

## Matematik Öğretmeni Adaylarının Türev Teğet İlişkisi İle İlgili Yaptıkları Hatalar

Gökay AÇIKYILDIZ<sup>1</sup>

Tuba GÖKÇEK<sup>2</sup>

### Özet

Bu araştırmanın amacı, matematik öğretmeni adaylarının türev kavramı ile ilgili anlamalarını ve bu kavramı anlama sürecinde karşılaştıkları zorlukları ortaya koymaktır. Bu bağlamda, türev ile teğet/egim arasındaki ilişki dikkate alınmıştır. Özel durum çalışma olan araştırma bir devlet üniversitesinde ortaöğretim fen ve matematik alanları eğitimi bölümü matematik öğretmenliği programına devam eden 45 öğretmen adayıyla yürütülmüştür. Araştırma kapsamında veriler bir yazılı sınav ve 6 öğretmen adayı ile yapılan klinik mülakatlardan elde edilmiştir. Yazılı sınavlardan elde edilen verilerin analizi ile öğretmen adayları tarafından üretilen yanlış tipleri ortaya konmuştur. Öğretmen adaylarını doğru ve yanlış cevaplara götüren fikirleri ortaya çıkarmak için yürütülen klinik mülakatlar ise benzerlik ve farklılıklarına göre sınıflandırılmıştır. Yapılan çalışma öğretmen adaylarının türev kavramı ile ilgili olarak yüzeysel anlamaya sahip olduklarını ve tanımların içeriklerini tam olarak özümsemediklerini ortaya çıkarmıştır. Ayrıca öğretmen adaylarının cebirsel formda soruların çözümünde, grafiksel ve tablo gösterimlerine oranla daha başarılı oldukları belirlenmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Türev Kavramı, Öğretmen Adayı, Anlama, Hatalar

### 1. Giriş

Matematik, fen bilimleri ve mühendislik alanlarında çok önemli bir yere sahip olan analiz kavramları ileri düzey matematiğin başlangıç noktasıdır (Ubuz,1999). Dolayısıyla ileri düzey matematik konularının tam anlamıyla anlaşılabilir olması açısından analiz kavramları temel teşkil etmektedir. Analiz, matematik terimleri sözlüğünde “fonksiyonların diferansiyeli, integrali ve bunlarla ilgili kavramlar ve uygulamalarla uğraşan matematik dalı, diferansiyel ve integral hesap” şeklinde tanımlanmaktadır (Hacısalıhoğlu ve diğerleri, 2000, s. 205). Bu haliyle türev daha genel haliyle diferansiyel hesap ve integral kavramları analiz için temel teşkil etmektedir. Diğer taraftan bu kavramları tanımlamada kullanılan limit ve süreklilik kavramları da analizin diğer önemli kavramları arasında yer almaktadır. Ortaöğretim matematik programlarında ve bunun bir sonucu olarak üniversiteye giriş sınavlarında önemli bir yere sahip olan ve yüksek matematik konuları için olduğu kadar, gerçek yaşam durumları için de temel nitelikte analiz kavramlarından biri olan türev bu çalışmanın odağında yer almaktadır.

Çalışılması ve anlaşılması üst düzey düşünme becerileri gerektiren analiz konuları, Türkiye’de olduğu gibi birçok ülkede de ortaöğretim matematik programlarının önemli bir kısmını oluşturmaktadır (Bingölbali, 2008; MEB, 2011). Üniversite giriş sınavlarında özellikle fen bilimleri ve matematik ile ilgili alanlarda tercih yapacak öğrenciler için analiz konu ve kavramları anahtar niteliktedir. Ayrıca başta matematik olmak üzere fen bilimleri ve mühendislik alanlarında öğrenim görecektür üniversite öğrencileri için de önemli bir yere sahiptir.

Analizin birçok bilim dalı için önemli bir konu olması nedeniyle öğrencilerin analiz kavramlarını anlamaları üzerine pek çok çalışma yapılmıştır. Çünkü öğrencilerin belli bir kavramla ilgili olarak sahip oldukları anlamaları, hata ve kavram yanlışlarını ortaya koymak önemlidir. Öğrencilerin yaptıkları hatalar ve sahip oldukları kavram yanlışları sadece o konuyu öğrenmelerinde engel oluşturmaz, onların sonraki öğrenmelerini de etkiler (Baki, 2008). Öğrencilerin hatalarından, özellikle sistemli bir şekilde ürettikleri hatalardan haberdar olmak öğretmenler açısından önemlidir. Bu hatalar bazen dikkatsizliğin bir ürünü olabileceği gibi bazen de öğrencilerin öğrenme eksiklikleri ve kavram yanlışlarının habercisi olabilir (Baki, 2008; Özbellek, 2003; Yenilmez ve Yaşa, 2008; Yürük ve diğerleri, 2000). Bu hata ve yanlışlar eğer düzeltilmezse öğrencilerin diğer matematik konularında yapacağı başka hata ve yanlışların sebebi olacaktır. Öğrencilerin matematikte herhangi bir kavram özel olarak türev kavramı ile ilgili hata ve kavram yanlışlarından haberdar olmak, öğretmenlerin öğrencilerinin muhtemel eksikliklerini dikkate alarak bir öğretim ortamı hazırlaması açısından da önemlidir.

Özellikle matematik gibi ardışık ve yığılmalı bir bilim dalında herhangi bir kavram onun önkoşulu olan kavramlar kazandırılmadan verilmemelidir. Bu açıdan ileri matematik konuları için temel teşkil eden analiz kavramlarının öğrenciler tarafından öğrenilmiş olması önemlidir. Literatürde öğrencilerin (ortaöğretim veya üniversite) türev kavramı ile ilgili anlamalarına odaklanan çalışmalarda yürütülmüştür (Orton, 1983; Amit ve Vinner, 1990; White ve Mitchelmore, 1996; Bezuidenhout, 1998; Pinzka 1999; Pustejovsky, 1999; Hauger, 2000; Aspinwall ve Miller 2001; Ubuz, 2001; Duru, 2006; Gür ve Barak, 2007; Hacıömeroğlu, 2007; Park, 2011). Yapılan bu çalışmalar öğrencilerin türev kavramı ile ilgili birçok hata ve kavram yanlışısına sahip olduklarını ortaya koymuştur.

