Buca Eğitim Fakültesi Dergisi, 2022, sayı 53, s. 611-637

Araştırma Makalesi

The Journal of Buca Faculty of Education, 2022, issue 53, p. 611-637

Research Article

İlköğretim Matematik Öğretmenliği Lisans Öğrencilerinin Çok Değişkenli Fonksiyonların Limiti ve Sürekliliği Konusundaki Kavram Yanılgılarının İncelenmesi

An Investigation of the Misconception of Elementary Mathematics Teaching Undergraduate Students on the Limit And Continuity of Multivariable Functions

Buse Gizem YİTMEZ[1], *Süha YILMAZ*[2], *Bahar DİNÇER*[3]

[1] *Sorumlu Yazar, Doktora Öğrencisi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Dokuz Eylül Üniversitesi, Türkiye, gizem.yitmez@gmail.com, (https://orcid.org/0000-0002-4163-489X)*
[2] *Prof. Dr., Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Eğitim Fakültesi, Dokuz Eylül Üniversitesi, Türkiye, suha.yilmaz@deu.edu.tr, (https://orcid.org/0000-0002-8330-9403)*
[3] *Dr. Öğr. Üyesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Eğitim Fakültesi, Demokrasi Üniversitesi, Türkiye, bahar.dincer@idu.edu.tr, (https://orcid.org/0000-0003-4767-7791)*

Geliş Tarihi: *15.03.2022* ***Kabul Tarihi:*** *12.05.2022*

ÖZ

Bu araştırmada, ilköğretim matematik öğretmenliği lisans öğrencilerinin çok değişkenli fonksiyonların limiti ve sürekliliği konusundaki kavram yanılgılarının belirlenmesi amaçlanmaktadır. Bu amaç doğrultusunda araştırmada karma araştırma desenlerinden sıralı dönüşümsel tasarım kullanılmıştır. Araştırmanın nicel boyutu bir devlet üniversitesinin ilköğretim matematik öğretmenliği bölümünde öğrenim görmekte olan 78 öğretmen adayı ile yürütülmüştür. Bu adaylara, araştırmacılar tarafından geliştirilen "Çok Değişkenli Fonksiyonlarda Limit ve Süreklilik Konusundaki Kavram Yanılgılarını Belirleme Testi" uygulanmıştır ve toplanan veriler analiz edilerek olası kavram yanılgıları belirlenmiştir. Araştırmanın nitel boyutunda ise öğretmen adaylarının kavrayış biçimlerinin daha açık bir şekilde ortaya çıkararak, kavram yanılgılarını derinlemesine inceleyebilmek için 6 kişiyle yarı yapılandırılmış görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Yapılan analizler sonucunda öğretmen adaylarının çok değişkenli fonksiyonların limiti ve sürekliliği konusunda çeşitli yanılgılara sahip oldukları belirlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Çok değişkenli fonksiyonlar, limit, süreklilik, kavram yanılgıları, lisans öğrencileri.

ABSTRACT

In this research, it is aimed to determine the misconceptions of elementary mathematics teaching undergraduate students about the limit and continuity of multivariable functions. In line with this purpose, sequential transformative design was used from mixed research designs. The quantitative dimension of the research has been carried out with 78 teacher candidates in the department of elementary mathematics teaching of a state university. These candidates have been applied to the data collection tool called "Test for Determining the Misconceptions about the Limit and Continuity of Multivariable Functions" developed by researchers and possible misconceptions were determined by analyzing the collected data. In the qualitative dimension of the research, semistructured interviews were performed with 6 teacher candidates to examine the misconceptions in depth. As a result of the analyzes, teacher candidates have been determined to have various misconceptions on the limit and continuity of multivariable functions and the level of understanding is very low.

Keywords: Multivariable functions, limit, continuity, misconceptions, undergraduate students.

GİRİŞ

Matematik eğitimine verilen önem, eğitim bilimlerinde yaşanan gelişmeler ve teknolojinin gelişmesiyle birlikte gün geçtikçe artmaktadır. Yaşanan bu gelişmeler matematik öğretiminin ve öğreniminin nasıl olması gerektiği ile ilgili birçok sorunu beraberinde getirmektedir. Ulusal ve uluslararası birçok yayın matematik öğretiminde anlamlı öğrenmenin önemine vurgu yapmaktadır (Milli Eğitim Bakanlığı [MEB], 2018; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000; Reys, Reys ve Rubenstein, 2010). Anlamlı öğrenme, bilginin zihinde yapılandırılması ile yakından ilişkilidir. Birey yeni bir bilgiyle karşılaştığında, bunu zihninde anlamlandırabilmesi için değerlendirme, hatırlama, ilişkilendirme, karşılaştırma gibi bir dizi zihinsel süreçten geçmek durumundadır (Yanık, 2016). Bilginin zihinde yapılandırılması sırasında meydana gelen bazı olumsuz durumlar bireyleri yanlış kavrayışlara sürükleyebilmektedir (Özkaya ve İşleyen, 2012). Bu yanlış kavrayışlar ise kavram yanılgılarının oluşumuna neden olabilmektedir.

Kavram yanılgıları genellikle bir konunun uzman görüşünden farklı olan, öğrencilerin sahip olduğu algı ya da kavrayış olarak tanımlanmaktadır (Graeber, 1993; Hammer, 1996; Zembat, 2015). Başka bir deyişle çeşitli öğrenmeler sonucunda, öğrencilerin öğrenmiş oldukları ve zihinlerinde yapılandırdıkları kavramlara yüklediği anlamların kavramın bilimsel anlamıyla örtüşmemesidir (Baki ve Aydın-Güç, 2014). Ubuz (1999) ise kavram yanılgısını öğrenmeye engel oluşturan, kavramsal engeller olarak tanımlamaktadır. Kavramsal öğrenme, bireyin yeni karşılaştığı bir bilgiyi mevcut bilgileri doğrultusunda değerlendirip ilişkisel ve sistematik bir yapıya dönüştürme sürecidir (Yanık, 2016). Kavramsal öğrenmenin gerçekleşmesi için kavram yanılgılarının mutlaka üstesinden gelinmesi gerekmektedir. Fakat Hammer'a (1996) göre kavram yanılgılarının çoğu geleneksel metotlarla ortadan kaldırılamayacak kadar ısrarcıdırlar. Bu yanılgıların ortadan kaldırılabilmesi için öğrencilerin mevcut bilgilerinin bir şekilde yetersiz ya da yanlış olduğunu kabul etmesi ve yeniden yapılandırma için çaba göstermesi gerekmektedir. Bu noktada öğretilmesi gereken kavramların yalnızca açıklanması yeterli olmayıp, bilişsel çatışmayı içeren öğretim stratejilerinin kullanılması gerekmektedir. Öğretmenlerin derslerinde kullanacağı öğretim stratejileri öğrencileri, kendi stratejileri üzerine düşünmeye ve daha etkili stratejileri benimsemeye teşvik etmeli, yaptıkları hataların nerede olabileceğine dair tahmin yürütmeleri ve var olan kavram yanılgılarıyla yüzleşmeleri sağlanarak, öğrencilerin hataları öğretim noktaları olarak kullanılmalıdır (Jones ve Tanner, 2000). Bu öğretim stratejilerinin seçilmesi için öğrencilerin olası kavram yanılgılarının farkında olarak dersin planlanması gerekmektedir. Dolayısıyla öğretmenler herhangi bir konuyu öğretmeye hazırlanırken, ilk olarak öğrencilerin olası kavram yanılgılarının belirlenmesi gerekmektedir.

Çok değişkenli fonksiyon kavramı, matematik ve uygulamalarının temelini oluşturmaktadır (Trigueros ve Martinez-Planell, 2010). Birden fazla bağımsız değişkene sahip olan fonksiyonlara, çok değişkenli fonksiyon denmektedir. Öğretim aşamasında ve günlük yaşamda karşılaşılan birçok fonksiyon, aslında çok değişkenli fonksiyonlara birer örnektir. Örneğin $\mathrm{V} = \pi \mathrm{r}^2 \mathrm{h}$ fonksiyonu; silindirin hacmi bağımlı değişken, yarıçap ve yükseklik bağımsız değişkenler olmak üzere çok değişkenli bir fonksiyondur. Benzer şekilde bir kırtasiyede defter, silgi ve kalem satışından elde edilen gelirler sırasıyla a, b, c olmak üzere ayrı ayrı bağımsız değişkenleri, toplam elde edilen gelir bağımlı değişkeni ve toplam gelir fonksiyonu ise çok değişkenli fonksiyonu ifade etmektedir. Fakat günlük yaşamla ilişkili olan bu kavramın uygulamada kullanılabilmesi için limit ve süreklilik kavramlarının öğretilmesi gerekmektedir. Okuyucuların daha kolay anlayabilmesi için bu kavramların tanımlarına yer verilecektir.

Bir (x_0, y_0) noktasına yeterince yakın tüm (x, y) noktaları için $f(x, y)$'nin değerleri belirli bir L sayısına yaklaşıyorsa, (x, y) noktası (x_0, y_0)'a yaklaşırken f fonksiyonu L limitine yaklaşır denmektedir ve bu yaklaşım $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$ şeklinde gösterilmektedir (Thomas, 2010). Bu tanım her ne kadar tek değişkenli fonksiyonların formal olmayan tanımına benzese de burada dikkat edilmesi gereken (x, y)'nin (x_0, y_0)'a herhangi bir yönden yaklaşabileceğidir. İki değişkenli bir fonksiyonun (x_0, y_0) noktasındaki limiti araştırılırken dikkat edilmesi gereken iki husus vardır (Biber ve Argün, 2012). Bunlardan ilki fonksiyon (x_0, y_0) noktasında tanımlı olmayabilir fakat bu nokta tanım kümesinin bir yığılma noktasıdır. İkincisi ise eğer L limiti varsa bu (x, y) noktasının (x_0, y_0) noktasına yaklaşma şeklinden bağımsızdır. Diğer bir deyişle (x, y) noktası (x_0, y_0) noktasına hangi eğri boyunca yaklaşırsa yaklaşsın L limit değeri değişmemektedir, eğer bu limit değeri değişiyorsa fonksiyonun o noktada limiti yoktur (Biber ve Argün, 2012). İki değişkenli fonksiyonlarda süreklilik tanımına bakıldığında ise tek değişkenli fonksiyonlardaki gibi limit cinsinden ifade edilmektedir. Eğer ki bir $f(x, y)$ fonksiyonu (x_0, y_0) noktasında sürekli ise $f(x_0, y_0)$'da tanımlı, $f(x, y)$ 'nin var ve $f(x, y) = f(x_0, y_0)$ olması gerekmektedir.

Matematik, ortaya çıkışından bugüne kadar, tuğlaları sistematik bir şekilde üst üste konularak inşa edilmiş, çok katlı ve her bir katı birbiriyle yakından ilişkili bir yapıya benzetilmektedir (Biber, 2018). Diğer bir deyişle matematikte öğrenilen her bir kavram, bir diğer kavramı etkilemektedir. Örneğin öğrencilerin tek değişkenli fonksiyonlarda limit kavramını öğrenmeden, çok değişkenli fonksiyonlarda limit kavramını zihninde oluşturması veya anlamlandırması çok zor hatta mümkün değildir. Öğrenciler bir kavramı öğrenmeden önce, o kavrama ait günlük deneyimlerden gelen belirli imge, fikir, bilgi veya sezgilere sahip olarak sınıfa gelirler (Cornu, 2002). Yani öğrenciler sınıfa geldiklerinde, yeni kavramı öğrenmeden önce o kavrama ait çeşitli ön bilgilere sahiptirler. Fakat öğrencilerin ön bilgilerinde eksiklik ya da kavram yanılgıları varsa kazandırılması istenen yeni kavramlar ile öğrencilerin zihnindeki ön bilgileri çatışacağından, bu durum öğrencilerin yeni öğrenmelerini engellemekle birlikte yeni kavram yanılgılarının oluşumuna da neden olabilmektedir (Yitmez, 2021). Çok değişkenli fonksiyonlarda limit ve süreklilik kavramları içeriğinde literatürde öğrencilerin kavram yanılgısına sahip olduğu fonksiyon, tek değişkenli fonksiyonlarda limit, süreklilik gibi birçok kavramı barındırmaktadır (Barak, 2007; Baştürk ve Dönmez, 2011; Bezuidenhout, 2010; Kula ve Bukova-Güzel, 2014; Özkaya ve İşleyen, 2012). Dolayısıyla öğrencilerin birçok yanılgıya sahip olduğu kavramları temelinde barından çok değişkenli fonksiyonlarda limit ve süreklilik kavramlarına ilişkin de yanılgılara sahip olduğu düşünülmektedir. Kavram yanılgılarını ortadan kaldırabilmenin ilk basamağı, öğrencilerin sahip olduğu yanılgıları tespit etmektir. Çünkü ancak o zaman öğrencilerin yanılgıları dikkate alınarak öğretim planı hazırlanabilir ve kavram yanılgılarının önüne geçilebilir. Fakat literatür incelendiğinde öğrencilerin bu konudaki yanılgılarının araştırıldığı herhangi bir çalışmaya rastlanmamıştır. Geleceğin öğretmenleri olacak lisans öğrencilerinin kavram yanılgılarının tespit edilerek önüne geçilmesi, yapacak oldukları öğretimleri etkileyecek ve alanında uzman matematik öğretmenlerinin yetiştirilmesine olanak sağlayacaktır. Bu bağlamda araştırmada ilköğretim matematik öğretmenliği lisans öğrencilerinin çok değişkenli fonksiyonların limiti ve sürekliliği konusundaki kavram yanılgılarının belirlenmesi amaçlanmakta olup araştırmanın problem cümlesi "İlköğretim matematik öğretmenliği lisans öğrencilerinin çok değişkenli fonksiyonların limiti ve sürekliliği konusundaki kavram yanılgıları nelerdir?" olarak belirlenmiştir.

YÖNTEM

2.1.Araştırmanın Modeli

Bu araştırma karma araştırma desenlerinden sıralı dönüşümsel tasarım üzerine temellendirilmiştir. Bu tasarımda, araştırmanın önceliği ve ihtiyacına göre ilk olarak ya nicel veri önceden toplanıp analiz edildikten sonra nitel veriler alınır ya da tam tersi durum söz konusudur ve çalışılan olguyu daha derinlemesine anlamayı sağlaması açısından oldukça faydalıdır (Gökçek, 2019). Bu bağlamda araştırmada ilk olarak nicel veriler toplanıp analiz edildikten sonra nitel veriler toplanıp analiz edilmiştir. Araştırmanın tasarımına ilişkin şematik gösterim Şekil 1'de sunulmuştur.

