ile boyar. Genelliği bozmaksızın Bob'un da `00` noktasını 2. renk ile boyadığını kabul edelim. Buna göre Alice'in Tablo 1'de verilen ikinci hamleleri için Bob'un verdiği cevaplar sıralanmıştır. Bob'un verdiği cevaba göre ya Alice'in aynı anda savunamayacağı iki kritik nokta oluşmakta ya da 4. rengin gerekeceği noktalar ortaya çıkmaktadır.

Tablo 1. Alice'in bazı ikinci hamleleri için Bob'un verdiği cevaplar

Alice'in ikinci hamlesi	**Bob'un Alice'in hamlesine cevabı**	**Oluşan durum**
`21` noktasını 2. renkle boyar	`02` noktasını 3. renkle boyar	`20` için 4. renk gerekir
`21` noktasını 3. renkle boyar	`10` noktasını 1. renkle boyar	`12` ve `01` kritik noktalar
`20` noktasını 2. renkle boyar	`12` noktasını 3. renkle boyar	`21` için 4. renk gerekir
`20` noktasını 3. renkle boyar	`12` noktasını 2. renkle boyar	`21` için 4. renk gerekir
`02` noktasını 1. renkle boyar	`10` noktasını 3. renkle boyar	`01` için 4. renk gerekir
`02` noktasını 3. renkle boyar	`10` noktasını 1. renkle boyar	`01` için 4. renk gerekir
`01` noktasını 1. renkle boyar	`20` noktasını 3. renkle boyar	`02` için 4. renk gerekir
`01` noktasını 3. renkle boyar	`12` noktasını 2. renkle boyar	`10` ve `21` kritik noktalar
`10` noktasını 1. renkle boyar	`02` noktasını 3. renkle boyar	`01` için 4. renk gerekir
`10` noktasını 3. renkle boyar	`02` noktasını 1. renkle boyar	`01` için 4. renk gerekir
`11` noktasını 1. renkle boyar	`10` noktasını 3. renkle boyar	`01` ve `12` kritik noktalar
`11` noktasını 2. renkle boyar	`12` noktasını 3. renkle boyar	`21` ve `10` kritik noktalar
`11` noktasını 3. renkle boyar	`12` noktasını 2. renkle boyar	`21` ve `10` kritik noktalar
`12` noktasını 2. renkle boyar	`20` noktasını 3. renkle boyar	`21` için 4. renk gerekir
`12` noktasını 3. renkle boyar	`20` noktasını 2. renkle boyar	`21` için 4. renk gerekir

Eğer Alice ikinci hamlesinde `10` köşe noktasını 2. renk ile boyarsa Bob `01` noktasını 1. renk ile boyar. Bu durumda `02` köşe noktası kritik nokta olur. Bu noktayı savunmak için Alice'in 3. hamlesi için üç durum söz konusudur. Bu durumlar ve Bob'un bunlara cevapları Tablo 2'de verilmiştir. Tüm durumlarda 4. rengin gerektiği bir köşe noktası ortaya çıkmaktadır.

Tablo 2. Alice'in bazı üçüncü hamleleri için Bob'un verdiği cevaplar

Alice'in üçüncü hamlesi	**Bob'un Alice'in hamlesine cevabı**	**Oluşan durum**
`02` noktasını 3. renkle boyar	`21` noktasını 2. renkle boyar	`20` için 4. renk gerekir
`20` noktasını 2. renkle boyar	`12` noktasını 3. renkle boyar	`21` için 4. renk gerekir
`21` noktasını 3. renkle boyar	`11` noktasını 1. renkle boyar	`12` için 4. renk gerekir

Eğer Alice ikinci hamlesinde `12` köşe noktasını 1. renkle boyarsa Bob, `21` noktasını 2. renk ile boyar. Bu durumda `20` köşe noktası kritik nokta olur. Bu noktayı savunmak için Alice'in 3. hamlesi için yine üç durum söz konusudur. Bu durumlar ve Bob'un bunlara cevapları Tablo 3'de verilmiştir. Bob'un bu cevaplarına göre 4. rengin gerektiği bir nokta ortaya çıkmaktadır.