Türev kavramı cebirsel olarak bağımsız değişkene verilen artmanın fonksiyonda meydana getireceği değişikliğin, değişkendeki artmaya oranının limit durumu olarak tanımlanmaktadır (Balci, 2000). Tanım

<sup>1</sup> Karadeniz Teknik Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, gokayayildiz@hotmail.com

<sup>2</sup> Doç. Dr., Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fatih Eğitim Fakültesi, İlköğretim Bölümü, tgokcek@gmail.com

dikkatlice incelendiğinde bu kavramın bağımlı değişkendeki değişimin (bağımsız değişkene bağlı olarak) bağımsız değişkendeki değişime oranı ve limit kavramı yardımı ile tanımlandığı anlaşılmaktadır. Dolayısıyla fonksiyon, değişim oranı ve limit kavramı türev kavramının anlaşılır olması açısından önemlidir (Zandieh, 2000). Diğer taraftan ders kitaplarında çok sıklıkla karşılaşılan ve genellikle “Türevin Geometrik Yorumu” başlığı altında verilen bir diğer tanımlı da genel olarak “bir fonksiyonun grafiğe belirli bir noktadan çizilen teğetin eğimi” şeklindedir. Sonuç olarak türev kavramı bir bütün olarak limit, değişim oranı ve teğet/eğim kavramlarını da içermektedir. Türevin tam anlamıyla anlaşılabilir olması tüm bu kavramlar ve birbiri ile ilişkilerinin anlaşılabilir olmasına bağlıdır. Bu yüzden türev kavramına odaklanan bu çalışmada türevin teğet/eğim ile ilişkisi ele alınacaktır.

Öğrencilerin belli bir matematiksel konuda öğrenme eksikliklerinin farkında olup, bunları düzeltecek yönde tedbirler alma görevi öğretmene aittir. Öğretmenin bu görevi tam olarak yerine getirebilmesindeki öncelikli faktörlerden biri öğretmenin bilgisidir. Alan bilgisi etkili öğrenme-öğretme ortamı hazırlamak açısından tek başına yeterli olmamakla birlikte, böyle bir ortamın hazırlanması için gereken temel bileşenlerden biridir. Öğretmenin bilgisinin sınıf içerisindeki eğitim-öğretim faaliyetlerinin planlanması, uygulanması, değerlendirilmesi sürecinde aktif rol oynadığı bilinen bir gerçektir. Bu anlamda öğretimin niteliği belirleyen, dolayısıyla öğrencinin öğrenmesi üzerindeki en önemli etkenlerden biri öğretmenin bilgisidir (Shulman, 1986; Fennema ve Franke, 1992). Gerçekten de yapılan araştırmalar öğretmenin matematiksel bilgisinin, eğitim ve öğretim ile ilgili aldığı kararları etkilediğini ortaya koymuştur (Stein, Baxter ve Leinhardt, 1990; Fennema ve Franke, 1992; Lloyd ve Wilson, 1998; Van Dooren, Verschaffel ve Onghena, 2002; Bütün, 2012). ). Bu bağlamda bu çalışmada geleceğin öğretmeni olan öğretmen adaylarının türev kavramı ile ilgili alan bilgisine odaklanılacaktır.

Öğretmen veya öğretmen adaylarının türev kavramı ile ilgili anlamalarını ortaya koymaya çalışan araştırmalar, öğrenciler üzerinde yürütülenlere kıyasla çok daha azdır (Doğan, Sulak ve Cihangir, 2002; Akkaya, 2009; İşleyen ve Akgün, 2010; Park, 2011). Doğan, Sulak ve Cihangir (2002) çalışmalarını matematik öğretmenliği programına yeni kayıt yaptırmış ilköğretim matematik öğretmen adayları üzerinde yürütmüş ve onların lisedeki öğrenmelerini değerlendirmişlerdir. Akkaya (2009) çalışmasında Teknolojik Pedagojik Alan Bilgisi “öğrenci zorlukları” bileşeninde öğretmen adaylarının gelişimlerini incelemiştir. İşleyen ve Akgün (2010) ise matematik öğretmen adaylarının türev ve diferansiyel kavramlarıyla ilgili anlama seviyeleri ve bu kavramlar arasındaki farklılıkları incelemiştir. Park (2011) araştırmasında analiz dersi veren öğretim elemanları ile öğrencilerinin, türev kavramını ve fonksiyon- türev fonksiyonu-bir noktadaki türev kavramları arasındaki ilişkiyi nasıl tanımladıklarını araştırmıştır. Yürütülen bu çalışmada ise yalnızca öğretmen adayı boyutu ele alınıp türev kavramı ile teğet/eğim arasındaki ilişkiye aynı anda derinlemesine odaklanılması hedeflenmiştir. Bu bağlamda çalışmanın ana problemi; “Öğretmen adaylarının türev-teğet/eğim arasındaki ilişkiye yönelik yaptıkları hatalar nelerdir?” şeklinde belirlenmiştir.

## 2. Yöntem

Öğretmen adaylarının türev kavramı ile ilgili anlamalarını derinlemesine ortaya koymayı amaçlayan bu araştırmanın yöntemi özel durum çalışmasıdır. Özel durum çalışması veri toplama araçlarının (mülakat, anket, gözlem ve doküman analizi...) tümünü kapsayabilen şemsiye niteliğinde olup, geneli aydınlatmak için incelenen özel durumları etraflıca tanıtmayı amaçlar (Çepni, 2005). İnceleme, belirlenmiş bir özel durum (bilinen bir çevre, grup, bir olay, bir birey, bir sınıf vb.) etrafında derinlemesine yapılır ve sebep- sonuç ilişkileri üzerinde yoğunlaşır (Çepni, 2005; Ekiz, 2003).

Bu çalışma kapsamında matematik öğretmen adaylarının türev kavramı ile ilgili anlamaları iki boyutta ele alınmıştır. Çalışmanın asıl odağı öğretmen adaylarının bu kavramla ilgili sorulara ürettikleri doğru ya da yanlış cevaplar değil, onları bu sonuçlara götüren süreçtir. Cevaba ulaşma sürecinde ne yaptıkları, nasıl yaptıkları ve neden yaptıkları hakkında fikir sahibi olmak ancak sürece yoğunlaşan bir özel durum çalışması yöntemi ile ortaya çıkarılabilir.

### 2.1. Çalışma Grubu

Bu çalışma Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Bölümü Matematik Öğretmenliği programında 4. sınıfa devam eden 45 öğretmen adayı (24 kız ve 21 erkek) üzerinde yürütülmüştür.

### 2.2. Veri Toplama Araçları

Bu çalışmada veriler, 1 yazılı sınav ve 6 öğretmen adayı ile yapılan klinik mülakatlardan elde edilmiştir.