Şekil 1. Araştırmanın Akış Şeması

Araştırmanın nicel kısmı, betimsel nitelikte olup genel tarama modeli üzerine temellendirilmiştir. Karasar'a (2002) göre genel tarama modeli, belirlenen evrenin ya da evreni temsil eden örneklemin tutumlarının, fikirlerinin, davranışlarının veya özelliklerinin nasıl dağılım gösterdiğini belirlemek için kullanılan aynı zamanda genel bir hükme varılması için gerçekleştirilen tarama çalışmalarıdır. Bu modelin asıl amacı evrenin özelliklerini tanımlamaktır. Bu model ile araştırmada İlköğretim Matematik Öğretmenliği lisans öğrencilerinin çok değişkenli fonksiyonların limit ve sürekliliğine ilişki kavram yanılgılarının belirlenmesi amaçlanmıştır.

Araştırmanın nitel kısmında ise durum çalışması modeli kullanılmıştır. Durum çalışması, araştırma konusunun bir yönünün derinlemesine incelenmesine ve betimlenmesine imkan tanıyan araştırma modelidir (Merriam, 2018). Araştırmada, durum çalışması türlerinden açıklayıcı durum çalışması kullanılmıştır. Açıklayıcı durum çalışmalarında bir durum hakkında bilgi vermek ve gerçek hayat durumları ile ilgili bağlantıları ortaya çıkarmak için kullanılmaktadır (Gökçek, 2019).

2.2.Evren ve Örneklem

Bu araştırmada örneklemden elde edilen verileri, evrene genelleme amacı bulunduğundan elde edilen bulguların genellendiği büyük kitle olan evren ve büyük kitleyi temsil etme yeterliliğine sahip olan örneklem alma yoluna gidilmiştir. Araştırmanın amacı doğrultusunda evreni oluşturan bireylerin çok değişkenli fonksiyonlarda limit ve süreklilik kavramlarının yer aldığı Analiz III dersini almış olması gerekmektedir. Buradan hareketle araştırmanın evreni "İzmir'deki üniversitelerin ilköğretim matematik öğretmenliği bölümünde öğrenim görmekte olan 2. sınıf lisans öğrencileri" olarak belirlenmiştir. Araştırmanın nicel çalışma örneklemi, olasılığa dayalı olmayan örnekleme yöntemlerinden uygun örnekleme yöntemiyle seçilmiştir. Uygun örnekleme yönteminde, zaman, para, konum, yer gibi şartların kullanılabilirliğine yani elverişlilik durumlarına uygun olacak şekilde örneklem seçilmektedir (Canbazoğlu-Bilici, 2019; Merriam, 2018). Bu bağlamda araştırmanın nicel çalışma örneklemi 2021-2022 eğitim-öğretim yılı bahar döneminde bir devlet üniversitesinin ilköğretim matematik öğretmenliği programında öğrenim görmekte olan 2. sınıf 80 öğretmen adayı olarak belirlenmiştir. Ancak araştırma, 2 öğretmen adayının katılımının sağlamaması ile 78 öğretmen adayı ile yürütülmüştür. Araştırmada etik kurallar nedeniyle öğretmen adaylarının isimleri ÖA1, ÖA2, …,ÖA78 olarak kodlanmıştır.

Araştırmanın nitel örneklemi ise aynı öğrenci grubundan, amaçlı örnekleme yöntemlerinden, ölçüt örnekleme yöntemi ile seçilmiştir. Ölçüt örnekleme yönteminde, örneklemi belirleyen ölçütü karşılayan bireyler çalışmanın örneklemini oluşturmaktadır (Canbazoğlu-Bilici, 2019). Bu bağlamda nicel çalışma örneklemini oluşturan bireylere kavram yanılgılarını belirleme testi uygulanarak her bir öğrencinin puanlama ölçeği (Tablo 1) kullanılarak toplam puanı hesaplanmış ve bu öğrencilerden yüksek, orta ve en düşük puan alan 6 öğretmen adayı ile yarı yapılandırılmış görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Her bir öğretmen adayının kavram yanılgılarını belirleme testinden elde ettikleri puanlar bir ölçüt olarak kabul edilmiş ve verdiği cevaplarda kavram yanılgısına sahip olduğu düşünülen öğrenciler seçilmiştir. Öğrenci seçimi gönüllülük esas alınarak gerçekleştirilmiştir. Herbir öğrenci ile ayrı ayrı olacak şekilde, bir devlet üniversitesinin uzaktan eğitim faaliyetlerinin yürütüldüğü Sakai eğitim yazılımı platformu üzerinden gerçekleştirilmiştir. Görüşmeler yaklaşık 20 dakika ve tek oturumda gerçekleştirilmiştir.

2.3.Veri Toplama Araçları

Bu araştırmada, öğretmen adaylarının çok değişkenli fonksiyonların limiti ve sürekliliği konusunda sahip oldukları kavram yanılgılarını belirlemek amacıyla, araştırmacılar tarafından geliştirilen ve 12 adet açık uçlu sorudan oluşan "Çok Değişkenli Fonksiyonlarda Limit-Süreklilik Konusundaki Kavram Yanılgılarını Belirleme Testi" adlı veri toplama aracı kullanılmıştır. Kapalı uçlu sorular katılımcıların verebileceği yanıtları sınırlamaktadır (Sezgin-Selçuk, 2019). Bu nedenle araştırmada örneklemden çeşitli yanıtlar elde edilmesini olanak sağlayan açık uçlu sorular kullanılmıştır. Öğrencilerden her bir soruya verdikleri cevapların gerekçeleriyle birlikte açıklamaları istenmiştir. Bu sayede öğrencilerin yanlış kavrayışlarının kaynağı tespit edilmeye çalışılmıştır. Testte yer alan sorular, öğrencilerin bilgisini ölçmekten ziyade ilgili konudaki kavram yanılgılarını ortaya çıkarmayı amaçlamaktadır.

Soruların hazırlık aşamasında öğrencilerin yaptıkları hatalar ve yanılgıya düştüğü noktalar ders esnasında gözlemlenmiş, ders kitaplarından ve öğretim üyelerinin görüşlerinden faydalanılmıştır. Sorular hazırlandıktan sonra Analiz III dersini almış ve ortaöğretim matematik öğretmenliği bölümünde öğrenim görmekte olan 28 öğretmen adayı ile pilot çalışma gerçekleştirilmiştir. Pilot çalışma sonrasında öğrencilerin cevapları analiz edilerek, testin alfa güvenirlik katsayısı 0.828 olarak hesaplanmıştır. Tüm maddeler için elde edilen alfa değeri o ölçeğin toplam güvenilirliğini gösterir ve genel kabul olarak bu değerin 0.7 ve büyük olması ölçeğin güvenirliğinin yüksek olduğunu göstermektedir (Kılıç, 2016). Testin son halini belirlemek amacıyla matematik eğitimi alanında uzman 2 öğretim üyesinin görüşüne başvurularak görüşleri alınmış ve test asıl uygulamaya hazır hale getirilmiştir.

Testin uygulanmasından sonra öğretmen adaylarının var olan yanılgılarını daha açık bir şekilde ortaya çıkararak, derinlemesine inceleyebilmek adına 6 öğretmen adayı ile yarı yapılandırılmış görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Araştırmanın amacı çerçevesinde açık uçlu soruların sorulduğu yarı yapılandırılmış görüşmeler, katılımcının zihnindeki hipotezi kendi düşünceleriyle anlatmasını sağlayarak görüşme süresince farklı sorularla konunun açıklanmasına, konu hakkında farklı fikirlerin ortaya çıkmasını sağlamaktadır (Merriam, 2018). Bu bağlamda her bir öğretmen adayına kavram yanılgılarını belirleme testine verdikleri cevapların altında yatan kavrayışlarının ortaya çıkmasına olanak sağlayacak 8 sorunun yer aldığı yarı yapılandırılmış görüşme formunda yer alan sorular sorulmuştur (Ek 1). Görüşme formunda yer alan sorular öğrencilerin olası yanılgıları göz önüne alınarak ve literatürde tek değişkenli fonksiyonların limit sürekliliğine ilişkin yanılgıların araştırıldığı kaynaklardan yararlanılarak hazırlanmıştır (Baştürk ve Dönmez, 2011; Bezuidenhout, 2001; Kula ve Bukova-Güzel, 2014; Özmantar ve Yeşildere, 2015). Ayrıca öğrencilerin kavram yanılgılarını belirleme testine verdikleri cevapları derinlemesine inceleyebilmek için 'Bu soruya neden bu cevabı verdin?', 'Soruyu neden bu şekilde çözdün', 'Bu soruyu başka bir yol ile çözmen mümkün mü?' şeklinde sorular yöneltilmiştir. Görüşmelerin ayrıntılı bir şekilde analiz edilmesini sağlamak ve veri kaybını önlemek için, katılımcıların izni doğrultusunda görüşmeler ses kaydına alınmıştır.

2.4.Verilerin Analizi

Verilerin analizinde ilk olarak öğretmen adaylarının, kavram yanılgılarını belirleme testine verdikleri cevaplar ayrıntılı olarak incelenmiştir. Açık uçlu sorulara verilen cevaplar Çavuş-Erdem ve Gürbüz'ün (2017) geliştirdiği puanlama ölçeği dikkate alınarak değerlendirilmiştir. Tablo 1'de araştırmada kullanılan puanlama ölçeği yer almaktadır. Araştırmada nicel olarak toplanan veriler, betimsel analize tabii tutularak frekans ve yüzdelik tablolar oluşturulmuştur. Nicel veriler IBM SPSS Statistics 23.0 paket programı kullanılarak analiz edilmiştir.

Tablo 1. Açık Uçlu Soruları Puanlama Ölçeği

Değerlendirme Kriterleri	Açıklama	Puan
Doğru Cevap-Doğru Gerekçe	Tamamen doğru kabul edilen ifadeler	5
Yanlış Cevap-Doğru Gerekçe	Cevabı yanlış olup, açıklaması doğru olan ifadeler	4
Doğru Cevap-Kısmen Doğru Gerekçe	Cevabı doğru olup, geçerli gerekçenin bütün yönlerini içermeyen ifadeler	3
Yanlış Cevap Kısmen Doğru Gerekçe	Cevabı yanlış olup, geçerli gerekçenin bütün yönlerini içermeyen ifadeler	2
Doğru Cevap-Yanlış Gerekçe	Cevabı doğru olup, gerekçesinde doğru olmayan bilgiler içeren ifadeler	1
Yanlış Cevap-Yanlış Gerekçe	Cevabı yanlış olup, gerekçesinde doğru olmayan bilgiler içeren ifadeler	0
Doğru Cevap-Gerekçe Yok	Cevabı doğru olup, gerekçesi yazılmayan ifadeler	1
Yanlış Cevap-Gerekçe Yok	Cevabı yanlış olup, gerekçesi yazılmayan ifadeler	0
Boş Cevap-Gerekçe Yok	Cevabı boş olup, gerekçesi yazılmayan ifadeler	0

Yarı yapılandırılmış görüşmelerin analizinde betimsel analiz yöntemi kullanılmıştır. Betimsel analiz, çeşitli veri toplama teknikleri ile elde edilmiş verilerin önceden belirlenmiş bir çerçeveye göre özetlenmesini ve yorumlanmasını içeren bir analiz yöntemidir (Özdemir, 2010). Bu analiz türünde görüşme yapılan bireylerin görüşlerini çarpıcı bir biçimde yansıtabilmek amacıyla doğrudan alıntılara sık sık yer verilmektedir. Bu doğrultuda öğretmen adayları ile yapılan görüşmelerin ses kayıtları ayrıntılı bir şekilde analiz edilmiştir. Örneğin testte yer alan 6. sorunun altında yatan kavrayışı ortaya çıkarmak için görüşme formunda yer alan 3. sorunun analizi paralel bir şekilde gerçekleştirilmiştir. Kavram yanılgısı tespit edilen öğretmen adaylarının cevaplarının transkripleri oluşturulmuş ve araştırmada bazı cevapların transkriptlerine yer verilmiştir.

2.5.Araştırmanın Geçerliliği ve Güvenirliği

Bilimsel araştırmalarda geçerlik kavramı iç geçerlik ve dış geçerlik olarak iki şekilde incelenmektedir (Sezgin-Selçuk, 2019). İç geçerlik, araştırma sonuçlarının mevcut gerçekliği ortaya çıkarmadaki yeterliliği ile ilgili iken, dış geçerlik bir çalışmanın sonuçlarının farklı durumlara genellenebilirliği ile ilgilidir (Merriam, 2018). Bu bağlamda araştırmada iç geçerliliğin sağlanması adına katılımcı kaybı yaşanmamasına özen gösterilmiş, öğretmen adaylarının cevaplarını etkileyebilecek ortamlardan kaçınılmış, ölçme işlemi herkese aynı anda uygulanarak, uygulama için yeterli ve eşit süre verilmiştir. Araştırmanın dış geçerliğinin sağlanması amacıyla araştırmacı tarafından evreni temsil edecek nitelikte ve yansız bir şekilde örneklem seçimi gerçekleştirilmiştir. Katılımcıların yanıtları tarafsız olarak değerlendirilmiş ve uygulama sırasında öğretmen adaylarına hiçbir müdahalede bulunulmamıştır.

Güvenirlik bilimsel araştırmalarda sağlanması gereken birincil koşul olmasına karşın güvenirliğin yüksek olması geçerliğinde yüksek olması anlamına gelmemektedir (Sezgin-Selçuk, 2019). Ancak geçerliğin yüksek olması, güvenirliğin yüksek olmasını etkilemektedir. Dolayısıyla araştırmanın geçerliğini arttıracağı düşünülen bütün önlemler, araştırmanın güvenirliğini de arttıracaktır. Bunların yanı sıra güvenirliğinin arttırılması amacıyla veri toplama araçlarında ilgili konuya ilişkin uygun ve yeterli sayıda soruya yer verilmiştir. Öğretmen adaylarına uygulama yapılmadan önce gerekli açıklamalar yapılmış, hazırlanan testte yer alan soru ifadeleri herkes tarafından anlaşılır ve kesin cevaplı olmasına dikkat edilmiştir. Tüm bunlar dikkate alınarak hazırlanan kavram yanılgılarını belirleme testinin güvenirlik analizi için IBM SPSS Statistics 23.0 paket programı ile sonuçlar değerlendirilmiş ve alfa güvenirlik katsayısı 0.828 olarak bulunmuştur. Alfa değerinin 0.70 ve üzerinde çıkması ölçeğin güvenirliğinin yüksek olduğunu göstermektedir (Kılıç, 2016). Kavram yanılgılarını belirleme testinde ve görüşme formunda yer alan sorular birbirini tamamlayacak ve anlamlı bir bütün oluşturacak şekilde hazırlanarak, araştırmanın iç tutarlılığın kontrol edilmesi amaçlanmıştır. Ayrıca veri toplama araçlarının hazırlık aşamasında alanında uzman öğretim üyelerinin görüşlerine başvurularak, kapsam geçerliliğinin sağlanması amaçlanmıştır. Öğretim üyelerinin görüşleri doğrultusunda düzenlemeler yapılarak, veri toplama araçları uygulamaya hazır hale getirilmiştir.