Tablo 3. Alice'in bazı üçüncü hamleleri için Bob'un verdiği cevaplar

Alice'in üçüncü hamlesi	**Bob'un Alice'in hamlesine cevabı**	**Oluşan durum**
`20` noktasını 3. renkle boyar	`01` noktasını 1. renkle boyar	`02` için 4. renk gerekir
`02` noktasını 1. renkle boyar	`10` noktasını 3. renkle boyar	`01` için 4. renk gerekir
`01` noktasını 3. renkle boyar	`11` noktasını 2. renkle boyar	`10` için 4. renk gerekir

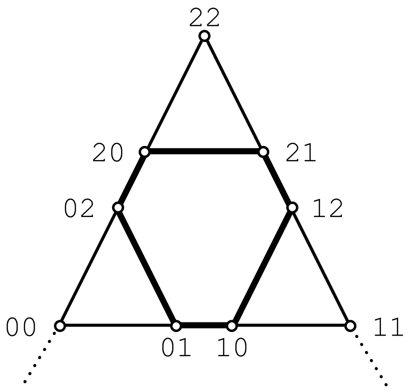
Böylece Alice boyamaya C_6 alt çizgesi üzerinde olmayan bir noktadan başladığında her zaman Bob kazanır. Buradan

$$4 \leq \chi_g(S(2,3))$$

elde edilir. O halde (2) eşitsizliğinden $\chi_g\big(S(2,3)\big) = 4$ olur.

Son olarak $n \geq 3$ olsun. $n = 2$ durumuna benzer olarak $S(n,3)$ Sierpinski çizgesinin oyun kromatik sayısını alttan 4 ile sınırlandırmak için yine Bob'a 3 renk ile bir kazanma stratejisi verilmelidir. Yine Alice'in ilk hamlesi için iki durum söz konusudur:

1. Durum: Eğer Alice ilk hamlesinde $S(n,3)$ Sierpinski çizgesindeki 3^{n-2} tane C_6 alt çizgelerinden herhangi birisi üzerindeki bir köşe noktasını boyarsa Bob, $n = 2$ durumunda olduğu gibi aynı C_6 alt çizgesi üzerinde ve Alice'in boyadığı köşe noktasından 2 birim uzaklıktaki köşe noktasını 2. renkle boyayarak oyunu kazanır.



Şekil 3. $S(n,3)$ Sierpinski çizgesinin bir $S(2,3)$ alt çizgesi

2. Durum: Alice ilk hamlesinde C_6 alt çizgelerinden birisi üzerinde olmayan bir köşe noktasını 1. renk ile boyasın. Gösterimlerde kısalık açısından Alice'in boyadığı noktayı içeren $S(2,3)$ alt çizgesini Şekil 3 deki gibi adlandıracağız. Genelliği bozmaksızın Alice'in ilk hamlesinde 22 köşe noktasını boyadığını kabul edelim. Bu durumda Bob, Alice'in boyadığı köşe noktasını içeren $S(2,3)$ alt çizgesi üzerinde ve Alice'in boyadığı köşe noktasından 2 birim uzaklıkta olan bir köşe noktasını 2. renk ile boyar. Yine genelliği bozmaksızın Bob'un 02 köşe noktasını 2. renk ile boyadığını kabul edelim. Bu durumda 20 noktasının komşu iki noktası iki farklı renk ile boyandığından 20 noktası bir kritik nokta olur. Bu noktayı savunmak için Alice'in 2. hamlesi için üç durum söz konusudur. Bu durumlar ve Bob'un bunlara cevapları Tablo 4'de verilmiştir. Bob'un verdiği cevaba göre ya Alice'in aynı anda savunamayacağı iki kritik nokta oluşmakta ya da 4. rengin gerekeceği noktalar ortaya çıkmaktadır.

Tablo 4. Alice'in bazı ikinci hamleleri için Bob'un verdiği cevaplar

Alice'in ikinci hamlesi	Bob'un Alice'in hamlesine cevabı	Oluşan durum
20 noktasını 3. renkle boyar	12 noktasını 2. renkle boyar	21 için 4. renk gerekir
21 noktasını 2. renkle boyar	10 noktasını 1. renkle boyar	12 ve 01 kritik noktalar
12 noktasını 3. renkle boyar	10 noktasını 1. renkle boyar	11 ve 01 kritik noktalar

Bu durumda Alice boyamaya C_6 alt çizgeleri üzerinde olmayan bir noktadan başladığında oyunu her zaman Bob kazanır. Böylece

$$4 \leq \chi_g(S(n,3))$$

elde edilir. O halde (2) eşitsizliğinden $\chi_g\big(S(n,3)\big) = 4$ olur ve ispat tamamlanır.