#### 2.2.1. Yazılı Sınavlar

Araştırmanın problemleri doğrultusunda türev ve teğet/eğim ilişkisini ortaya koymaya yönelik yazılı sınav soruları oluştururken, literatürde ilgili çalışmalardan (Goert, 2007; Kendal ve Stacey, 2003) ve analiz kitaplarından (Bittinger, Ellenbogen, Surgent, 2012; Thomas ve diğerleri, 2005) yararlanılmıştır. Uzman ve öğretmen görüşleri doğrultusunda şekillenen yazılı sınavlar pilot çalışma kapsamında ilköğretim matematik

öğretmenliği programında 21, 4. sınıf öğretmen adayına uygulanmıştır. Yazılı sınav türev ve teğet/egim ilişkisine yönelik 5 sorudan oluşmaktadır. Sınav yaklaşık 40 dakikalık bir sürede öğretmen adaylarına uygulanmıştır.

### 2.2.2.Klinik Mülakatlar

Bu çalışmanın amacı sadece öğretmen adaylarının türev kavramı ile ilgili problemlerdeki başarı yüzdelerini ortaya koymak değildir. Bu problemlere cevap verirken ne yaptıklarına ek olarak, nasıl ve neden yaptıkları ile de ilgilenildiğinden çalışmada klinik mülakatlardan yararlanılmıştır.

Yazılı sınavlar uygulandıktan sonra belirlenen 6 öğretmen adayı ile klinik mülakatlar yapılmaya başlanmıştır. Bu öğretmen adaylarının belirlenmesindeki temel kriter yazılı sınavlar olmuştur. Grubun genelini temsil etmesi açısından yazılı sınavdan düşük, orta seviyede ve yüksek puan alan öğretmen adaylarından ikişer kişi seçilmiş, her bir öğretmen adayı ile yaklaşık 60-70 dakikalık bir sürede görüşmeler yapılmıştır. Öğretmen adaylarına sırasıyla yazılı sınavlarda verdikleri cevaplar gösterilmiş, bu cevabı nasıl elde ettiklerini açıklamaları istenmiştir. Bu sırada araştırmacı öğretmen adayına açıklamaları paralelinde “Bunu neden yaptın?”, “Nasıl düşündün?” gibi sorular yönelmiştir. Yazılı sınavlardaki her bir soru için bu süreç tekrarlanmıştır. Her bir görüşme dijital olarak kayda alınmış, daha sonra bilgisayarda yazıya dökülmüştür.

### 2.3.Verilerin Analizi

Yazılı sınavlardan elde edilen veriler öncelikle “tam doğru yanıt”, “kısmen doğru yanıt”, “yanlış yanıt” ve “yanıt yok” şeklinde dört temel kategoride sınıflandırılmıştır. Bu sınıflandırmaya ilişkin ayrıntılar aşağıda yer almaktadır.

*Tam Doğru Yanıt:* Geçerli cevabın tüm bileşenlerini içeren cevaplar.

*Kısmen Doğru Yanıt:* Geçerli yanıtın bileşenlerinden en az birini içeren, hepsini içermeyen cevaplar.

*Yanlış Yanıt:* Konu ile ilgili ya da ilgisiz yanlış bilgi içeren, kavram yanlışlığı olduğunu gösteren veya mantıksız cevaplar.

*Yanıt Yok:* Soruları boş bırakma.

Öğretmen adaylarının her bir soruya verdikleri cevaplar yukarıdaki kategori tanımları dikkate alınarak sınıflandırılmıştır. Bu sınıflandırma işlemi araştırmacı tarafından farklı zamanlarda tekrar edilmiş, bu şekilde zamanlama üçgenlemesi yapılmıştır. Genel olarak yapılan sınıflamanın uygun olup olmadığı ve araştırmacı tarafından nasıl sınıflandırılacağı konusunda şüpheye düşülen durumlarda iki matematik eğitimcisinin görüşlerine de başvurulmuştur. Her bir kategorideki cevaplar frekans ve yüzdelerle ifade edilmiştir.

Öğrencilerin cevapları “Tam Doğru Yanıt” için 2, “Kısmen Doğru Yanıt” için 1, “Yanlış Yanıt” ve “Yanıt Yok” için 0 olarak puanlanmıştır. Bu tür bir puanlama mülakat yapılacak öğretmen adaylarının seçimi ve öğretmen adaylarının genel başarı durumunu resmetmesi amacıyla kullanılmıştır. Yazılı sınava ait analizin ikinci kısmında sadece öğretmen adaylarının yanlış cevaplarına odaklanılmıştır. Öğretmen adayları tarafından verilen yanlış cevaplar kendi içinde benzerlik ve farklılıklarına göre gruplandırılmıştır. Bu şekilde öğretmen adayları tarafından üretilen yanlış tipleri ortaya konmuştur.

Ses kayıt cihazı kullanılarak tamamlanan klinik mülakatlar bilgisayar ortamında yazıya dökülmüş ve her bir öğretmen adayı ile yapılan görüşme notları dikkatli bir şekilde birkaç kez okunmuştur. Klinik mülakatları yapmadaki amaç öğretmen adaylarının doğru ya da yanlış cevaplarının altında yatan sebepler olduğundan, okuma işlemi bu soruya cevap verebilecek fikirleri ortaya koymak amacıyla yapılmıştır.

### 3. Bulgular

Bu araştırma kapsamında türev ile teğet/egim ilişkisine yönelik öğretmen adaylarının anlamalarını ve karşılaştıkları zorlukları ortaya koymak amacıyla 5 soruya yer verilmiştir. Bu başlık altında her bir soruya ilişkin öğretmen adaylarının yazılı sınava verdikleri yanlış cevaplar gruplandırılmış ve klinik mülakatlardaki açıklamaları analiz edilmiş ve ayrı ayrı sunulmuştur.

#### Birinci Soru

1. soruya cevap veren öğretmen adaylarının yarıya yakını (%40) yanlış yanıt verirken doğru yanıt veren kişi sayısı sınıfın %33’ü, yanlış yanıt veren kişi sayısı ise %22’dir.