BULGULAR

Araştırmada öğrencilerin çok değişkenli fonksiyonlarda limit ve süreklilik konusunda çeşitli kavram yanılgılarına sahip oldukları belirlenmiştir. Bu bölümde limit ve süreklilik konusuna ilişkin söz konusu yanılgılar ayrı ayrı sunulmaktadır.

3.1. Çok Değişkenli Fonksiyonların Limiti Konusunda Belirlenen Kavram Yanılgıları

Araştırmada öğretmen adaylarının, kavram yanılgılarını belirleme testine verdikleri cevaplar Tablo 1'de yer alan puanlama ölçeği dikkate alınarak değerlendirilmiştir. Değerlendirme sonucunda testte yer alan limit sorularına verilen öğrenci cevaplarının yüzde ve frekans değerleri Tablo 2'de sunulmuştur.

Tablo 2. Öğrencilerin Çok Değişkenli Fonksiyonlarda Limit Sorularına Verdiği Cevaplarla Oluşturulmuş Yüzde ve Frekans Tablosu

Anlama Düzeyi / Soru	Doğru Gerekçe		Kısmen Doğru Gerekçe		Yanlış Gerekçe		Gerekçe Yok		Toplam	
	f	%	f	%	f	%	f	%	f	%
1. $f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}{x^2+y^2}$	43	%55,2	9	%11,5	20	%25,6	6	%7,7	78	%100
2. $f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^4+y^4}$	29	%37,2	12	%15,4	20	%25,6	17	%21,8	78	%100
3. $f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(\frac{\pi}{6},0)}\frac{y.\tan(x-\frac{\pi}{3})}{\cot(x-\frac{\pi}{6})}$	17	%21,8	5	%6,4	15	%19,2	41	%52,6	78	%100
4. $f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\arcsin(xy)}{xy}$	8	%10,2	2	%2,6	29	%37,2	39	%50	78	%100
5. $f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{y.\sin x}{1-\cos(xy)}$	3	%3,8	13	%16,7	23	%29,5	39	%50	78	%100
6. $f(x)=\begin{cases}\frac{x^3y}{x^4+y^2}, & x=0\\ 0, & x\neq 0\end{cases}$ fonksiyonunun x=0 noktasındaki limitini bulunuz.	27	%34,6	1	%1,3	38	%48,7	12	%15,4	78	%100
7. $f(x,y)=\begin{cases}xy.\sin\left(\frac{1}{xy}\right), & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ fonksiyonunun (0,0) noktasındaki limitinin 0 olduğu doğru mudur?	14	%17,9	5	%6,4	26	%33,3	33	%42,4	78	%100

8.$\lim_{(x,y)\to(2,3)} f(x,y) = 5$ ise a)$f(2,3) = 5$'tir.	34	%43,6	10	%12,8	26	%33,3	8	%10,3	78	%100
b)f, $(x,y) = (2,3)$ noktasında süreklidir.	43	%55,2	18	%23,1	14	%17,9	3	%3,8	78	%100
c)f, $(x,y) = (2,3)$ için tanımlıdır.	32	%41,0	3	%3,8	36	%46,2	7	%9,0	78	%100

Tablo 2 incelendiğinde, doğru gerekçe sunan öğrenci oranının en yüksek %55,2 ile soru 1 ve 8b'de, en düşük %3,8 ile soru 5'te olduğu; kısmen doğru gerekçe sunan öğrenci oranının en yüksek %23,1 ile soru 8b'de, en düşük %1,3 oranıyla soru 6'da olduğu belirlenmiştir. Yanlış gerekçe sunan öğrenci cevapları incelendiğinde, en yüksek %48,7 ile 6. soruda, en düşük %17,9 ile 8b. soruda cevap verildiği görülmektedir. Gerekçe belirtmeyen cevaplarda ise en yüksek %52,6 ile 3. soruda, en düşük %3,8 oranında 8b. soruda cevap verildiği tespit edilmiştir. Buradan anlaşılacağı üzere öğretmen adaylarının neredeyse yarısının 1 ve 8b. sorularına doğru ve kısmen doğru cevap verdiği görülse de, diğer sorular incelendiğinde bu kategorideki cevap sayılarının nispeten düşük olduğu görülmektedir. Bunu takiben birçok soruda yanlış gerekçe sunan öğretmen adaylarının sayısının oldukça yüksek olduğu saptanmıştır.

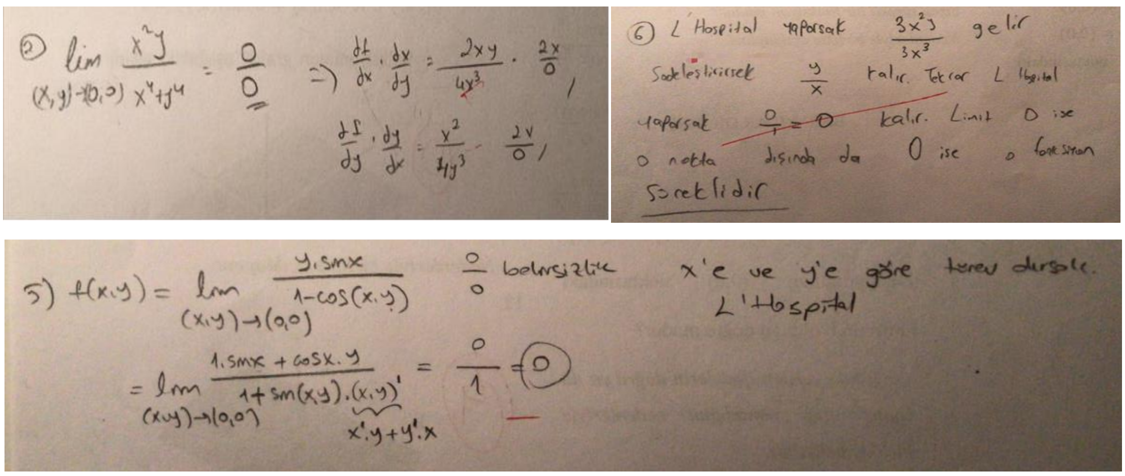
Tablo 2'de yer alan verilere ve öğrencilerin testte yer alan sorulara verdiği cevaplara dayanarak gerçekleştirilen görüşmeler sonucunda çok değişkenli fonksiyonların limiti konusunda tespit edilen kavram yanılgıları Tablo 3'te sunulmuştur.

Tablo 3. Çok Değişkenli Fonksiyonların Limiti Konusunda Tespit Edilen Kavram Yanılgıları

Belirli bir sınıfta işleyen kuralın diğer durumlarda da işliyormuş gibi düşünülmesine ilişkin yanılgılar
Çok değişkenli fonksiyonlarda limit aranan noktada yaklaşım ile ilgili yanılgılar
Limit alınacak çok değişkenli fonksiyona ilişkin yanılgılar
Çok değişkenli bir fonksiyonun limiti ve tanım kümesine dair kavram yanılgıları

3.1.1. Belirli Bir Sınıfta İşleyen Kuralın Diğer Durumlarda Da İşliyormuş Gibi Düşünülmesi

Araştırmada öğretmen adaylarının, tek değişkenli fonksiyonlarda $\frac{0}{0}$ ve $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizlik durumlarında kullanılan L'Hospital kuralının, çok değişkenli fonksiyonlarda da aynı belirsizlik durumlarında kullanılabileceği yanılgısına sahip oldukları belirlenmiştir. Bu duruma örnek olarak bazı öğretmen adaylarının cevapları Şekil 2'de sunulmuştur.



Şekil 2. 2, 5 ve 6. Sorulara Sırasıyla ÖA61,ÖA59, ÖA74'ün Verdiği Cevaplar

Cevaplar incelendiğinde, öğretmen adaylarının iki değişkenli fonksiyonlarda elde edilen $\frac{0}{0}$ belirsizliği sonucunda L'Hospital kuralını uyguladığı görülmektedir. 2. soruda ÖA61'in belirsizlik sonucunda x ve y'ye göre ayrı ayrı kısmi türev aldığı, 6. soruda ÖA74'ün x'e göre adi türev aldığı, 5. soruda ÖA59'un ise x ve y'ye göre adi türev aldığı belirlenmiştir. ÖA61 kodlu öğretmen adayı ile gerçekleştirilen görüşmenin bir kesiti aşağıda verilmiştir.

Araştırmacı: Tek değişkenli fonksiyonlarda limiti nasıl buluyoruz?

ÖA61: İşte değişkenleri yerine yazıyorduk. $\frac{0}{0}$ olmadığı sürece çıkan sonuç bize limiti veriyordu. $\frac{0}{0}$ olduğu takdirde L'Hospital kuralını uyguluyorduk ya da çarpanlara ayırma yoluyla limiti buluyorduk.

Araştırmacı: Peki, çok değişkenli fonksiyonlarda limiti nasıl buluyoruz?

ÖA61: Yine aynı işlemleri yapıyoruz ama sonsuza giden limit kavramı çıkıyor karşımıza galiba orda, çok emin olmamakla birlikte. Onunda kuralları vardı işte paydanın ve payın derecesiyle ilgili olan kurallar vardı.

Araştırmacı: İki değişkenli fonksiyonlarda limiti belirlerken hangi yolu kullanıyorsun?

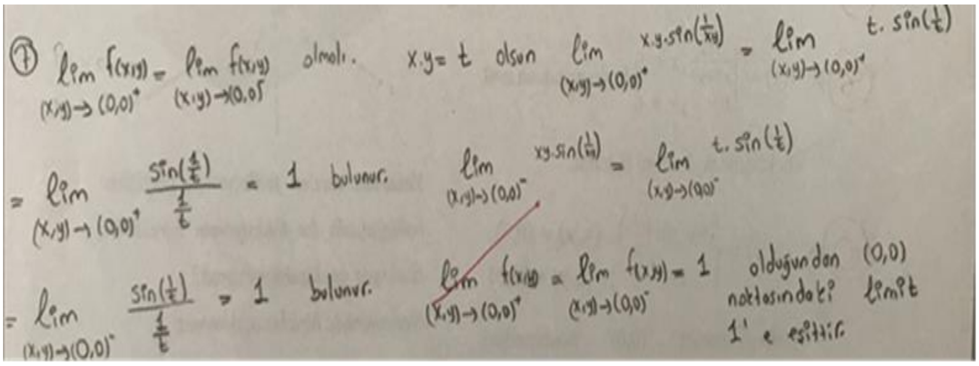
ÖA61: Az öncede bahsettiğim gibi payda bölü pay derecelerinin oranıyla buluyorduk, yine aynı şekilde yerine koyma metodu ile de bulabiliyoruz.

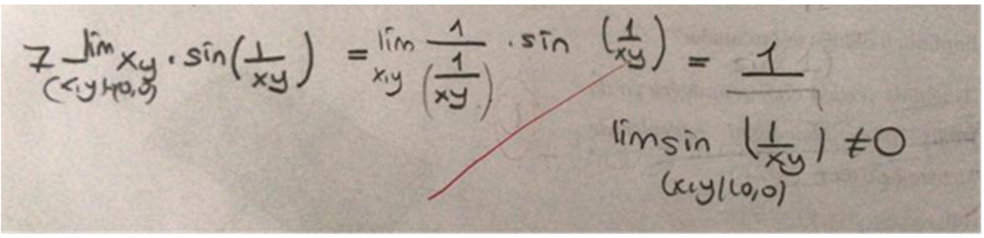
Araştırmacı: O zaman diyelim ki yerine koyma metodunda $\frac{0}{0}$ ya da $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizlerini elde ettin, o zaman hangi yolu izliyorsun?

ÖA61: L'Hospital düşünebiliriz ya da çarpanlara ayırma.

ÖA61 ile yapılan görüşme incelendiğinde, tek değişkenli fonksiyonlar için geçerli olan bir kuralın, çok değişkenli fonksiyonlara genellendiği görülmektedir. Buradan hareketle öğretmen adaylarının sahip olduğu "L'Hospital kuralının çok değişkenli fonksiyonlarda da uygulanabileceği" kavrayışı, kavram yanılgısına ve sonucunda da Şekil 1'de görülen hatalara sebep olduğunu belirtmek mümkündür.

Ayrıca araştırmada öğretmen adaylarının, $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ kuralını $\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$ durumuna genellemelerinden dolayı $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin\frac{1}{xy}}{\frac{1}{xy}}$ 'nin de 1 olduğu kavrayışına sahip oldukları belirlenmiştir. Ancak $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin\frac{1}{xy}}{\frac{1}{xy}}$ durumunda $\frac{1}{xy}=t$ dönüşümü yapıldığında, limit durumu $\lim_{t\to\infty}\frac{\sin t}{t}$ olmaktadır. Bu limitin değeri de 0'dan farklı olup, bu şekilde cevap veren öğrencilerin yanlış kavrayış içerisinde oldukları görülmektedir. Sözü geçen yanılgıya sahip olduğu tespit edilen iki öğretmen adayının cevabı Şekil 3'te verilmiştir.





Şekil 3. ÖA57 ve ÖA71'in Sırasıyla 7. Soruya Verdiği Cevaplar

ÖA57'nin cevabı incelendiğinde, $\frac{1}{\mathrm{xy}} = \mathrm{t}$ dönüşümünü yaparak fonksiyonu tek değişkenli fonksiyona dönüştürdüğü ancak $(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \to (0{,}0)$ iken $\mathrm{t} \to \infty$ dönüşümünü yapmadığı görülmektedir. Buradan hareketle öğrencinin değişken değişimine ilişkin yanlış bir kavrayışa sahip olduğu, bu kavrayışın ise $\lim_{(\mathrm{x},\mathrm{y})\to(0,0)} \frac{\sin\frac{1}{\mathrm{xy}}}{\frac{1}{\mathrm{xy}}} = 1$ yanılgısına sebep olduğu belirlenmiştir. ÖA71'in sahip olduğu kavrayışın anlaşılması adına aşağıda öğrenci ile gerçekleştirilen görüşmeden bir kesit sunulmuştur.

