Anadolu Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi B - Teorik Bilimler
Anadolu University Journal of Science and Technology B - Theoretical Sciences

ANADOLU ÜNİVERSİTESİ

2016 - Cilt: 4 Sayı: 1
Sayfa: 39 - 42
DOI: 10.20290/btdb.44825
Geliş: 04 Ocak 2016 Düzeltme: 03 Mart 2016 Kabul: 14 Mart 2016

METRİK KATEGORİDE PROJEKTİF OBJELER

Mehmet KILIÇ [1]

Özet

Bu çalışmada, metrik kategoride ve bu kategorinin dolu alt kategorisi olan kompakt metrik uzaylar kategorisinde tüm projektif objeler belirlenmiştir. Metrik kategoride boş kümeden başka, kompakt metrik kategoride boş küme ve tek noktalı uzaydan başka projektif obje olmadığı gözlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kategori, Dolu alt kategori, Epimorfizm, Projektif obje.

PROJECTIVE OBJECTS IN METRIC CATEGORY

Abstract

It will be determined that all projective objects in metric category and compact metric category which is full subcategory of metric category. It will be turn out that there is no projective object except empty set in metric category and there is no projective object except empty set and space with single point in compact metric category.

Keywords: Category, Full subcategory, Epimorphism, Projective object.

1. GİRİŞ

Bilindiği gibi bir C kategorisi şu üç bileşenden oluşur:

- $Ob(C)$ ile gösterilen objeler sınıfı
- her $A, B \in Ob(C)$ için, $C[A, B]$ ile gösterilen morfizmler kümesi
- her $A, B, C \in Ob(C)$ için $C[A, B] \times C[B, C] \to C[A, C]$, $(f, g) \mapsto g \circ f$ şeklinde tanımlı ve aşağıdaki iki özelliği sağlayan bileşke fonksiyonu:
  - i) $f \in C[A, B]$, $g \in C[B, C]$ ve $g \in C[C, D]$ ise $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$
  - ii) Her A objesi için 1_A ile gösterilen ve her $f \in C[B, A]$ için $1_A \circ f = f$, her $g \in C[A, C]$ için $g \circ 1_A = g$ eşitliklerini sağlayan birim morfizm vardır.

A ve B herhangi iki kategori olmak üzere $Ob[B] \subseteq Ob[A]$ ve B'ye ait herhangi iki B_1, B_2 objeleri için $B[B_1, B_2] \subseteq A[B_1, B_2]$ kapsamaları sağlanıyorsa B'ye A'nın bir alt kategorisi denir. B, A'nın bir alt kategorisi ve her $B_1, B_2 \in B$ için $B[B_1, B_2] = A[B_1, B_2]$ oluyorsa B'ye A'nın bir dolu alt kategorisi denir.

[1] E-posta: kompaktuzay@gmail.com

Met ile gösterilen metrik kategori, objeleri metrik uzaylar, morfizmleri genişletmeyen dönüşümler olan kategoridir. X ve Y iki metrik uzay olmak üzere $X \to Y$ tanımlı bir f genişletmeyen dönüşümü, her $x_1, x_2 \in X$ için

$$d\big(f(x_1), f(x_2)\big) \leq d(x_1, x_2)$$

eşitsizliğini sağlayan bir fonksiyondur. Kolaylıkla görülebileceği üzere her X metrik uzayı için 1_X birim dönüşümü bir genişletmeyen dönüşümdür ve X, Y ve Z üç metrik uzay, $f: X \to Y$ ve $g: Y \to Z$ iki genişletmeyen dönüşüm ise $g \circ f: X \to Z$ genişletmeyen bir dönüşüm olur. Dolayısıyla **Met** gerçekten bir kategoridir.

Bu kategori ilk olarak 1964 yılında Isbell [2] tarafından ele alınmıştır. Isbell metrik kategoride injektif objeler üzerine çalışmış ve çağdaşları olan Aronszajn ve Panitchpakdi [1] ile birlikte bugün metrik geometride önemli bir yer tutan injektif (hiperkonveks) metrik uzay kavramının ve onunla ilişkili olan "tight span" kavramının temellerini atmıştır.

Objeleri kompakt metrik uzaylar, morfizmleri genişletmeyen dönüşümler olan kompakt metrik uzaylar kategorisi metrik kategorinin dolu bir alt kategorisidir. Çünkü iki kompakt metrik uzay arasındaki morfizmler kümesi her iki kategoride de aynı kümedir.

Biz bu çalışmada metrik kategoride ve kompakt metrik uzaylar kategorisinde projektif objelerin neler olduğunu saptayacağız.

2. PROJEKTİF METRİK UZAYLAR

Metrik kategoride epimorfizmler, görüntü kümesi değer kümesi içinde yoğun olan, genişletmeyen dönüşümlerdir. Bilinen bu gerçeği ispatlamadan önce epimorfizm tanımını hatırlatalım:

Tanım 2.1 C bir kategori $X, Y \in Ob[C]$ ve $f \in C[X, Y]$ olsun. Eğer her $Z \in Ob[C]$ ve her $g, h \in C[Y, Z]$ için $g \circ f = h \circ f$ olması $g = h$ olmasını gerektiriyorsa f'ye epimorfizm denir.