Cevabı “Yanlış” olarak sınıflandırılan 18 öğretmen adayının yanlış yorumlama nedenleri ve açıklamalarından örnekler aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 1

Öğretmen adaylarının 1. soruya verdikleri yanlış cevapların sınıflandırılması

Yanlış Tipleri	Betimsel Açıklama	Örnek Öğrenci Cevabı	f
T1.1.Tip	Fonksiyonun teğetinin eğimi yerine fonksiyonun eğimi ifadesi kullanılmıştır.	“Bir fonksiyonun belli bir noktadaki türevi aynı fonksiyonun o noktadaki eğimini verir.”	12
T1.2.Tip	Öğretmen adaylarının birbirinden farklı yanlış cevapları bir arada verilmiştir.	“ Türev koordinat düzleminde y değişkeninin x değişkenine oranıdır. Eğimde bu şekilde tanımlanabilir.” “Eğim iki nokta arasındaki artışın değişim oranını verir, türev ise bir noktada anlık değişimi” “Türev, fonksiyona göre istenilen noktada eğimi verir.” “Bir fonksiyonun bir noktadaki teğeti, o noktadaki fonksiyonun türevini verir.”	4
	Diğer	Üstteki sınıflamalardan herhangi birine dahil olmayan cevaplar bu kategoride toplanmıştır.	2

Öğretmen adaylarının soruya verdikleri yanlış cevaplar incelendiğinde 11 öğretmen adayının aynı tipte yanlış yaptıkları görülmektedir. Tablo 1’de görüldüğü gibi öğretmen adayları türevi eğim ile ilişkilendirirken fonksiyonun bir noktadaki eğimi ifadesini kullanarak soruya cevap vermişlerdir. Burada öğretmen adayları fonksiyona bir noktada çizilen teğetin eğimi yerine fonksiyonun eğimi ifadesini kullanmış olmalarına rağmen aslında kastettikleri şeyin teğetin eğimi olduğu ve bu ifadelerin kullanımlarına çok dikkat etmedikleri düşünülmektedir. İkinci kısımda öğretmen adaylarına ait bazı yanlış cevaplara yer verilmiştir. Örneğin bir öğretmen adayı bir fonksiyonun bir noktadaki teğetinin fonksiyonun o noktada türevini vereceğini belirtmiş ancak aynı soruda teğetin eğiminin o noktada türevine eşit olduğunu “ $f'(x_0) = m_t$ ” ifadesiyle göstermiştir. Yine öğretmen adayının dikkatsizlik sonucu bu şekilde bir yanlış yaptığı anlaşılmaktadır. Diğer öğretmen adayları da birbirinden farklı yanlış cevaplar vererek soruyu cevaplamışlardır. İki öğretmen adayı soruya cevap vermemiştir.

Türev ile eğim arasındaki ilişkiyi açıklayınız sorusuna “Bir fonksiyonun belli bir noktadaki türevi aynı fonksiyonun o noktadaki eğimini verir” şeklinde cevap veren öğretmen adayları arasından 17Ö kodlu öğretmen adayına ait mülakat aşağıda yer almaktadır.

A :Türev fonksiyonun belli bir noktasındaki eğimidir ifadesiyle kastedilen şey nedir?  
17Ö :Teğetinin eğimi, bu ifade o noktadaki türev ile aynıdır.

Benzer biçimde 27Ö ve 25Ö kodlu öğretmen adayları da fonksiyonun eğimi ifadesini kullanmışlardır. Ancak kendileriyle yapılan mülakatta ise bununla ifade etmek istedikleri şeyin o noktada teğetin eğimi olduğunu açıklamışlardır. Gerçekten de öğretmen adayları fonksiyonun eğimi ifadesini sıklıkla kullanarak bu konuda hem matematiksel dilin kullanımında sıkıntı yaşadıklarını hem de konuyla ilgili bazı altyapı eksikliklerinin olduğunu göstermişlerdir.

37Ö kodlu öğretmen adayı soruya cevabını “fonksiyona bir noktada çizilen teğet o noktada fonksiyonun türevine eşittir.” şeklinde vermiştir. Aşağıda 37Ö kodlu öğretmen adayına ait mülakata yer verilmiştir.

A :Bir fonksiyonun bir noktadaki teğeti o noktada fonksiyonun türevine eşittir demişsin, açıklar mısın?  
37Ö :Fonksiyona bir noktada teğet çizdiğimiz zaman, o nokta  $x_0$  olsun. Bu noktada fonksiyonun türevi  $f'(x_0)$  ve teğetin eğimi  $x_0$  noktasında fonksiyonun türevine eşit olur.  
A :Burada da yazarak onu göstermişsin  
37Ö :Evet

A :Ama tanım yaparken o noktada çizilen teğetin o noktadaki türeve eşit olduğunu belirtmişsin.

37Ö :Yani, teğet derken aslında teğetin eğimini kastettim, zaten burada yazdım ama tanım yaparken dikkat etmedim sanırım

37Ö kodlu öğretmen adayı hem soruya verdiği cevabın devamında hem de kendisiyle yapılan mülakatta bu durumu “bir noktada çizilen teğetin eğimi” olarak düzeltmesi bu durumun basit bir hatadan kaynaklandığını göstermektedir

2Ö ve 24Ö kodlu öğretmen adayları da “fonksiyonun bir noktadaki teğetinin eğimi, o noktadaki türevini verir” ifadesini kullanarak benzer açıklamalarda bulunmuşlardır.

### İkinci Soru

2.soruya yanlış cevap veren öğretmen adayı sayısını sınıfın %49’una karşılık gelirken sınıfın %33’ü ise soruya tam doğru yanıt vermiştir.

Cevabı “Yanlış” olarak sınıflandırılan 22 öğretmen adayının yanlış yorumlama nedenleri ve açıklamalarından örnekler aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 2

#### Öğretmen adaylarının 2. soruya verdikleri yanlış cevapların sınıflandırılması

Yanlış Tipleri	Betimsel Açıklama	Örnek Öğrenci Cevabı	f
T2.1.Tip	Teğeti, eğriyi bir noktada kesen doğru olarak belirtmişlerdir.	“ Bir eğriyi tek noktada kesen doğruya teğet denir”	8
T2.2.Tip	Teğet olma durumunun eğiminin sıfır ya da x eksenine paralel olması şeklinde düşünülmüştür.	“Grafiğe dik değil paralel degen doğru” “Verilen bir noktaya çizilen eğimi sıfır olan doğru” “180° açıyla paralel çakıştığı noktadan geçen doğru”	6
T3.3.Tip	Teğet-eğim ilişkisi yanlış kurulmuştur.	“Bir eğrinin bir noktasındaki eğimine teğet denir”	2
	Diğer	Üstteki sınıflamalardan herhangi birine dahil olmayan cevaplar bu kategoride toplanmıştır.	6

Tablo 2’ye bakıldığında 1.tipte hata yapan öğretmen adaylarının teğeti eğriyi bir noktada kesen bir doğru olarak algıladıkları görülmektedir. Oysa teğet fonksiyonu bir noktada kesen değil o noktada fonksiyona değen bir doğru olarak bilinmektedir. İkinci tipte yanlış yapan öğretmen adayları ise bir doğrunun teğet olma durumunu bu doğrunun eğiminin sıfır olması veya x eksenine paralel olması durumlarıyla kısıtlamışlardır. 3.tipte hata yapan öğretmen adayları ise eğim teğet ilişkisini yanlış ilişkilendirerek soruya cevap vermişlerdir.