Araştırmacı: $\lim_{\mathrm{x}\to 0} \frac{\sin\mathrm{x}}{\mathrm{x}}$ *ile* $\lim_{\mathrm{x}\to 0} \frac{\sin\frac{1}{\mathrm{x}}}{\frac{1}{\mathrm{x}}}$ *limit değerlerini nasıl buluruz, iki limit değeri aynı mıdır?*

ÖA71: Şimdi şöyle, tek değişkenli fonksiyonlarda bir kural vardı, yani ismini tam hatırlamıyorum şimdi ama sin'in içindeki fonksiyon ile alttaki fonksiyon aynıysa ya da birbirleriyle orantılıysa ikisini oranladığımızda çıkan değer limite eşit oluyordu. O yüzden de 1 çıkıyor bence.

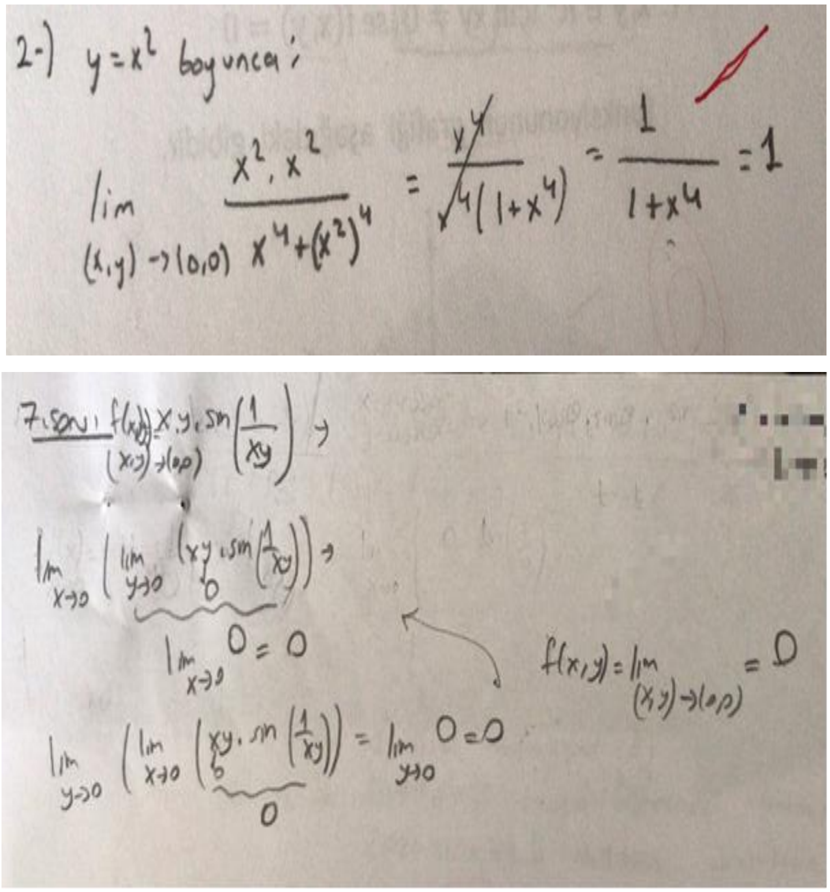
Araştırmacı: Anladım, o halde 7. soruda verilen iki değişkenli fonksiyonda da aynı kuralın geçerli olduğunu düşündüğün için mi sonucun 1 olduğu cevabını verdin?

ÖA71: Evet, aynen öyle.

Buradan anlaşılacağı üzere ÖA71 kodlu ve ona benzer şekilde cevap veren öğretmen adaylarının belirli bir durumda işleyen bir kuralı, diğer durumlarda da işliyormuş gibi düşünmelerinden dolayı kavram yanılgılarına sahip oldukları tespit edilmiştir. Bu yanılgının öğretmen adaylarının genelde karşılaştıkları fonksiyonların, sözü edilen kuralı uygulayabilecekleri şekilde verilmesinden kaynaklandığı düşünülmektedir.

3.1.2. Çok Değişkenli Fonksiyonlarda Limit Aranan Noktaya Yaklaşım İle İlgili Yanılgılar

Araştırmada öğretmen adaylarının, tek değişkenli fonksiyonların limitinin var olabilmesi için gerekli olan "x bağımsız değişkeninin herhangi x_0 noktasına yaklaşırken ancak ve yalnız o noktada sağdan-soldan limitleri varsa ve bu limitler eşitse, bir limiti vardır" şartının, çok değişkenli fonksiyonlarda limitin varlığı için de gerek ve yeter şart olacağı yanılgısına sahip oldukları belirlenmiştir. Bazı öğretmen adaylarının iki farklı doğru ile yaklaşımın, bazılarının ise bir eğri boyunca yaklaşımın yeterli olacağı yanılgısına sahip oldukları belirlenmiştir. Her ne kadar çok değişkenli fonksiyonlarda limit tanımı, tek değişkenli fonksiyonlarda limit tanımına benzese de çok değişkenli fonksiyonların limitinde dikkat edilmesi gereken (x, y) bağımsız değişkeninin bir (x_0, y_0) noktasına herhangi bir yönden yaklaşabileceğidir. Sözü geçen duruma örnek olarak iki öğretmen adayının cevapları Şekil 4'te sunulmuştur.



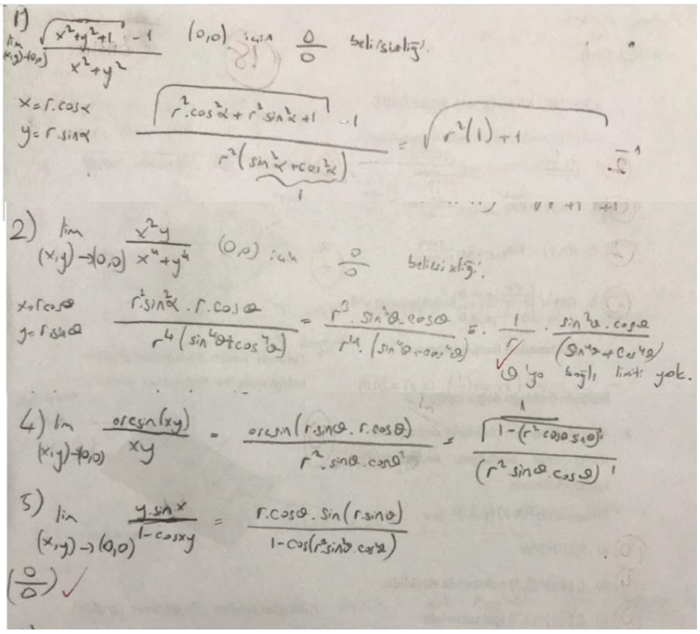
Şekil 4. 2 ve 7. Sorulara Sırasıyla ÖA26 ve ÖA6'nın Verdiği Cevaplar

Cevaplar incelendiğinde ÖA26'nın 2. soruda $y = x^2$ eğrisi boyunca yaklaşımın, ÖA6'nın ise 7. soruda sağdan ve soldan yaklaşımın iki değişkenli bir fonksiyonun limit değerini bulmak için yeterli olacağı kavrayışına sahip oldukları görülmektedir. Aynı öğrencilerin testte yer alan diğer limit sorularına verdikleri cevaplar incelendiğinde, tüm sorularda aynı kavrayışa sahip oldukları tespit edilmiştir. Bu durum öğrencilerin sahip oldukları kavram yanılgılarının ısrarcı davrandıklarını ortaya çıkarmaktadır. İki değişkenli fonksiyonlarda 3 boyutta yaklaşmanın, limiti bulmak için yeterli olacağı kavrayışına sahip ÖA34 ile gerçekleştirilen görüşmeden bir kesit aşağıda verilmiştir. Görüşme kesiti incelendiğinde öğretmen adayının iki değişkenli fonksiyonlarda 3 boyut olduğu için yalnızca 3 boyuttan yaklaşmanın yeterli olacağı yanılgısına sahip olduğu görülmektedir.

Araştırmacı: Tek ve iki değişkenli fonksiyonlarda limiti nasıl buluyoruz, aralarındaki farklılıklar nelerdir?

ÖA34: Tek değişkenli fonksiyonlarda o noktaya sağdan ve soldan yaklaşıyorsa limiti vardır diyorduk. Diğerinde 3 boyutlu olduğu için 3 boyutta da aynı yere yaklaşıyorsa limiti vardır diyebiliriz.

Teste verilen cevaplar incelendiğinde, tüm limit soruların aynı yöntem ile çözülebileceği yanılgısına sahip olan öğretmen adayları tespit edilmiştir. Bu duruma örnek olarak tüm soruları kutupsal koordinatlar yaklaşımı ile çözen Şekil 5'te ÖA34'ün cevabı sunularak hemen sonrasında kendisiyle yapılan görüşmeden bir kesit sunulmuştur.



Şekil 5. ÖA34’ün Sırasıyla 1, 2, 4 ve 5. Sorulara Verdiği Cevaplar

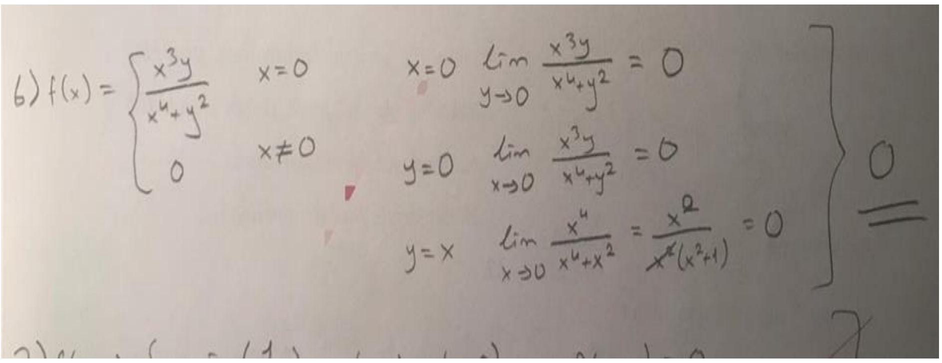
Araştırmacı: 1., 2., 4. ve 5. sorulardaki limit değerini bulmak için kutupsal koordinatları kullandığını görüyorum. Peki bu yol bizi her zaman sonuca ulaştırır mı?

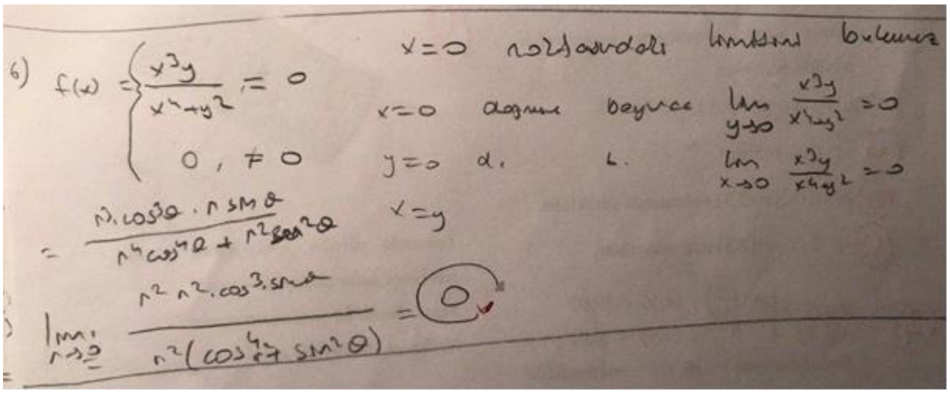
ÖA34: Evet yani x yerine rcosθ, y yerine rsinθ yazdım. Eğer sonuç θ’ya bağlı çıksaydı, bulamadım sonucu da, bu sefer limit yok dicektim. Eğer sabit bir sayı çıksaydı limiti vardır ve limiti odur dicektim. Ama sadeleştirmelerimde bulamadım sonucu.

Yukarıda verilen görüşmenin kesiti incelendiğinde öğrencinin kutupsal koordinatları kullanmanın onu her zaman sonuca ulaştıracağını ancak soruları çözememesinin nedeninin sadeleştirememesinden kaynaklandığını düşündüğü görülmektedir. Fakat kutupsal koordinatlar her zaman yararlı olmayabilir ve bizi yanlış sonuçlara götürebilir (Thomas, 2010). Dolayısıyla sözü geçen öğrencinin yanılgı içerisinde olduğu açıkça görülmektedir. Bu duruma öğrencilerin ders kitaplarında ve öğretim aşamasında karşılaştığı kutupsal koordinatlarla çözülen limit sorularının tamamında sonuca ulaşılmasının sebebiyet verdiği düşünülmektedir.

3.1.3. Limit Alınacak Çok Değişkenli Fonksiyona İlişkin Yanılgılar

Araştırmada öğretmen adaylarının, bağımlı ve bağımsız değişken kavramlarına ilişkin yanılgılara sahip oluğu belirlenmiştir. Kavram yanılgılarını belirleme testinde yer alan 6. soruda aslında tek değişkenli f(x) fonksiyonunun limitinin hesaplanması isteniyorken, birçok öğretmen adayının soruyu çok değişkenli fonksiyonlarda limitin hesaplanması için kullanılan ardışık limit ya da kutupsal koordinatlar yolu ile çözdüğü görülmüştür. Bu duruma örnek olarak Şekil 6’da 2 öğretmen adayının cevabı sunulmuştur.





Şekil 6. 6. Soruya Sırasıyla ÖA78 ve ÖA17'nin Verdiği Cevaplar

Bu şekilde cevap veren öğretmen adaylarının yaptıkları hatanın, değişken kavramına ilişkin kavram yanılgılarından mı yoksa dikkatsizlikten mi kaynaklandığının anlaşılması adına görüşmelerde öğrencilere bağımlı ve bağımsız değişken kavramlarına ilişkin sorular sorulmuştur. ÖA56 ile yapılan görüşmenin bir kesiti aşağıda sunulmuştur.

Araştırmacı: $g(x) = x^2.cosy$ *fonksiyonunun kaç tane bağımsız değişkeni vardır?*

ÖA56: Bağımsız değişkeni? Iıı, yani 2 tane.

Araştırmacı: Peki, $t(x, y) = x^2.cosy$ *fonksiyonunun kaç tane bağımsız değişkeni vardır?*

ÖA56: Pardon diğerinde 1 tane, bunda 2 tane.

Araştırmacı: O halde $z(x, y, z) = x^2.cosy$ *fonksiyonunun kaç tane bağımsız değişkeni vardır?*

ÖA56: Bunda da 3 tane diyeceğim ama bence yanlış oldu. Evet evet bunda da 2 tane.