3. SONUÇ

Bu çalışmada $S(n,3)$ Sierpinski çizgesinin oyun kromatik sayısı bulunmasına rağmen $k \geq 4$ iken $S(n,k)$ Sierpinski çizgesinin oyun kromatik sayısı halen bilinmemektedir. Çizge kuramında pek çok çizgenin oyun kromatik ve oyun renk sayısı henüz hesaplanamamıştır. Ayrıca $S(n,k)$ Sierpinski çizgenin oyun kromatik indeks ($\chi'_g(S(n,k))$) sayısı da halen bulunamamıştır.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma Anadolu Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Komisyonunca kabul edilen 1502F064 nolu proje kapsamında desteklenmiştir.

EK: $S(n,k)$ Sierpinski Çizgesinin Maple Yazılımında Tanımlanarak Çizdirilmesi

```
> with(StringTools):with(GraphTheory):
> n := 3:k := 4:
> V := Generate(n,Iota(convert(0,string)..convert(k-1,string))):
> GetEdges := proc(n::integer)::set;
   local E,M,m,e,u,v,uu,vv,i,j,istr,jstr;
   if n>0 then
     E := GetEdges(n-1):
     M := {};
     for m from 1 to nops(E) do
       e := E[m];
       u := e[1];
       v := e[2];
       for i from 0 to k-1 do
         istr := convert(i,string);
         uu := cat(istr,u);
         vv := cat(istr,v);
         M := { op(M), {uu,vv} };
       od:
     od:
     E:={op(M)};

     for i from 0 to k-1 do
       for j from 0 to k-1 do
         if i<>j then
           istr := convert(i,string);
           jstr := convert(j,string);
           u := cat(istr,Repeat(jstr,n-1));
           v := cat(jstr,Repeat(istr,n-1));
           E := {op(E), {u,v} };
         end if:
       od:
     od:

   else
     E:={};
   end if;
   return E;
end proc:
> G := Graph(V,GetEdges(n)):
> DrawGraph(G,style=spring,redraw);
```

KAYNAKLAR

[1] Bodlaender H L. On the complexity of some coloring games. International Journal of Foundations of Computer Science 1991; 2: 133-147.

[2] Dinski T, Zhu X. A bound for the game chromatic number of graphs. Discrete Mathematics 1999; 196: 109-115.

[3] Faigle U, Kern U, Kierstead H A, Trotter W T. On the game chromatic number of some classes of graphs. Ars Combinatoria 1993; 35: 143-150.

[4] Gardner M. Mathematical Games. Scientific American 1981; 23.

[5] Guan D J, Zhu X. Game chromatic number of outerplanar graphs. Journal of Graph Theory 1999; 30: 67-70.

[6] Hinz A M, Parisse D. Coloring Hanoi and Sierpinski graphs. Discrete Mathematics 2012; 312: 1521-1535.

[7] Jakovac M, Klavžar S. Vertex-, edge-, and total-colorings of Sierpinski-like graphs. Discrete Mathematics 2009; 309: 1548-1556.

[8] Kierstead H A., Trotter W T. Planar graph coloring with an uncooperative partner. Journal of Graph Theory 1994; 18: 569-584.

[9] Kierstead H A. A simple competitive graph coloring algorithm. Journal of Combinatorial Theory Series B 2000; 78: 57-68.

[10] Kierstead H A., Yang D. Very asymmetric marking games. Order 2005; 22: 93-107.

[11] Klavžar S, Milutinović U. Graphs $\mathrm{S}(\mathrm{n},\mathrm{k})$ and a variant of the Tower of Hanoi problem. Czechoslovak Mathematical Journal 1997; 47: 95-104.

[12] Klavžar S. Coloring Sierpinski graphs and Sierpinski gasket graphs. Taiwanese Journal of Mathematics 2008; 12: 513-522.

[13] Parisse D. On some metric properties of the Sierpinski graphs $\mathrm{S}(\mathrm{n},\mathrm{k})$. Ars Combinatoria 2009; 90: 145-160.

[14] Paul D, Rajasingh I. Acyclic edge-coloring of Sierpinski-like graphs. International Journal of Pure and Applied Mathematics 2013; 87: 855-862.

[15] Raspaud A, Wu J. Game chromatic number of toroidal grids. Information Processing Letters 2009; 109: 1183-1186.

[16] Sidorowicz E. The game chromatic number and the game colouring number of cactuses. Information Processing Letters 2007; 102: 147-151.

[17] Wu J, Zhu X. Lower bounds for the game colouring number of partial k-trees and planar graphs Discrete Mathematics 2008; 308: 2637-2642.

[18] Zhu X. The game coloring number of planar graphs Journal of Combinatorial Theory Series B 1999; 75: 245-258.

[19] Zhu X. Refined activation strategy for the marking game. Journal of Combinatorial Theory Series B 2008; 98: 1-18.