4 öğretmen adayı soruya yanıt vermemiştir.

Mülakat yapılan öğretmen adayları arasından soruya yanlış cevap veren 27Ö kodlu öğretmen adayına ait mülakat aşığıda yer almaktadır.

A :Nedir teğet?

27Ö : Eğrinin bir doğru tarafından kesilmesi

A : Nasıl kesmesi gerekiyor?

27Ö : Tek bir noktada kesecek ama tek bir noktada degecek

Görüldüğü gibi öğretmen adayı “eğrinin bir doğru tarafından kesilmesi” ifadesiyle çok genel bir yaklaşım sergileyerek teğeti açıklamaya çalışmıştır. İfadesini biraz daha açması istendiğinde teğetin kesme durumunun eğriye degecek şekilde olması gerektiğini belirtmiştir. Aslında öğretmen adayının teğetin eğriyi kesmesiyle kastettiği şeyin eğriyi bir noktada degecek şekilde geçmesidir ki bunu hem cevap kâğıdında hem de mülakat sırasında başlangıçta ifade etmekte başarılı olamamıştır. Bu durum öğretmen adayının düşündüğünü tam olarak ifade edemediğinin ve matematiksel dili kullanmada zayıf kaldığının bir göstergesidir.

### Üçüncü Soru

Sınıfın %85 gibi büyük bir bölümü 3.soruya yanlış yanıt verirken %4’ü tam doğru yanıt %7’si ise kısmen doğru yanıt vermiştir.

Cevabı “Yanlış” olarak sınıflandırılan 40 öğretmen adayının yanlış yorumlama nedenleri ve açıklamalarından örnekler aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 3

## Öğretmen adaylarının 3. soruya verdikleri yanlış cevapların sınıflandırılması

Yanlış Tipleri	Betimsel Açıklama	Örnek Öğrenci Cevabı	f
T3.1.Tip	L2 doğrusu dönüm noktasından geçen bir teğet olmasına rağmen eğriyi kesen bir doğru olarak algılanmıştır.	“L3, L4, L6 teğettir, bu doğrular eğriye bir noktada değer”	39
T3.2.Tip	Sadece L3 doğrusunun teğet olduğu kaçırılmıştır.	“L2, L4, L6 teğettir, onlar fonksiyonu kesmemişler sadece tek noktada kesmişler.”	1

Öğretmen adaylarının soruya verdikleri yanlış cevaplar incelendiğinde biri hariç hepsinin tek tip bir yanlış yaptıkları görülmektedir. 1. tipte yanlış yapan öğretmen adaylarının belirttikleri doğrular fonksiyona o noktalarda teğet olmasına rağmen L2 doğrusu hariç tutulmuştur. L2 doğrusu fonksiyonun dönüm noktasından geçen bir teğettir ve öğretmen adayları tarafından diğer teğetlerden farklı olarak fonksiyonu kesiyormuş gibi algılanmıştır. Bu yüzden öğretmen adayları bu L2 doğrusunu teğet olarak kabul etmemiştir. 2. tipte yanlış yapan öğretmen adayı hiçbir açıklama yapmadan L4 ve L6’ya benzer bir şekilde fonksiyona teğet olan L3 doğrusuna cevabında yer vermemiştir. Soruya yanıt vermeyen öğretmen adayı bulunmamaktadır.

Soruya yanlış cevap veren öğretmen adayları arasından 37Ö koldu öğretmen adayına ait mülakat aşağıda yer almaktadır.

- 37Ö :L1 doğrusu teğet değildir, eğriye dıştan veya içten değmemiştir.  
A:Ne demek dıştan veya içten değmemiş olması?  
37Ö :Fonksiyonun üstünde ve altında kalan bölgelerden birinde kalacak şekilde çizilirse teğet olur.  
A :Peki, her iki bölgeden de geçiyorsa?  
37Ö :O zaman doğruyu kestiği için, yani her iki bölgede de yer aldığından teğet değildir.  
A :Diğerleriyle devam edelim  
37Ö :L2’de aynı şekilde teğet değildir, L5 de onun gibi eğriyi kestikleri için teğet değiller.  
A :Diğerleri?  
37Ö :L3 tek bir noktada içten teğet, L4 yine tek bir noktada dıştan teğet ve L6 tek bir noktada eğriye dıştan teğettir.  
A :L2 doğrusuna tekrar bakarsak, o noktada çizilecek teğet nasıl olurdu?  
37Ö :Eğer şu şekilde çizersek, şöyle fonksiyonun üstünde kalacak şekilde...  
A :O noktada fonksiyonun üstünde kalacak şekilde çizmek mümkün mü gerçekten?  
37Ö :Aslında fonksiyonu kesmek zorunda  
A :Böyle bir durumda ne derdin?  
37Ö :Eğriyi kestiğine göre teğet olmamalı diye düşünüyorum  
A :O nokta için bir farklılık söz konusu olabilir mi?  
37Ö :Aslında o nokta için dönüm noktasıdır diyebiliriz  
A :Peki, böyle bir durumda?  
37Ö :Dönüm noktası için bilmiyorum, yani çizilip çizilemeyeceğinden emin değilim.

Buradan hareketle öğretmen adayının bir doğrunun bir eğriye hangi durumlarda teğet olabileceği hakkında genel bilgilere sahip olduğunu söyleyebiliriz. Fakat diğer öğretmen adayları gibi 37Ö kodlu öğretmen adayı da konuyla ilgili derinlemesine bir bilgiye sahip değildir. Bu nedenle L2 doğrusunun eğriye dönüm noktasında teğet olma durumunu daha genel bir yorumda bulunarak değerlendirmiş ve yanlış cevaba gitmiştir. Benzer hata diğer öğretmen adayları tarafından da yapılmış ve kendileriyle yapılan mülakat esnasında L2 doğrusunun durumuyla ilgili kesin bir fikirleri olmadığını belirtmişlerdir. Aşağıda 17Ö kodlu öğretmen adayına ait mülakata yer verilmiştir.

- A :Peki, L2'ye tekrar bakalım. O noktada bir teğet çizecek olsaydın bunu nasıl çizerdin?  
 17Ö :Bunu yaparken L2'de bende aynı şeyi düşünmüştüm yani nasıl bir şey çizeyim acaba teğet olabilir mi diye  
 A :Mesele şurada bir tane çizmeye çalışalım  
 17Ö :Pek çizemiyorum aslında kesmesi gerekiyor illa bir teğet çizmem için, bilmiyorum o yüzden teğet olmuş olabilir. Çözerken de bir tereddüt yaşadım  
 A :Böyle bir nokta için farklılık olabilir mi, kesiyormuş gibi gözüküyor ama o noktanın bir ayrıcalığı var mıdır?  
 17Ö :Olabilir, teğetmiş gibi duruyor ama kesmemesi gerektiğini düşünerekten, kesiyormuş gibi gelmişti o yüzden L2 teğet değildir diye düşünmüştüm ama çelişmişim L2 konusunda. Diğerlerinde direk değildir demiştim ama L2'de düşünmüştüm.