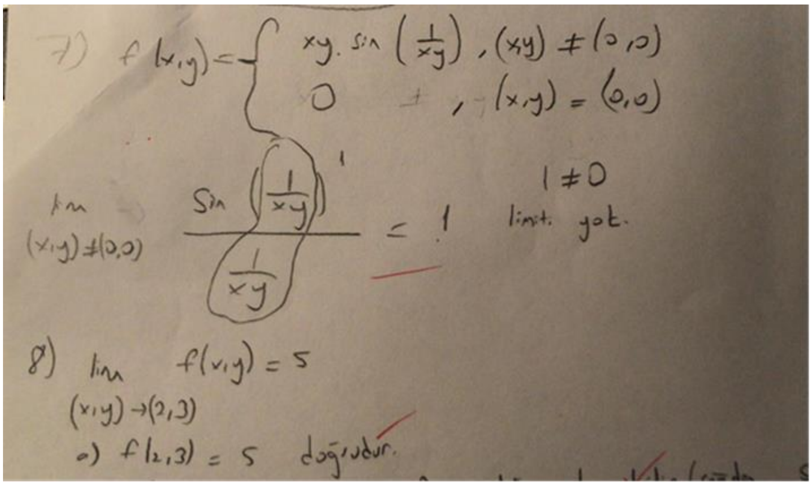
Araştırmacı: Tamam o zaman, bu soruda verilen fonksiyon (testte yer alan 6. soru gösterilir), kaç tane bağımsız değişkene sahiptir?

ÖA56: 2, evet 2 değişkenli o yüzden ardışık limit yöntemini kullandım.

Yukarıda verilen görüşmenin kesiti incelendiğinde ÖA56'nın, 6. soruda yer alan f(x) fonksiyonunun denklemindeki y sabitinin, bağımsız değişken olduğu ve dolayısıyla bu fonksiyonun 2 değişkenli olduğu kavrayışına sahip olduğu görülmektedir. Görüşme yapılan diğer dört öğrencinin de benzer kavrayışlara sahip olduğu ve soruda verilen tek değişkenli fonksiyonu, iki değişkenli baz alarak işlem yaptığı belirlenmiştir. Sabit, değişken ve bilinmeyen kavramlarına ilişkin öğrencilerin sahip olduğu yanlış kavrayışların, limit konusunda sistematik hata yapmalarına neden olduğu görülmektedir. Bu hatanın kaynağının soruda sabit olarak verilen y bilinmeyeninin, değişken olduğuna ilişkin yanlış kavrayışın bir sonucu olduğu söylenebilir.

3.1.4. Çok Değişkenli Bir Fonksiyonun Limiti Ve Tanım Kümesine Dair Kavram Yanılgıları

Çok değişkenli bir fonksiyonun limiti ile bu fonksiyonun tanım kümesi arasındaki ilişki ile ilgili olarak öğrencilerin çeşitli kavram yanılgılarına sahip oldukları belirlenmiştir. Bunlar, çok değişkenli fonksiyonun limit alınan noktadaki değeri ile limit değerinin eşit olması, limit alınan fonksiyonun sürekli olması gerektiği ve limit alınan noktanın fonksiyonun tanım kümesinde yer alması gerektiği kavram yanılgılarıdır. Bu yanılgılardan çok değişkenli fonksiyonun limit alınan noktadaki değeri ile limit değerinin eşit olması gerektiği yanılgısına sahip olan öğretmen adayının cevabı Şekil 7'de yer almaktadır.



Şekil 7. ÖA34'ün Sırasıyla 7 ve 8a. Sorularına Verdiği Cevaplar

Şekil 7 incelendiğinde, ÖA34, 8a. soruya $\lim_{(x,y)\to(2,3)} f(x,y) = 5$ ise $f(2,3) = 5$ olması gerektiği cevabını verdiği görülmektedir. Öğretmen adayının verdiği bu cevabı destekleyecek şekilde 7. soruda ilgili fonksiyonun limit değerinin 1 fakat fonksiyonun o noktadaki değerinin 0 olmasından dolayı fonksiyonun limiti yoktur cevabını vermiştir. Fakat çok değişkenli fonksiyonlarda limitin varlığı, limit alınan noktadaki değer ile limit değerinin eşit olmasını gerektirmemektedir. Bu öğrenci ile gerçekleştirilen görüşmenin bir kesitine aşağıda yer verilmiştir. Buradan hareketle, ÖA34 ve benzer kavrayışa sahip olan öğretmen adaylarının çok değişkenli fonksiyonlarda limitin varlığının, limit alınan noktadaki değer ile limit değerinin eşit olması gerektirdiği yanılgısına sahip oldukları tespit edilmiştir.

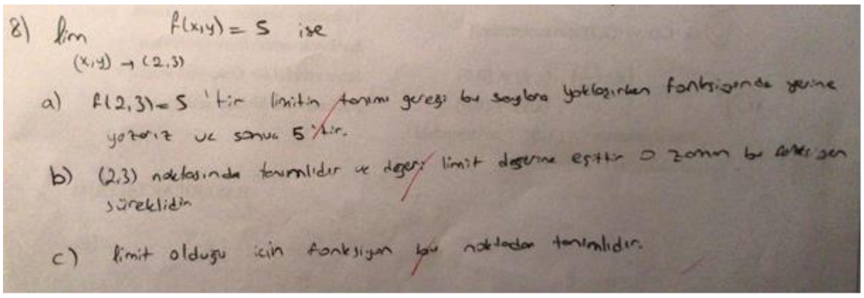
Araştırmacı: 7. soruda verilen fonksiyonun sonucu, fonksiyonun o noktadaki değerinden farklı çıktığı için mi limit yoktur cevabını verdin?

ÖA34: Evet, öyle dedim çünkü $(x,y) = (0,0)$ *iken 0 ise limitinin 0 olması lazım diye düşündüm. Sonuç 1 çıktığı için de limit yoktur dedim…*

Araştırmacı: Peki, çok değişkenli bir fonksiyonun limiti mevcutsa fonksiyonun o noktadaki değeri limit değerine eşit midir?

ÖA34: Evet eşittir.

Çok değişkenli fonksiyonlarda limitin varlığının, limit alınan noktadaki değer ile limit değerinin eşit olması gerektirdiği yanılgısı aslında fonksiyonun limit alınan noktada tanımlı olmasını gerektirmekte ve bu iki şart fonksiyonun sürekliliğini sağlamaktadır. Dolayısıyla araştırmada tespit edilen, limit alınan çok değişkenli fonksiyonun sürekli olması gerektiği ve limit alınan noktanın fonksiyonun tanım kümesinde yer alması gerektiği kavram yanılgıları birbirleriyle yakından ilişkilidir. Ancak çok değişkenli bir fonksiyonun bir noktada limitinin olması, o noktada tanımlı olmasını veya sürekli olmasını gerektirmemektedir. Bu duruma örnek olarak Şekil 8'de ÖA58'in cevabı sunulmuştur. ÖA58 ile gerçekleştirilen görüşme, Şekil 8'de yer alan cevaplarını destekler niteliktedir. 8. soruya yanlış gerekçe sunan öğretmen adaylarının tamamının benzer kavrayışlara sahip olduğu belirlenmiştir. Bu durumun öğrencilere limit konusu grafikler üzerinde açıklandığında, genellikle sürekli fonksiyonların grafiklerinin ele alınmasından, dolayısıyla öğrenciler yaygın olarak fonksiyonun limitinin olması için fonksiyonun sürekli olması gerektiğine inanmalarından kaynaklandığı düşünülmektedir (Özmantar ve Yeşildere, 2015).

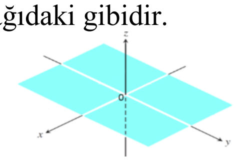


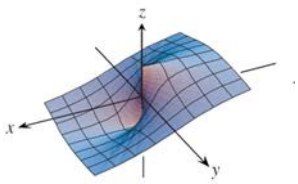
Şekil 8. ÖA58'in Sırasıyla 8a, 8b ve 8c. Sorularına Verdiği Cevaplar

3.2. Çok Değişkenli Fonksiyonların Sürekliliği Konusunda Belirlenen Kavram Yanılgıları

Araştırmada öğretmen adaylarının, kavram yanılgılarını belirleme testine verdikleri cevaplar Tablo 1'de yer alan puanlama ölçeği dikkate alınarak değerlendirilmiştir. Değerlendirme sonucunda testte yer alan süreklilik sorularına verilen öğrenci cevaplarının yüzde ve frekans değerleri Tablo 4'te sunulmuştur.

Tablo 4. Öğrencilerin Çok Değişkenli Fonksiyonlarda Süreklilik Sorularına Verdiği Cevaplarla Oluşturulmuş Yüzde Ve Frekans Tablosu

Anlama Düzeyi / Soru	Doğru Gerekçe		Kısmen Doğru Gerekçe		Yanlış Gerekçe		Gerekçe Yok		Toplam	
	f	%	f	%	f	%	f	%	f	%
9.$f(x,y) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{xy}\right), & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ fonksiyonunun (0,0) noktasındaki sürekliliğini araştırınız.	9	%11,5	23	%29,5	16	%20,5	30	%38,5	78	%100
10.$f(t,k) = \begin{cases} \frac{tk-k^2}{\sqrt{t}+\sqrt{k}}, & t > 0, k > 0 \\ 2, & (t,k) = (0,0) \end{cases}$ fonksiyonu (0,0) noktasında sürekli midir?	40	%51,3	8	%10,3	16	%20,5	14	%17,9	78	%100
11.$x,y \in R^2$ için $xy \neq 0$ ise $f(x,y) = 0$ fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir.  Yukarıda verilen fonksiyonun grafiğine baktığınızda bu fonksiyonun sürekliliği hakkında ne düşünüyorsunuz? Nedenleriyle birlikte açıklayınız.	8	%10,3	6	%7,7	52	%66,6	12	%15,4	78	%100

12.  Yukarıda verilen fonksiyonun grafiği hakkında neler düşünüyorsunuz? Sizce sürekli bir fonksiyon mudur? Nedenleriyle birlikte açıklayınız.	0	%0,0	21	%27,0	42	%53,8	15	%19,2	78	%100

Tablo 4 incelendiğinde, doğru gerekçe sunan öğrenci oranının en yüksek %51,3 ile soru 10, en düşük hiçbir öğrencinin doğru gerekçe sunamadığı soru 12 olduğu; kısmen doğru gerekçe sunan öğrenci oranının en yüksek %29,5 ile soru 9'da, en düşük %7,7 ile soru 11'de olduğu belirlenmiştir. Yanlış gerekçe sunan öğrenci cevapları incelendiğinde en yüksek %66,6 ile 11. soruda, en düşük %20,5 ile 9 ve 10. sorulara cevap verildiği görülmektedir. Gerekçe belirtmeyen cevaplar ise en yüksek %38,5 ile 9. soruda, en düşük %15,4 oranında 11. soruda tespit edilmiştir. Buradan hareketle her ne kadar öğretmen adaylarının yarısı 10. soruya doğru cevap verseler de, diğer sorular incelendiğinde yanlış gerekçe ve gerekçe yok kategorisinde yer alan cevap sayısının oldukça fazla olduğu görülmektedir. Ayrıca özellikle grafik sorularında (11 ve 12. sorular) doğru ya da kısmen doğru gerekçe sunan öğretmen adaylarının sayısının az olduğu dikkat çekmektedir.

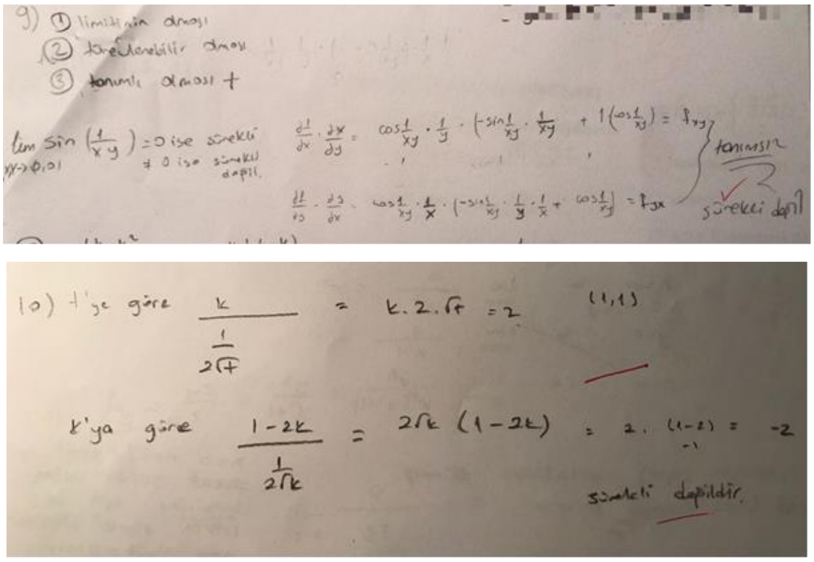
Öğretmen adaylarının çok değişkenli fonksiyonların limiti konusundaki kavram yanılgılarının süreklilik kavramlarıyla da yakından ilişkili olduğunu söylenebilir. Çünkü fonksiyonun bir noktada sürekliliğinden bahsedilebilmesi için fonksiyon o noktada tanımlı olması, o noktada limitinin var olması ve bu limit değeri fonksiyonun o noktadaki değerine eşit olması gerekmektedir. Dolayısıyla çok değişkenli bir fonksiyonun sürekliliği için limit bir ön koşul olarak verildiğinden limit konusunda tespit edilen kavram yanılgıları ile süreklilik konusunda da karşılaşılmıştır. Bu yanılgılar dışında, Tablo 4'te yer alan verilere ve öğrencilerin testte yer alan sorulara verdiği cevaplara dayanarak gerçekleştirilen görüşmeler sonucunda çok değişkenli fonksiyonların sürekliliği konusunda tespit edilen kavram yanılgıları Tablo 5'te sunulmuştur.

Tablo 5. Çok Değişkenli Fonksiyonların Sürekliliği Konusunda Tespit Edilen Kavram Yanılgıları

Çok değişkenli bir fonksiyonun süreklilik koşullarına ilişkin yanılgılar
Sürekli fonksiyonların grafiklerine ilişkin kavram yanılgıları

3.2.1. Çok Değişkenli Bir Fonksiyonun Süreklilik Koşullarına İlişkin Yanılgılar

Yapılan görüşmeler sonucunda öğretmen adaylarının çok değişkenli fonksiyonların sürekliliği ile ilgili kavram bilgilerini, tek değişkenli fonksiyonlarda bu kavramlarla ilgili oluşturdukları kavram bilgilerinden yola çıkarak oluşturmaya çalıştıkları görülmüştür. Örneğin tek değişkenli fonksiyonlar için geçerli olan "Bir f fonksiyonunun bir noktada türevi var ise f fonksiyonu bu noktada süreklidir" koşulunun, "Eğer çok değişkenli bir fonksiyonun kısmi türevleri varsa süreklidir” olarak çok değişkenli fonksiyonlara genellendiği belirlenmiştir. Fakat herhangi çok değişkenli bir fonksiyonun, bir noktada sürekli olması gerekmeden, tüm bağımsız değişkenlerine göre kısmi türevleri var olabilir. Bu kavrayışa sahip olan iki öğretmen adayının 9. ve 10. soruya vermiş olduğu cevap Şekil 9’da sunulmuştur.