Önerme 2.2 Metrik kategoride bir morfizmin epimorfizm olması için gerek ve yeter koşul görüntü kümesinin değer kümesi içinde yoğun olmasıdır.

Kanıt: $f: X \to Y$ epimorfizm olsun ve $f(X)$'in Y içinde yoğun olmadığını varsayalım. O halde öyle bir $y_0 \in Y$ ve $r > 0$ gerçel sayısı vardır ki

$$B(y_0, r) \cap f(X) = \emptyset$$

olur. Şimdi $[0, r]$ aralığını standart metrikle düşünelim ve $g, h: Y \to [0, r]$ fonksiyonlarını aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$g(y) = \begin{cases} r, & d(y, y_0) \geq r \\ d(y, y_0), & d(y, y_0) < r \end{cases}$$

$$\mathrm{h(y)} = \begin{cases} r, & d(y, y_0) \geq r \\ \dfrac{r}{2} + \dfrac{d(y, y_0)}{2}, & d(y, y_0) < r \end{cases}$$

Bu şekilde tanımlanan g ve h dönüşümleri genişletmeyen dönüşümlerdir ve $g \circ f = h \circ f$ eşitliği sağlanır. Ancak $g \neq h$ olduğundan bu durum f'nin epimorfizm olmasıyla çelişir. O halde $f(X)$, Y içinde yoğun olmalıdır.

Şimdi $f: X \to Y$ genişletmeyen dönüşümü verilsin ve $f(X)$, Y içinde yoğun olsun. Bu durumda bir Z metrik uzayı ve $g, h: Y \to Z$ genişletmeyen dönüşümleri için $g \circ f = h \circ f$ eşitliği sağlanıyorsa g ve h, f(X) üzerinde eşit olurlar. g ve h genişletmeyen dönüşüm olduklarından süreklidirler ve yoğun bir küme üzerinde eşit olan sürekli fonksiyonlar tüm küme üzerinde de eşit olacaklarından $g = h$ olur ve dolyısıyla f epimorfizmdir.

Eğer X kompakt bir metrik uzaysa, X'ten herhangi bir Y metrik uzayına giden bir f epimorfizmi örten bir fonksiyon olur. Çünkü X kompakt ve f sürekli olduğundan, $f(X) \subseteq Y$ kompakt olur. Öyleyse $f(X)$ kapalıdır ve Önerme 1 gereğince $Y = \overline{f(X)} = f(X)$ elde edilir. Böylece aşağıdaki sonucu elde ederiz:

Sonuç: Kompakt metrik uzaylar kategorisinde bir morfizmin epimiorfizm olması için gerek ve yeter koşul örten olmasıdır.

Tanım 2.3 C bir kategori $P \in Ob(C)$ olsun. X ve Y, C'de herhangi iki obje olmak üzere her $p: Y \to X$ epimorfizmi ve her $f: P \to X$ morfizmi için $f = p \circ \tilde{f}$ eşitliğini sağlayan bir $\tilde{f}: P \to Y$ morfizmi bulunabiliyorsa P'ye projektif obje denir. Metrik kategorinin her bir projektif objesine projektif metrik uzay denir.

Teorem 2.4 Metrik kategoride boştan farklı projektif obje yoktur.

Kanıt: Varsayalım ki P projektif metrik uzay olsun. $X = [0,1]$, $Y = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ alalım. Y, X içinde yoğun olduğundan, $p: Y \to X$ gömme dönüşümü epimorfizmdir.

$$f: P \to X, f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

olarak tanımlanan f sabit dönüşümü genişletmeyen dönüşümdür. Ancak $f = p \circ \tilde{f}$ eşitliğini sağlayan bir $\tilde{f}: P \to Y$ genişletmeyen dönüşümü yoktur. O halde P projektif uzay olamaz.

Teorem 2.5 Kompakt metrik uzaylar kategorisinde birden fazla nokta içeren bir uzay projektif değildir.

Kanıt: Kompakt metrik uzaylar kategorisinde epimorfizmler örten dönüşümler olduğundan tek noktalı metrik uzayın projektif uzay olduğu barizdir. Şimdi P metrik uzayı birbirinden farklı x ve y gibi iki eleman içersin ve $d(x, y) = r$ olsun. $X = [0, r]$, $Y = [0,2r]$ ve

$$p: Y \to X, p(t) = \frac{t}{2}$$

alalım. Bu durumda $f: P \to X$ dönüşümünü $f(x) = 0$ ve $f(y) = r$ olacak şekilde seçersek $f = p \circ \tilde{f}$ eşitliğini sağlayan bir $\tilde{f}: P \to Y$ genişletmeyen dönüşümü bulamayız.

O halde P projektif uzay olamaz.

KAYNAKLAR

[1] N. Aronszajn, P. Panitchpakdi, Extension of uniformly continuous transformations and hyperconvex metric spaces, Pacific J. Math. 6 (1956), 405-439.

[2] J. R. Isbell, Six theorems about injective metric spaces, Comment. Math. Helvetici 39 (1964), 65-76.

[3] M. Kılıç, İçsel Metrik Uzaylar, Doktora tezi, Anadolu Üniversitesi, 2015.