Görüldüğü gibi 17Ö kodlu öğretmen adayının L2 doğrusunun durumuyla ilgili bazı tereddütleri olduğundan doğrunun eğriye teğet olup olmadığını tam emin olamamıştır. Diğer öğretmen adaylarıyla da yapılan mülakat sonucunda aynı sonuçlar çıkmış yani öğretmen adaylarının konuyla ilgili genel bilgileri olmasına rağmen derinlemesine bir bilgiye ve yeterli yorum gücüne sahip olmadıkları görülmüştür.

#### Dördüncü Soru

4. soruya tam doğru yanıt veren kişi sayısı sınıfın %51'ine, yanlış yanıt veren kişi sayısı %38'ine karşılık gelmektedir.

Cevabı “Yanlış” olarak sınıflandırılan 17 öğretmen adayının yanlış yorumlama nedenleri ve açıklamalarından örnekler aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 4

#### Öğretmen adaylarının 2. soruya verdikleri yanlış cevapların sınıflandırılması

Yanlış Tipleri	Betimsel Açıklama	Örnek Öğrenci Cevabı	f
T3.1.Tip	Grafiği yanlış okuma veya dikkatsizlik	Öğretmen adayları çizdikleri grafiklerden hareketle eğimi hesaplayarak fonksiyonun x=1 noktasındaki türevini hesaplamaya çalışmış ancak grafikteki değerleri yanlış okuyarak soruya cevap vermişlerdir.	4
T3.2.Tip	Teğetin denklemini aynı zamanda fonksiyonun o noktadaki türevi olarak belirtilmiş ve doğru denkleminde x=1 için çözüm yapılmıştır.	(1,7) ve (-2,-2) noktalarından geçen teğet doğrusu $\frac{x-1}{3} = \frac{y-7}{9} \Rightarrow 3x-3 = y-7$ $y = 3x + 4 \rightarrow$ $f'(1) = 3 + 4 = 7$ f'nin türevi aynı zamanda	4
T3.3.Tip	Hiçbir açıklamada yapılmadan fonksiyonun 1 noktasındaki türevini -2 olarak belirtilmiştir.	$f'(1) = -2$	3
T3.4.Tip	İşlem hatası yapılmıştır.	$f'(1) = m = \frac{x-x_0}{y-y_0} = \frac{1+2}{7+2} = \frac{1}{3}$	2
	Diğer	Üstteki sınıflamalardan herhangi birine dahil olmayan cevaplar bu kategoride toplanmıştır.	3

Öğretmen adaylarının soruya verdikleri yanlış cevaplar incelendiğinde 1. tipte yanlış yapan öğretmen adayları soruyu cevaplamak için bir fonksiyon ve bu fonksiyona ait teğetin grafiğini çizmişlerdir. Çizilen grafikten hareketle teğetin eğimi geometrik olarak hesaplanmak istenmiş ancak verilen değerleri grafiğe yanlış taşıdıkları için ya da değerleri grafikten yanlış okudukları için teğetin eğimini yanlış hesaplamışlardır. Yani işlem hatası yapmışlardır. 2. tipte yanlış yapan öğretmen adayları ise verilen noktalardan geçen teğetin denklemini doğru bir

şekilde bulmuş olmalarına rağmen bu doğruyu türev fonksiyonu olarak belirtmişlerdir. Elde etikleri bu doğrunun eğimi yerine doğru denklemine bir noktasına karşılık gelen değeri fonksiyonun türevi olarak bulmuşlardır. 3.tipte yanlış yapan öğretmen adayları hiçbir açıklama ihtiyacı hissetmeden fonksiyonun  $x=1$  noktasındaki türevinin  $-2$  olduğunu belirtmişlerdir. Bunu fonksiyonun  $(-2,-2)$  noktasından geçmesiyle ilişkilendirerek belirttikleri düşünülmektedir. 4.tipte yanlış yapan öğretmen adaylarının ise dikkatsizlik veya işlem hatası sonucu teğetin eğimini yanlış olarak belirledikleri düşünülmektedir. Soruya yanıt vermeyen 3 öğretmen adayı bulunmaktadır.

Soruya işlem hatası yaparak yanlış cevap veren 2Ö kodlu öğretmen adayına ait mülakat aşağıda yer almaktadır.

- A : Sorunun çözümü için ne yaptığını anlatır mısın?  
 2Ö :bir eğri çizmeye çalıştım ve bu eğriye verilen noktadaki teğeti çizdim  
 A :Sonra  
 2Ö :Teğeti verilen diğer noktadan geçecek şekilde çizdim.  
 A :Amacın neydi?  
 2Ö :Teğetin eğimini bulursam o noktada türevi verir diye düşündüm.  
 A : Teğetin geçtiği noktaları doğru olarak belirledin mi?  
 2Ö :  $(-2,-2)$  yerine  $(-2,0)$  noktasını almışım  
 A :İşlem hatası mı yaptın?  
 2Ö :Evet

Bu durumda öğretmen adayının sorunun çözümü için doğru bir strateji belirlediğini ancak soruda verilen noktaları grafiğe yanlış aktardığı için işlem hatası yaparak yanlış bir sonuç elde ettiğini söyleyebiliriz. Ayrıca bu durumun dikkatsizlikten kaynaklandığını ve öğretmen adaylarının soruların çözümünde daha yüksek bir konsantrasyona ihtiyaç duydukları söylenebilir.

#### Beşinci Soru

Sınıfın büyük bir çoğunluğu (%69) soruya yanlış yanıt vermiştir. Soruya tam doğru yanıt ve kısmen doğru yanıt veren kişi sayısı birbirine yakın olup sırasıyla sınıfın %11 ve % 16'sına karşılık gelmektedir.