Şekil 9. ÖA61 ve ÖA32’nin Sırasıyla 10 ve 11. Sorulara Verdiği Cevaplar

Şekil 9’da yer alan iki öğretmen adayının da 9. ve 10. sorularda istenilen fonksiyonların sürekliliğini hesaplamak için kısmi türev aldıkları görülmektedir. Bu şekilde cevap veren öğretmen adaylarının kavrayış biçimlerinin daha net anlaşılması adına aşağıda ÖA61 ile gerçekleştirilen görüşmenin bir kesitine yer verilmiştir.

Araştırmacı: Tek değişkenli fonksiyonlarda süreklilik ile çok değişkenli fonksiyonlarda süreklilik tanımını yapar mısın?

ÖA61: Sürekli olması için üç şartımız vardı. Türevlenebilir olması gerekiyor, o noktada tanımlı olması gerekiyor ve ıı diğer şartı unuttum şuan da.

Araştırmacı: Peki ikisi arasındaki farktan bahsedebilir misin?

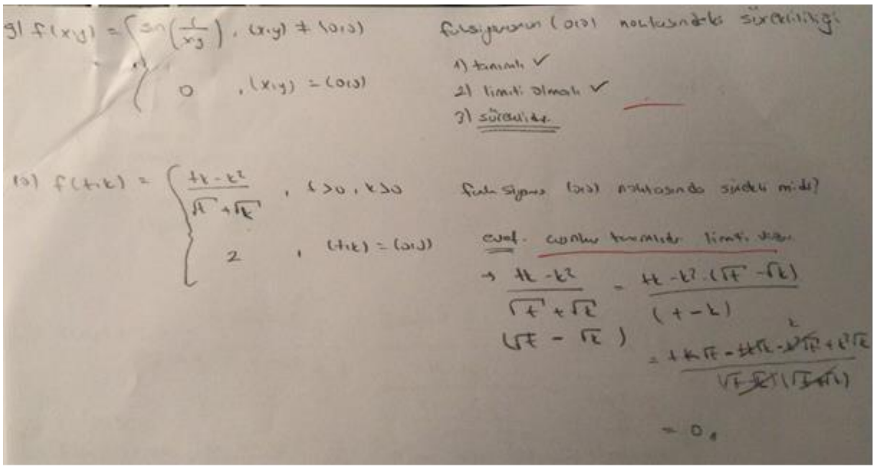
ÖA61: R^2’de sonuçta bir doğru çiziyoruz, R^3’te düzlem oluyor. Iıı..

Araştırmacı: Peki tek değişkenli fonksiyonlar için geçerli olan şartlar, çok değişkenli fonksiyonlar için de aynı mıdır?

ÖA61: Tabi aynıdır.

ÖA61 ile yapılan görüşme incelendiğinde, “Çok değişkenli bir fonksiyon eğer türevlenebiliyorsa süreklidir” kavram yanılgısına, benzer şekilde cevap veren ÖA34 ile gerçekleştirilen görüşmede ise öğrencinin “Çok değişkenli bir fonksiyonun kısmi türevleri varsa süreklidir” kavram yanılgısına sahip olduğu tespit edilmiştir. Benzer kavrayışa sahip olan öğretmen adaylarının kavram yanılgılarının tek değişkenli fonksiyonlar için geçerli olan bir koşulun çok değişkenli fonksiyonlara genellenmesinin bir sonucu olduğu söylenebilir.

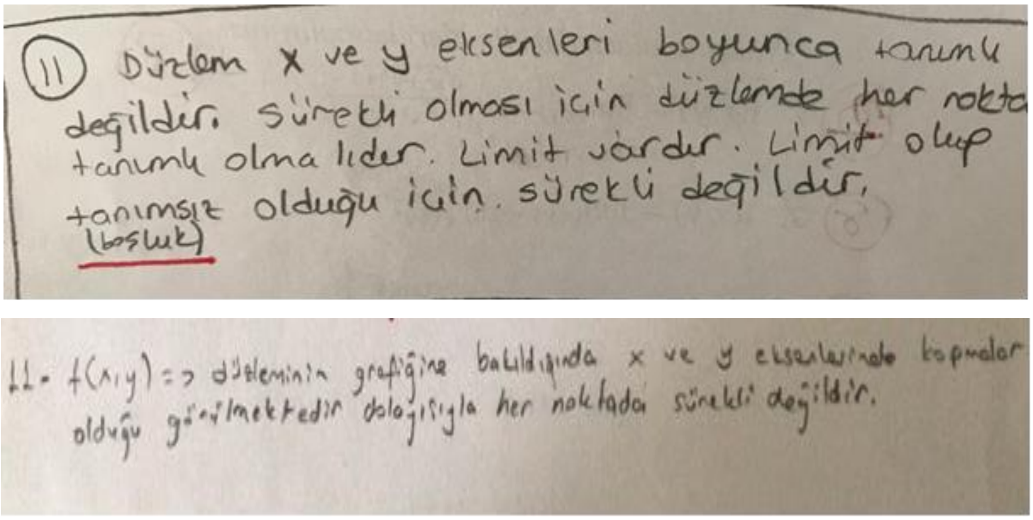
Çok değişkenli bir fonksiyonun süreklilik koşullarına ilişkin bir diğer yanılgının ise “Çok değişkenli bir fonksiyonun herhangi bir noktada limitinin var olması ve o noktada tanımlı olmasının fonksiyonun o noktadaki sürekliliği için yeter koşul olduğu” olarak belirlenmiştir. Bu yanılgıya sahip olduğu tespit edilen ÖA30’un 9. ve 10. sorulara verdiği cevaba Şekil 10’da yer verilmiştir. Bu şekilde cevap veren öğretmen adaylarının çok değişkenli bir fonksiyonun sürekliliğinin sağlanması için gereken üç şartı, iki şarta özellemelerinden kaynaklı kavram yanılgısına sahip oldukları söylenebilir.



Şekil 10. ÖA30’un Sırasıyla 9 ve 10. Sorulara Verdiği Cevap

3.2.2. Sürekli Fonksiyonların Grafiklerine İlişkin Kavram Yanılgıları

Süreklilik ifadesini günlük yaşamda “Bütün gün sürekli yağmur yağdı” (yani yağmurda kesinti olmadı) şeklinde yapılandıran bir öğrenci, matematiksel süreklilik ifadesinin boşluksuz ya da aralıksız olması gerektiği anlayışına sahip olabilir (Yitmez, 2021). Bu anlayış öğrencide “Sürekli fonksiyonların grafiğinin tek parçadan oluşması gerektiği” ya da “Grafiği kalemi kağıttan kaldırmadan tek parça çizilmesi gerektiği” şeklinde bir kavrayış geliştirmesine neden olmaktadır (Cornu, 2002; Özmantar ve Yeşildere, 2015). Ancak sözü edilen kavrayış, çoğu sürekli fonksiyon için doğru olsa da bütün sürekli fonksiyonlar için doğru değildir. Örneğin araştırmanın 11. sorusunda fonksiyonun grafiği kesikli olmasına karşın, fonksiyon tanım kümesinde $xy\neq0$ noktalarını bulundurmadığı için fonksiyonun sürekli olduğunu söylenebilir. Dolayısıyla araştırmanın 11. sorusunda böyle bir yanılgının tespit edilmesi amaçlanmış ve yalnızca 8 öğrencinin soruda yer alan fonksiyonun sürekliliğine ilişkin doğru gerekçe sunduğu belirlenmiştir (Tablo 4). Bu kavrayışa sahip olan iki öğretmen adayının 11. soruya vermiş olduğu cevap Şekil 11’de sunulmuştur.



Şekil 11. ÖA3 ve ÖA13’ ün Sırasıyla 11. Soruya Verdiği Cevap

Şekil 11’de yer alan öğretmen adaylarının cevapları incelendiğinde sürekli fonksiyonların grafiklerinin boşluksuz veya aralıksız olması gerektiği yanılgısına sahip oldukları söylenebilir. Aynı yanılgıya sahip olduğu tespit edilen ÖA17 ile gerçekleştirilen görüşmenin bir kesiti aşağıda sunulmuştur.

Araştırmacı: İki değişkenli bir fonksiyonun sürekli olup olmadığını grafiğinden nasıl anlayabiliriz?

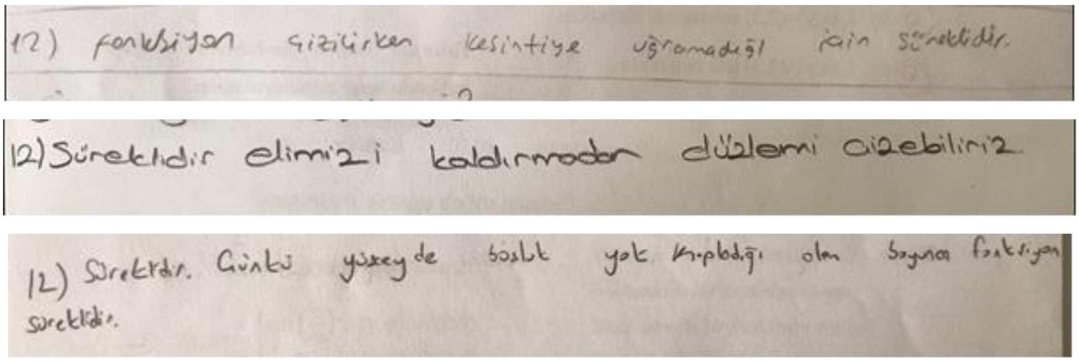
ÖA17: Düzlem delikli yapıya sahip değilse, ben kendimce süreklidir derim.

Araştırmacı: Anladım, o halde 11. sorunun grafiği kesikli olduğu için mi süreksiz olduğunu düşünüyorsun?

ÖA17: Evet, oralarda tanımlı olmadığı için sürekli değildir dedim. O $(x, 0)$ ve $(0, y)$ noktalarını sağlayan yerlerde sürekli olmadığı için öyle düşündüm.

Öğretmen adaylarının sürekli fonksiyonlara dair bu şekilde bir kavrayışa sahip olması sürekli fonksiyonları, grafiği sadece aralıksız ve boşluksuz olarak çizilebilen fonksiyonlara özellemesine neden olur. Bu durumun süreklilik kavramının informal kullanımından kaynaklandığı düşünülmektedir.

Araştırmanın 12. sorusunda ise fonksiyonun cebirsel ifadesi verilmeden, öğrencilerin üç boyutlu bir grafiği yorumlaması istenmiştir. Cevaplar incelendiğinde hiçbir öğretmen adayının doğru gerekçe sunamadığı ve yalnızca 21 kişinin kısmen doğru gerekçe sunduğu tespit edilmiştir (Tablo 4). Kısmen doğru gerekçe sunan öğretmen adayları, fonksiyonun (0,0) noktasında sıçrama olduğu için süreklilikten söz edilemeyeceği diğer noktalarda ise fonksiyonun sürekli olduğu belirtmişlerdir. Fakat hiçbir öğretmen adayı tanım kümesi verilmeyen bu fonksiyon için eğer bu nokta tanım kümesine dahil değilse fonksiyon sürekli, dahil ise fonksiyon süreksizdir yorumunu yapamamıştır. Soruya yanlış gerekçe sunan birçok öğretmen adayı ise "Grafikte boşluk ya da kesinti olmadığı için fonksiyon süreklidir" ya da "Grafiği elimizi kaldırmadan çizebildiğimiz için süreklidir" yanılgılarına sahip oldukları belirlenmiştir. Kavram yanılgısı tespit edilen öğretmen adaylarının cevapları Şekil 12'de sunulmuştur. Anlaşılacağı üzere süreklilik için kavramsal anlayışa sahip olmayan öğretmen adayları grafiği yorumlamakta zorlanmaktadırlar ve çeşitli kavram yanılgılarına sahiptirler. Benzer kavram yanılgıları 11. soruda da gözlemlenmiş olup, bu yanılgıların öğrencilerin grafik sorularında yer alan boşluk, sıçrama gibi süreksizliğe neden olan durumları anlamlandırmamalarının bir sonucu olduğu söylenebilir.



Şekil 12. ÖA40, ÖA27 ve ÖA34'ün Sırasıyla 12. Soruya Verdiği Cevaplar

TARTIŞMA, SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu araştırmada ilköğretim matematik öğretmenliği lisans öğrencilerinin çok değişkenli fonksiyonların limiti ve sürekliliği konusundaki kavram yanılgıları incelenmiştir. Araştırma karma araştırma desenlerinden sıralı dönüşümsel tasarım üzerine temellendirilmiştir. Araştırmada nicel verilerin toplanması için araştırmacılar tarafından geliştirilen kavram yanılgılarını belirleme testi, nitel verilerin toplanması için ise yarı yapılandırılmış görüşme formu kullanılmıştır. Yapılan incelemeler sonucunda öğrencilerin çok değişkenli fonksiyonların limiti ve sürekliliği konusunda çeşitli kavram yanılgılarına sahip oldukları belirlenmiştir.

Araştırmada öğretmen adaylarının tek değişkenli fonksiyonlarda $\frac{0}{0}$ ve $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizlik durumlarında kullanılan L'Hospital kuralının, çok değişkenli fonksiyonlarda da aynı belirsizlik durumlarında kullanılabileceği kavram yanılgısına sahip oldukları tespit edilmiştir. Öğrencilerle belirsizlik durumlarını anlamlandırmak yerine onlara takip etmeleri gereken bir dizi yol ya da yöntemler göstermek, limitlerde belirsizlik durumunun anlaşılmasına engel olabilmekte hatta öğrencilerin matematiksel limiti bir yığın cebirsel işlem yapmakla eş görmelerine neden olabilmektedir (Özmantar ve Yeşildere, 2015). Buradan hareketle bu yanılgının, öğrencilerin belirsizlik durumlarını anlamlandırmadan, kuralı ezberlemelerinden kaynaklandığı düşünülmektedir. Ezberlenen kavramlar içselleştirilemediği için anlamlı öğrenme gerçekleşmemekte ve bu durum yanlış anlamalara veya yanılgılara sebep olabilmektedir. Tarihsel gelişim sürecinde matematikçilerin de zorluklarla karşılaştığı belirsizlik ve tanımsızlık kavramları, öğrenciler için anlaşılması güç kavramlardandır (Özmantar, 2015). Dolayısıyla öğrencilerin belirsizlik ve tanımsızlık kavramlarını anlamlandırması, bu kavramları içerisinde barındıran limit, süreklilik, türev, integral gibi kavramların anlamlı öğrenmelerinin gerçekleşmesi açısından oldukça önemlidir.

Çok değişkenli fonksiyonlarda limit tanımı, tek değişkenli fonksiyonların formel olmayan tanımına benzese de dikkat edilmesi gereken en önemli nokta çok değişkenli fonksiyonlarda, herhangi bir noktaya yeterince yakın tüm noktaların herhangi bir yönden yaklaşabileceğidir. Fakat araştırmada çok değişkenli fonksiyonlarda limit aranan noktada yaklaşım ile ilgili yanılgılar incelendiğinde, limitin varlığı için $\lim_{x \to 0}(\lim_{y \to 0} f(x,y))$, $\lim_{y \to 0}(\lim_{x \to 0} f(x,y))$ şeklinde sağdan ve soldan yaklaşım sonucu elde edilen limitlerin yeterli olacağı yanılgısı tespit edilmiştir. Bu yanılgının, öğretmen adaylarının tek değişkenli fonksiyonlarda limitin varlığı için gerekli olan "x bağımsız değişkeninin herhangi x_0 noktasına yaklaşırken ancak ve yalnız o noktada sağdan-soldan limitleri varsa ve bu limitler eşitse, bir limiti vardır" koşulunun, çok değişkenli fonksiyonlara genellemelerinin bir sonucu olduğu düşünülmektedir. Diğer bir deyişle öğrencilerin daha önce sahip oldukları kavramlara ilişkin bilgilerinin, yeni edinilen bilgilerle değiştirilerek, karıştırılarak ya da kişisel kavramlarını oluşturmak için uyarlanarak (Cornu, 1991) kavram yanılgılarının oluşumuna sebebiyet vermektedir. Bu durum öğretim aşamasında öğrencilerin ön bilgilerini dikkate alarak, tek değişkenli fonksiyonlar ile çok değişkenli fonksiyonları karşılaştırılmalı olarak anlatılması gerekliliğini ortaya koymaktadır. Ayrıca öğretmen adaylarından bazılarının iki değişkenli fonksiyonların limitini hesaplamak için $\lim_{y \to x} f(x,y)$, $\lim_{y \to 2x} f(x,y)$ şeklinde iki farklı doğru ile yaklaşımın, bazılarının ise $\lim_{y \to x^2} f(x,y)$ şeklinde bir eğri boyunca yaklaşımın yeterli olacağı yanılgısına sahip oldukları belirlenmiştir. Araştırmada elde edilen bu bulgular, Biber ve Argün'ün (2012) tek ve iki değişkenli fonksiyonların limiti konusundaki kavram bilgilerinin incelendiği çalışmasının bulguları ile benzerlik göstermekte olup, birbirini destekler niteliktedir. Sözü geçen bu kavram yanılgılarının çok değişkenli fonksiyonlarda limitin öğretim aşamasında, bir noktaya yeterince yakın tüm noktaların herhangi bir yönden yaklaşabileceğinin vurgulanmamasından kaynaklandığı düşünülmektedir. Dolayısıyla öğretim aşamasında problemler seçilirken öğrencilerin hatalarının sürekli tekrar edebileceği problemlerden kaçınılarak onlara hatalarının farkına varabilecekleri bilişsel çatışmaya sebep olabilecek problemler sunulmalıdır (Jones ve Tanner, 2000). Bu sayede öğrenciler çok değişkenli fonksiyonların limiti hesaplanırken yalnızca bir veya iki eğri boyunca yaklaşmanın yeterli olmayacağının fark edecek ve sahip oldukları yanılgılar ile yüzleşeceklerdir.

Araştırmada kavram yanılgılarını belirleme testinde yer alan bütün limit sorularının kutupsal koordinatlar yaklaşımı ile çözmeye çalışan öğretmen adayları olduğu gibi, ardışık limit yöntemini benimseyen öğretmen adaylarının diğer sorularda da ardışık limit yöntemini kullandığı belirlenmiştir. Bu durum öğrencilerin, çözüm yönteminin sonuç vermediği durumlarda farklı çözümler getirebilecek kadar bilgi birikimine sahip olmadığını göstermektedir. Ayrıca öğretmen adaylarının benimsedikleri çözüm yöntemini tüm durumlarda kullanabilecekmiş gibi genelleme yapmalarından dolayı kavram yanılgısına sahip oldukları belirlenmiştir. Bu durum kavram yanılgıları giderilmediği sürece güçlü ve ısrarcı özelliğe sahip olduğunu göstermektedir. Hammer'a (1996) göre kavram yanılgılarının çoğu geleneksel metotlarla ortadan kaldırılamayacak kadar ısrarcıdırlar. Dolayısıyla kavram yanılgılarının üstesinden gelebilmek için öğrencilere yanlış kavrayışlarını genelleyemeyeceği sorular sorularak, kavramsal şemalarının yeniden yapılandırılması gerekmektedir (Lannin, Barker ve Townsend, 2007).

Araştırmada öğretmen adaylarının bağımlı ve bağımsız değişken kavramlarına ilişkin kavram yanılgılarına sahip oldukları belirlenmiştir. Öğrencilerin limit kavramını oluşturması için ön bilgilerindeki bu yanılgı, kazandırılması istenen çok değişkenli fonksiyonlarda limit kavramıyla çatışarak, yeni öğrenmelerini engellemekle birlikte kavram yanılgılarının oluşumuna da neden olmaktadır. Benzer şekilde Yitmez'in (2021) çalışmasında öğretmen adaylarının değişken kavramına ilişkin kavram yanılgılarının kısmi türev konusunda yeni yanılgılara yol açtığı tespit edilmiştir. Barak (2007) çalışmasında ise limit konusundaki kavram yanılgılarını belirlemeyi amaçlamasına karşın bazı öğrencilerin fonksiyon, tanım kümesi, trigonometri gibi ön bilgilerinde eksiklikler ve yanılgılar olduğu ortaya çıkarmıştır. Bu sonuç bu araştırmanın bulguları ile örtüşmekte olup, öğretmen adaylarının değişken kavramına ilişkin yanlış kavrayışlarının, çok değişkenli fonksiyonların limiti konusunda yeni kavram yanılgılarının oluşumuna sebep olduğunu göstermektedir. Buradan hareketle öğrencilerin ön bilgilerindeki bilgi eksikliklerinin veya kavram yanılgılarının dikkate alınarak bir öğretim gerçekleşmesi, yeni yanılgıların önüne geçilmesi açısından oldukça önemlidir.

Araştırmada çok değişkenli bir fonksiyonun limiti ile bu fonksiyonun tanım kümesi arasındaki ilişki ile ilgili olarak çok değişkenli fonksiyonun limit alınan noktadaki değeri ile limit değerinin eşit olması gerektiği, limit alınan fonksiyonun sürekli olması gerektiği ve limit alınan noktanın fonksiyonun tanım kümesinde yer alması gerektiği gibi yanılgılar ile karşılaşılmıştır. Özmantar ve Yeşildere'ye (2015) göre tek değişkenli fonksiyonlar için benzer yanılgılara sahip olan öğrencilerin bu yanılgılara sahip olmasının nedenlerinden biri, onların her bir kavramı ilişkisiz işlemler olarak görmelerinden kaynaklanmaktadır. Dolayısıyla fonksiyonun tanım aralığının fonksiyon limiti ile ilişkisi, fonksiyonun limiti ile sürekliliği arasındaki ilişki ve süreklilik ile fonksiyonun tanım aralığı arasındaki ilişkinin çeşitli bağlamlarda irdelenmesi oldukça önemlidir (Özmantar ve Yeşildere, 2015). Diğer bir deyişle birbirinden bağımsız olarak oluşturulan limit ve süreklilik kavramları arasındaki ilişki dikkate alınarak öğretimin planlanması gerekmektedir. Ayrıca bu kavram yanılgılarının yalnızca limit kavramıyla ilgili değil süreklilik kavramıyla da yakından ilişkili olduğunun da altını çizmek gerekir.

Limit ve süreklilik kavramlarının birbirleri ile yakından ilişkili olduğuna değinilmiştir. Bu araştırmada da sözü geçen durumu destekler nitelikte limit sorularında elde edilen kavram yanılgıları ile süreklilik sorularında da karşılaşılmıştır. Bu yanılgılar dışında süreklilik konusunda öğretmen adaylarının çok değişkenli fonksiyonların süreklilik koşullarına ilişkin yanılgılara sahip olduğu belirlenmiştir. Örneğin tek değişkenli fonksiyonlar için geçerli olan "Bir f fonksiyonunun bir noktada türevi var ise f fonksiyonu bu noktada süreklidir" koşulu, "Eğer çok değişkenli bir fonksiyonun kısmi türevleri varsa süreklidir" olarak çok değişkenli fonksiyonlara genelledikleri tespit edilmiştir. Buradan hareketle adayların tek değişkenli fonksiyonların limiti ve sürekliliği ile ilgili bilgilerini daha çok genellemeler yaparak çok değişkenli fonksiyonlarda limit ve sürekliliği yapılandırdıkları ve bu sebeple çeşitli kavram yanılgılarına sahip oldukları belirlenmiştir. Kavram yanılgılarının ortadan kaldırılabilmesi için mevcut bilgilerinin yeniden yapılandırılması gerekmektedir. Bunun için öğrencilerin kavram yanılgısına sahip olduğu mevcut kavramlarının bir şekilde yetersiz olduğunu kabul etmesi ve bu kavramları yeniden yapılandırma için çaba göstermesi gerekmektedir (Yitmez, 2021). Bu noktada öğretmenlerin ise öğretilmesi gereken kavramı sadece açıklamak yerine bilişsel çatışmayı içeren öğretim stratejilerini kullanması çok etkilidir (Jones ve Tanner, 2000).

Ciddi oranda öğretmen adayının sürekli fonksiyonların grafiklerine ilişkin “Grafiğinin tek parçadan oluşması gerektiği”, “Grafiği kalemi kağıttan kaldırmadan tek parça çizilmesi gerektiği” ve “Grafikte boşluk ya da kesinti olmaması gerektiği” şeklinde yanılgılara sahip olduğu belirlenmiştir. Bu sonuç, tek değişkenli fonksiyonların sürekliliğine ilişkin kavram yanılgılarının araştırıldığı literatürdeki çalışmalarla (Baştürk ve Dönmez, 2011; Cornu, 2002; Özmantar ve Yeşildere, 2015; Tall ve Vinner, 1981) birbirini destekler niteliktedir. Bu kavram yanılgılarının süreklilik kavramının informal kullanımından kaynaklandığı düşünülmektedir. Dolayısıyla öğrencilerin bu yanlış kavrayışlarını fark etmesi adına grafiği tek parçadan oluşmayan sürekli fonksiyon grafiklerinin sunulması ve bunların neden sürekli olduklarına dair sınıfta tartışma ortamı yaratılması oldukça önemlidir.

Trigueros ve Martinez-Planell’in (2009) çalışması öğrencilerin anlama düzeylerinin, iki değişkenli fonksiyonlar için var olan şemalarıyla ve farklı temsil biçimlerini kullanma esneklikleriyle ilişkili olduğunu göstermektedir. Dolayısıyla çok değişkenli fonksiyonların limit ve sürekliliği anlatılırken çoklu temsil biçimlerinden yararlanılması, araştırmada belirlenen yanılgıların önüne geçmek için yarar sağlayacaktır. Çoklu temsillerin kullanıldığı bir öğretimde, grafik, sözel betimleme, tablo gibi farklı gösterimlerden yararlanılması, aynı sınıf içerisinde farklı zeka türleri ve öğrenme stiline sahip öğrencilere hitap eden bir öğretim sağlayacaktır (Bingölbali, 2015). Aspinwall ve Shaw (2002) öğrenciler matematiksel kavramların farklı temsil biçimleri ile karşılaştıklarında matematiksel kavramları daha iyi anlayacaklarını belirtmiştir. Aksi takdirde öğrenciler, öğretilen kavramın tek bir temsil biçimiyle karşılaştıklarında sınırlı bir anlayış geliştirmektedirler. Dolayısıyla çok değişkenli fonksiyonlarda limit ve süreklilik kavramlarının oluşturulurken görsel temsillerin kullanılması oldukça faydalıdır. Bu bağlamda Bergthold (1999) özellikle belirsizlik ve tanımsızlık içeren fonksiyonlar söz konusu olduğunda, öğrencilere tablo veya grafik değerlerini inceleyebilme imkanı oluşturulmasının ve bir limit değerinin birden fazla yol ile araştırılmasının oldukça önemli olduğunu vurgulamaktadır. Yılmaz (2019) çalışmasında GeoGebra dinamik geometri yazılımıyla hazırlanmış etkinlikler ile bilişsel çelişki oluşturularak 6. Sınıf öğrencilerinin çokgen konusunda kavram yanılgılarının giderilmesi amaçlanmış ve etkinliklerin öğrencilerin yanılgılarının giderilmesine olumlu katkı sağladığı tespit edilmiştir. Bu bağlamda araştırmada bahsedilen belirsizlik ve tanımsızlık durumlarında ele alınan çok değişkenli fonksiyonların limit ve sürekliliğinin araştırılması için dinamik geometri yazılımlarından yararlanılmasının faydalı olacağı düşünülmektedir.

Son olarak araştırmada elde edilen bulgulara dayanarak öğretime yönelik öneriler geliştirilmiştir. Bunlar; çok değişkenli fonksiyonlarda limit ve süreklilik konusu ile tek değişkenli fonksiyonlarda limit ve süreklilik konusu ilişkilendirilerek, kavramlar arası ilişkinin kurulması; ders aşamasında konunun farklı temsil biçimlerine yer verilerek, farklı öğrenme stiline sahip öğrenciler açısından kavramın anlaşılması ve anlamlandırılması; ilgili konuda olası kavram yanılgılarının ve tarihsel süreç içerisinde karşılaşılan zorluklar dikkate alınarak öğretimin planlanması ve öğretim aşamasında dinamik geometri yazılımları kullanılarak soyut kavramların somutlaştırılması önerilmektedir. Ayrıca öğrencilerin yanılgıları ile yüzleşebileceği sorulara yer verilerek, bilişsel çatışma ortamı sağlanmalı ve öğrencilere hatalarının fark ettirilmeye çalışılması oldukça önemlidir. Li, Julaihi ve Eng (2017) çalışmalarında integral konusundaki hata ve yanılgıların belirlenmesinin analiz başarısını arttıracağına vurgu yapılmıştır. Benzer şekilde bu araştırmada da öğretmen adaylarının çok değişkenli fonksiyonların limit ve sürekliliği konusundaki kavram yanılgılarının belirlenmesinin analiz başarılarını arttıracağı düşünülmektedir. Araştırma sonuçlarının, gelecek yıllarda öğretim plan ve programları hazırlamasında, bu yanılgıları ortadan kaldıracak ya da engelleyecek şekilde ışık tutacağı düşünülmektedir. Mutlu ve Söylemez’in (2018) ulusal literatürde yer alan kavram yanılgılarına yönelik yapılmış yüksek lisans ve doktora tezlerinin incelendiği çalışmasında, lisans düzeyinde yapılan çalışmalarının lisans matematik derslerine yönelik olanlarının sayısının oldukça az olduğu tespit edilmiştir. Bu bağlamda araştırmanın hem ulusal hem de uluslararası literatüre katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

KAYNAKÇA

Aspinwall, L, & Shaw, K. L. (2002). Representations in calculus: Two contrasting cases. *The Mathematics Teacher, 95*(6), 434.