Cevabı "Yanlış" olarak sınıflandırılan 31 öğretmen adayının yanlış yorumlama nedenleri ve açıklamalarından örnekler aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 5

#### Öğretmen adaylarının 5. soruya verdikleri yanlış cevapların sınıflandırılması

Yanlış Tipleri	Betimsel Açıklama	Örnek Öğrenci Cevabı	f
T5.1.Tip	$x_0$ ve $x_1$ noktalarında teğetler çizilerek soru cevaplanmıştır.	" $x_0$ ve $x_1$ noktalarında çizilebilir, diğer noktalarda çizilemez"	14
T5.2.Tip	Bir noktada teğet çizilebilmesi için fonksiyonun o noktada türevli olması gerektiği düşünülerek soru cevaplanmış, ancak $x_2$ noktasında fonksiyonun türevli olmadığı fark edilememiştir.	" $x_0, x_1, x_2$ ve $x_3$ noktalarında türev var olduğu için teğet çizilebilir."	6
T5.3.Tip	Soru hakkında açıklama yapılmamış veya belirtilen noktalarda fonksiyonun sürekli olduğu düşünülerek cevap verilmiştir.	" $x_0, x_1$ ve $x_2$ noktalarında teğet çizilebilir, çünkü fonksiyon bu noktalarda süreklidir."	4
T5.4.Tip	Açıklama yok	" $x_0, x_1, x_3$ ve $x_4$ noktalarında teğet çizilebilir"	2
T5.5.Tip	Fonksiyona her noktada teğet çizilebileceği düşünülmüştür.	Bütün noktalarda fonksiyona teğet çizilmiştir.	2
	Diğer	Üstteki sınıflamalardan herhangi birine dahil olmayan cevaplar bu kategoride toplanmıştır.	3



Öğretmen adaylarının soruya verdikleri yanlış cevaplar incelendiğinde 1.tipte yanlış cevap veren 14 öğretmen adayı verilen noktalardan  $x_0$  ve  $x_1$  de teğetler çizerek bu noktalarda fonksiyonların teğetleri olduğunu ifade etmiştir. Aslında bu iki noktada fonksiyona teğet çizilebilmektedir ancak bu iki noktaya ek olarak  $x_3$  noktasında da fonksiyona teğet çizilebilmektedir. Ancak öğretmen adayları  $x_3$  noktasında çizilen teğetin fonksiyonu kestiğini düşündükleri için bu noktada çizilen doğruyu teğet olarak almamışlardır.  $x_3$  noktası fonksiyonun dönüm noktası olarak düşünülmüş olsa da öğretmen adayları bu noktadan teğet geçmeyeceği fikrine kapılmışlardır. 2.tipte hata yapan öğretmen adayları belirledikleri noktalar olan  $x_0$ ,  $x_1$ ,  $x_2$  ve  $x_3$  noktalarında fonksiyona teğetler çizmiş ve fonksiyonun bu noktalarda türevli olduğu için teğetlerinin olduklarını düşünmüşlerdir. Ancak  $x_2$  noktası her ne kadar diğer üç nokta gibi sürekli olsa da bu noktada fonksiyon bir sivri uca sahiptir ve sağ ve sol türevler birbirine eşit değildir. Ancak bu durum öğretmen adayları tarafından fark edilmemiştir. Ayrıca öğretmen adayları bu noktada sonsuz sayıda teğet çizilebiliyor olmasına rağmen kendi belirledikleri bir şekilde teğet çizmişlerdir. 3.tipte yanlış yapan öğretmen adayları ise  $x_0$ ,  $x_1$  ve  $x_2$  noktalarında teğetler çizerek soruyu cevaplamıştır. Diğer yanlış tipinde olduğu gibi  $x_2$  noktasında fonksiyon sivri uca sahip olduğu halde sürekli olduğu düşünülmesi için teğet çizilmiştir. Bu yanlış ek olarak yine  $x_3$  noktasında çizilen doğrunun fonksiyonu kestiği düşünülerek teğet olarak kabul edilmemiştir. 4.tipte yanlış yapan iki öğretmen adayı  $x_2$  noktası hariç bütün noktalarda teğet çizerek soruyu cevaplandırmıştır. Öğretmen adaylarından birisi  $x_2$  noktasında çizilen teğetin fonksiyonu başka noktalarda da keseceğinden teğet olamayacağını belirtmiştir. Ek olarak  $x_4$  noktasında fonksiyonun limiti olmamasına rağmen fonksiyonun tanımlı olduğu uçtan teğet çizmiştir. 5.tipte yanlış yapan öğretmen adayları da fonksiyonun verilen noktalardaki durumuna aldırış etmeden her noktada teğet çizerek soruyu cevaplandırmışlardır. Soruyu yanıtlamayan öğretmen adayı bulunmamaktadır.

Soruya yanlış cevap veren öğretmenler arasında 2Ö kodlu öğretmen adayı bazı noktalarda teğetleri doğru bir şekilde çizmiş bazı noktalarda ise yanlış çizim ve yorumlamalarda bulunmuştur. Aşağıda bu öğretmen adayına ait mülakat kaydı aşağıda yer almaktadır.

- A : $x_1$  noktasından bahseder misin?  
2Ö :Bu noktada teğet çizilebilir  
A :Eğimi?  
2Ö :Eğimi yoktur  
A :Neden yoktur?  
2Ö :O nokta da türevi sıfırdır, eğim olmadığından türev sıfırdır  
A :Türevin sıfır olması teğetin eğimini de sıfır yapmaz mı?  
2Ö :Eğim olmadığından değişimden bahsedemeyiz dolayısıyla türev sıfır olur.  
A :  $x_2$  noktasında çizdiğin teğet başka şekilde de çizilemez miydi?  
2Ö :Böyle de olurdu farklı şekillerde de olabilirdi  
A :Bir noktaya birden fazla teğet çizilebilir mi?  
2Ö :Çizilemez, ben bir tane çizmem gerektiğini düşündüğüm için onu çizdim

Öğretmen adayının verdiği cevaplardan hareketle teğet kavramıyla ilgili temelde bazı eksikliklerinin olduğu anlaşılmaktadır. Örneğin öğretmen adayı x eksenine paralel olacak şekilde çizdiği bir teğet için eğimi olmadığını bundan hareketle değişim olmadığını ve türevin sıfır olduğunu belirtmiştir. Dolayısıyla hem teğeti çizip hem de çizdikten sonra eğimi olmadığından bahsetmesi çelişkili bir durum olarak ortaya çıkmıştır. Bu durum aynı zamanda öğretmen adayının kavramlar arasındaki ilişkiyi tam olarak anlamadığından ve yeterli yorum gücüne sahip olmamasından kaynaklanmaktadır.

25Ö kodlu öğretmen adayının teğet kavramıyla ilgili oldukça yüzeysel bilgilere sahip olduğu yapılan mülakata sonucunda ortaya çıkmıştır. Aşağıda bu öğretmen adayına ait mülakata yer verilmiştir.