Baki, A. ve Aydın Güç, F. (2014). Dokuzuncu sınıf öğrencilerinin devirli ondalık gösterimle ilgili kavram yanılgıları. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi*, *5*(2), 176-206.

Barak, B. (2007). *Limit konusundaki kavram yanılgılarının belirlenmesi*. (Yüksek Lisans Tezi). Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü. Balıkesir.

Baştürk, S. ve Dönmez, G. (2011). Matematik öğretmen adaylarının limit ve süreklilik konusuyla ilgili kavram yanılgıları. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, *5*(1), 225-249

Bergthold, T. A. (1999). *Patterns of analytical thinking and knowledge use in students' early understanding of the limit concept*. The University of Oklahoma.

Bezuidenhout, J. (2001) Limits and continuity: Some conceptions of first year students, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 32*(4), 487-500.

Biber, A. Ç. (2018). *Matematik ve öğretimi*. A. Kaçar (Ed.), İlkokulda matematik öğretimi (1. Baskı, s. 2-11) içinde. Ankara: PegemA Yayıncılık.

Biber, A. ve Argün, Z. (2012). Matematik öğretmen adaylarında iki değişkenli fonksiyonların limiti kavramının yapılandırılmasının incelenmesi. *Mersin Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *8*(2),56-66.

Bingölbali, E. (2015) Türev kavramına ilişkin öğrenme zorlukları ve kavramsal anlama için öneriler. M. F. Özmantar, E. Bingölbali ve H. Akkoç (Ed.), *Matematiksel kavram yanılgıları ve çözüm önerileri* (4. Baskı, s. 223-252) içinde. Ankara: PegemA Yayıncılık.

Canbazoğlu-Bilici, S. (2019). Örnekleme yöntemleri. H. Özmen ve O. Karamustafaoğlu (Ed.), *Eğitimde araştırma yöntemleri* (s. 56-78) içinde. Ankara: Pegem Akademi

Cornu, B. (2002). Limits. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (11. Ed., pp. 153-166). New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow: Kluwer Academic Publishers.

Çavuş-Erdem, Z. ve Gürbüz, R. (2017). Öğrencilerin hata ve kavram yanılgıları üzerine bir inceleme: Denklem örneği. *Yüzüncü Yıl Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *14*(1), 640-670.

Gökçek, T. (2019). Karma araştırma yöntemi. H. Özmen ve O. Karamustafaoğlu (Ed.), *Eğitimde araştırma yöntemleri* (s. 137-162) içinde. Ankara: Pegem Akademi.

Graeber, A. O. (1993). Misconceptions about multiplication and division. *Arithmetic Teacher, 40*(7), 408-412.

Hammer, D. (1996). More than misconceptions: Multiple perspectives on student knowledge and reasoning, and an appropriate role for education resarch. *American Journal of Physics, 64*(10), 1316-1325.

Jones, S., & Tanner, H. (2000). *Becoming a successful teacher of mathematics* (pp. 86-104). London, USA, Canada: RoutledgeFalmer.

Karasar, N. (2002). *Bilimsel araştırma yöntemi* (11.Baskı). Ankara: Nobel Yayın Dağıtım.

Kılıç, S. (2016). Cronbach'ın alfa güvenirlik katsayısı. *Journal of Mood Disorders, 6(1),* 47-48.

Kula, S. ve Bukova-Güzel, E. B. (2014). Misconceptions emerging in mathematics student teachers' limit instruction and their reflections. *Quality & Quantity, 48*(6), 3355-3372.

Lannin, J. K., Barker, D. D., & Townsend, B. E. (2007). How students view the general nature of their errors. *Educational Studies in Mathematics*, *66*(1), 43-59.

Li, V. L., Julaihi, N. H., & Eng, T. H. (2017). Misconceptions and errors in learning ıntegral calculus. *Asian Journal of University Education*, *13*(2), 17-39.

Merriam, S. B. (2018). *Nitel araştırma desen ve uygulama için bir rehber*. (Çev. S. Turan). Ankara: Nobel Yayıncılık.

Milli Eğitim Bakanlığı. (2018). *T.C. Milli Eğitim Bakanlığı Matematik Dersi Öğretim Programı.* Ankara: Milli Eğitim Bakanlığı Yayınları.

Mutlu, Y., ve Söylemez, İ. (2018). Matematiksel kavram yanılgıları konusunda yapılmış yüksek lisans ve doktora tezlerinin incelenmesi. *Başkent University Journal of Education*, *5*(2), 187-197.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author

Özdemir, M. (2010). Nitel veri analizi: Sosyal bilimlerde yöntembilim sorunsalı üzerine bir çalışma. *Eskişehir Osmangazi üniversitesi sosyal bilimler dergisi, 11(1), 323-343.*

Özkaya, M. ve İşleyen, T. (2012). Fonksiyonlarla ilgili bazı kavram yanılgıları. *Çankırı Karatekin Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, *3*(1), 1-32.

Özmantar, M. F. (2015) Sonsuzluk kavramı: Tarihsel gelişimi, öğrenci zorlukları ve çözüm önerileri. M. F. Özmantar, E. Bingölbali ve H. Akkoç (Ed.), *Matematiksel kavram yanılgıları ve çözüm önerileri* (4. Baskı, s. 151-180) içinde. Ankara: PegemA Yayıncılık.

Özmantar, M. F., ve Yeşildere, S. (2015) Limit ve süreklilik konularında kavram yanılgıları ve çözüm arayışları. M. F. Özmantar, E. Bingölbali ve H. Akkoç (Ed.), *Matematiksel kavram yanılgıları ve çözüm önerileri* (4. Baskı, s. 151-180) içinde. Ankara: PegemA Yayıncılık.

Reys, B., Reys, R., & Rubenstein, R. (2010). *Mathematics curriculum: Issues, trends, and future directions, 72nd yearbook*. National Council of Teachers of Mathematics. 1906 Association Drive, Reston, VA: 20191-1502.

Sezgin-Selçuk, G. (2019). Tarama yöntemi. H. Özmen ve O. Karamustafaoğlu (Ed.), *Eğitimde araştırma yöntemleri* (s. 137-162) içinde. Ankara: Pegem Akademi.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational studies in mathematics*, *12*(2), 151-169.

Thomas, G. B. (2010). *Thomas calculus*. (Çev. R. Korkmaz). İstanbul: Beta Basım A. Ş. (Orijinal yayın tarihi, 2005).

Trigueros, M., & Martínez-Planell, R. (2010). Geometrical representations in the learning of two-variable functions. *Educational Studies in Mathematics, 73*(1), 3-19.

Ubuz, B. (1999). 10. ve 11. sınıf öğrencilerinin temel geometri konularındaki hataları ve kavram yanılgıları. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *16*(17), 95-104.

Yanık, B. (2016). *Kavramsal ve işlemsel anlama.* E. Bingölbali, S. Arslan. ve İ. Ö. Zembat (Ed.), *Matematik eğitiminde teoriler* (s. 101-114) içinde. Ankara: PegemA Yayıncılık.

Yılmaz, H. Z. (2019). *Altıncı sınıf öğrencilerinin çokgenler ve dörtgenler konusundaki kavram yanılgılarının GeoGebra ile bilişsel çelişki oluşturularak giderilme sürecinin incelenmesi.* (Yüksek Lisans Tezi). Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü. Ankara.

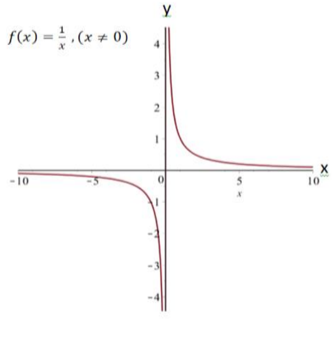
Yitmez, B. G. (2021). *İlköğretim matematik öğretmenliği lisans öğrencilerinin çok değişkenli fonksiyonların türevi konusundaki kavram yanılgılarının incelenmesi.* (Yüksek Lisans Tezi). Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü. İzmir.

Zembat, İ. Ö. (2015). Kavram yanılgısı nedir?. M. F. Özmantar, E. Bingölbali ve H. Akkoç (Ed.), *Matematiksel kavram yanılgıları ve çözüm önerileri* (4. Baskı, s. 1-8) içinde. Ankara: PegemA Yayıncılık.

Ek 1.

Çok Değişkenli Fonksiyonlarda Limit-Süreklilik Konusundaki Kavram Yanılgılarına İlişkin Görüşme Formu

1. Tek değişkenli fonksiyonlarda limit ile çok değişkenli fonksiyonlarda limiti nasıl tanımlarız. Aralarındaki farklılıklar nelerdir?
2. Çok değişkenli fonksiyonların limitini belirlerken hangi yolu/yolları kullanıyorsunuz?
    a. Çok değişkenli fonksiyonların limitini belirlerken kutupsal koordinatları kullanmak her zaman bizi sonuca ulaştırır mı? Nedenleriyle birlikte açıklayınız.
    b. Çok değişkenli fonksiyonların limitini belirlerken ardışık limit yöntemini kullanmak her zaman bizi sonuca ulaştırır mı? Nedenleriyle birlikte açıklayınız.
3. $x = 1$ $R, R^2\ ve\ R^3$'de ne anlam ifade etmektedir?
    a. $f(x) = x^2.cosy$
    b. $f(x,y) = x^2.cosy$
    c. $f(x,y,z) = x^2.cosy$ fonksiyonları kaç değişkenlidir?
4. $\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x}\ ile\ \lim_{x\to 0}\frac{sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$ limit değerlerini nasıl bulursunuz, iki limit değeri aynı mıdır?
5. Tek değişkenli fonksiyonlarda süreklilik ile çok değişkenli fonksiyonlarda süreklilik tanımını yapınız. Aralarındaki farklılıklar nelerdir?
6. Çok değişkenli bir fonksiyonun herhangi bir noktada limiti mevcutsa;
    a. Fonksiyon o noktada sürekli midir?
    b. Fonksiyon o noktada tanımlı mıdır?
    c. Fonksiyonun o noktadaki değeri, limit değerine eşit midir?
7. Bir fonksiyonun sürekli olup olmadığını R^2'deki grafikten nasıl anlayabiliriz? Aşağıdaki grafiğin sürekliliği hakkında ne düşünüyorsunuz, sizce sürekli bir fonksiyon mudur?



8. Bir fonksiyonun sürekli olup olmadığını R^3'deki grafikten nasıl anlayabiliriz?

EXTENDED ABSTRACT

Introduction

Limit and continuity of multi variable functions is one of the main topics of calculus course, which is used in many fields and creates a stepping stone to many concepts. However, it is one of the subjects that students have difficulty with because of the abstract concepts in its content and the complexity inherent in it. These difficulties experienced by students can lead to the formation of misconceptions. Misconceptions are often defined as the perception or understanding of students, which differs from the expert opinion of a subject (Graeber, 1993; Hammer, 1996; Zembat, 2015a). Teacher candidates' misconceptions are closely related to the teaching they will do in the future. From this point of view in this study, it is aimed to determine the misconceptions of elementary mathematics teaching undergraduate students about limit and continuity of multivariable functions.

Methods

In line with the purpose of the study, sequential transformative design was used from mixed research designs. In this design, according to the priority of the study, qualitative data are collected and analyzed after the quantitative data is firstly collected and analyzed or the opposite case is in question (Gökçek, 2019). In this context, the qualitative data has been collected and analyzed after quantitative data has been collected and analyzed in our study. The quantitative part of the study has been descriptive and based on the general survey design. In the qualitative part of the study, the explanatory case study has been used.

In the quantitative part of the study, the sample selected from the population has been selected from nonprobability sampling methods through convenience sampling and then it has been carried out with 78 teacher candidates in the department of elementary mathematics teaching of a state university. These candidates have been applied to the data collection tool called "Test for Determining the Misconceptions about the Limit and Continuity of Multi Variable Functions" developed by researchers and possible misconceptions have been determined by analyzing the collected data. This data collection tool consists of 12 open-ended questions. The pilot study of the test was made and the reliability coefficient was 0.828. In the qualitative part of the study, semistructured interviews were performed with 6 teacher candidates to examine the misconceptions in depth. These candidates were selected by the criterion sampling method from the 78 teacher candidates. The answers to the open-ended questions of teacher candidates were evaluated by considering the scoring scale developed by Erdem and Gürbüz (2016). In the analysis stage of the quantitatively collected data, the answers given by the students to each question were examined and percentage and frequency tables were created. In the analysis of semistructured interviews, the method of descriptive analysis was used. In this direction, the answers to the interviewed teacher candidates were examined in detail and the direct quotations of some of the answers are given.

Results

In the study, the misconception that the L'Hospital rule can be used in multivariable functions has been determined. The definition of the limit in multivariable functions is similar to the definition of the limit in single variable functions. The difference between them, at the limit of multivariable functions, the x independent variable can approach point a from any direction. However, candidates who do not have this conception have been found to have misconceptions on this subject. For example, some students have approached from two points or along curve when calculating the limit of a multivariable function. With the limit of a multivariable function, it has been determined that students have various misconceptions in about to the relationship between the definition set of this function. These are designated as "the limit of multi variable function should be continuous", "the point taken the limit must be included in the definition set of the function” and “the limit of function must be equal to the value of the limit at the point taken”.

Teacher candidates’ misconceptions on the limit of multivariable functions are closely related to continuity concepts. Because limit for the continuity of a multivariable function is a prerequisite. Therefore, on continuity topic has encountered that the misconceptions found about the limit. Apart from these, on continuity conditions of a multivariable function have been encountered with misconceptions. Finally many teacher candidates have been found to have "the graph of multivariable functions is required to consist of single part" conception.

Discussion and Conclusion

As a result of the analyzes, teacher candidates have been determined to have various misconceptions on the limit and continuity of multi variable functions and the level of understanding is very low.