- A :Hangi noktalarda teğetler çizilebilir?  
25Ö : $x_0$  ve  $x_1$  noktalarında, burada da çizerek gösterdim  
A :Eğimleri hakkında ne söyleyebilirsin?  
25Ö :...Pozitif olması lazım, bir bölgede olunca yönüne mi bakıyorduk bir şeyinden bakıyorduk...  
A : $x_2$  noktası?  
25Ö :O noktada çizeceğimiz teğet fonksiyonu başka bir noktada kestiği için  $x_2$  de teğet çizemeyiz  
A :Sadece o nokta için incelememiz gerekmez mi?  
25Ö :Ben öyle düşünüyorum, tam bir fikrim yok  
A : $x_3$  noktası?  
25Ö :Dönüm noktası, şimdi çizilebilir diye düşünüyorum.

Öğretmen adayı daha basit sayılabilecek noktalarda teğetleri çizmiş ancak sivri uç ve dönüm noktası gibi farklı noktalarda ise teğetlerin durumu ile ilgili yanlış bilgiler vermiştir. Ayrıca öğretmen adayı teğetlerin

eğimleri hakkında sağlıklı bir fikir öne sürememiştir. Öğretmen adayı bu konu hakkında çok genel bilgilere sahiptir ve bu yüzden farklı durumlar için yorum yapamamıştır.

#### 4. Tartışma Ve Sonuçlar

Türev ile teğet/eğim ilişkisini ölçmeye yönelik sorulara verilen cevapları analiz edildiğinde matematik öğretmen adaylarının bu kavramlar arasındaki ilişkileri tam olarak bilmedikleri, yanlış bilgilere sahip oldukları ve bu konuya ait son derece genel bilgilerle soruları çözmeye çalıştıkları ortaya çıkmıştır.

“Türev ile eğim arasındaki ilişkiyi açıklayınız.” sorusuna bazı öğretmen adaylarının cevapları hem doğru hem de yanlış bilgileri içermektedir. Örneğin bir öğretmen adayı “fonksiyona bir noktadan çizilen teğetin eğimi o noktada türevi verir” ifadesiyle birlikte “doğrunun eğimi yoksa türevi sıfırdır” ifadesini birlikte kullanarak bu konu hakkında yanlış düşüncelerinin de olduğunu ortaya koymuştur. Yine başka bir öğretmen adayının “ bir doğrunun eğimi o doğrunun birinci türevidir” tanımı ise sadece doğrular için geçerli olan kısıtlı bir ifadedir. Bu ifadelerden anlaşılacağı üzere öğretmen adaylarının konuyu derinlemesine yorumlayacak bir bilgi birikimi yoktur. Soruya verilen en yaygın hata türü ise “Bir fonksiyonun belli bir noktadaki türevi aynı fonksiyonun o noktadaki eğimini verir.” cevabı olmuştur. Öğretmen adayları fonksiyona çizilen teğetin eğimi yerine fonksiyonun eğimi ifadesini kullanmışlardır. Buradan hareketle öğretmen adaylarının matematiksel dili etkin bir şekilde kullanamadıkları, bilgi eksiklikleri olduğu veya dikkatsiz davrandıkları gibi sonuçlara varılabilir. Yapılan klinik mülakatta iki öğretmen adayı verdikleri cevaplarda kast etikleri şeyin teğetin eğimi olduğunu belirtmişlerdir.

“Teğeti tanımlayınız” sorusuna üç öğretmen adayı soruyla ilgili doğru tespitlerle birlikte yanlış ifadelere de yer vermiştir. Örneğin bir öğretmen adayı teğetin tanımını doğru yaptıktan sonra teğetin eğiminin sıfırdan büyük olması gerektiğini belirterek daha dar bir kapsamda durumu değerlendirmiştir. Bir diğer öğretmen adayı ise teğetin eğriye bir noktada değen bir doğru olduğunu ve eğriye başka hiçbir noktada kesmemesi gerektiğini belirterek yanlış bir açıklama yapmıştır. Benzer hata Biza, Christou ve Zachariades’in (2006) çalışmasında birçok öğrenci tarafından yapılmış olmasına rağmen bizim çalışmamızda bu hatayı yapan bir öğretmen adayı bulunmaktadır. Öğretmen adayları teğeti veya teğet doğrusunun tanımını birçok farklı şekilde yapmaya çalışmıştır. En çok yapılan hata türlerinden birisi teğetin eğriyi tek bir noktada kesen doğru olduğu şeklinde yapılan ifadedir. Bu tanımdan hareketle bir eğriyi kesen her doğrunun teğet olabileceği sonucuna varılabilir. Yapılan tanım çok genel bir yargıya sahip olup teğet olma durumuyla ilgili hiçbir özel durumu kapsamamaktadır. Öğretmen adaylarının konuyla ilgili bilgileri son derece yüzeysel kalmıştır. Bir diğer hata türü de teğet olma durumunun teğet doğrusunun eğiminin sıfır olması ya da x eksenine paralel olması olarak belirtilmesidir. Her iki hata türüne de baktığımızda soruyu yanlış cevaplayan öğretmen adaylarının soruya doğru cevaplayacak bir bilgi birikimlerinin olmadığı ortaya çıkmıştır. Bu durum öğretmen adaylarının ya kavramları dar bir kapsamda incelemelerine ya da özel durumları gözden kaçırıp çok daha genel açıklamalarda bulunmalarına neden olmaktadır.

Bu bölümün üçüncü probleminde öğretmen adaylarının başarı oranı çok düşük olmakla birlikte soruya yanlış cevap veren öğretmen adayları sınıfın %85’ini oluşturmaktadır. Türevin geometrik yorumuna ilişkin bu kısımda öğretmen adaylarının bilgi düzeylerinin yeterli seviyede olmaması türev konusunun genelinde öğretmen adaylarının anlamalarını zorlaştırmaktadır. Öğretmen adaylarının belli başlı bazı örnekler üzerinde çalışmaları sınırlı bir görüş açısına sahip olmalarına neden olmaktadır. Bu nedenle farklı uygulama örnekleri üzerinde başarılı olamamaktadırlar. Örneğin çoğu öğretmen adayı herhangi bir noktada fonksiyona bir teğetin nasıl çizilmesi gerektiğini bilirken dönüm noktasında fonksiyona çizilen teğetin durumuyla ilgili net fikirlere sahip değildir. Bu durum yapılan klinik mülakatlarda da ortaya çıkmıştır. Bu nedenle öğretmen adayları dönüm noktasında fonksiyona çizilen teğet konusunda tereddüt yaşamış ve çoğu çizilen bu doğrunun fonksiyonu kestiğini düşünerek teğet olmadığını belirtmiştir. Öğretmen adayları cebirsel formdaki soruları çözerken grafiksel ve tablo tipindeki sorulara oranla daha başarılı olmuşlardır. Öğretmen adaylarının okullarda aldıkları eğitimin işlemsel bilgi ve beceriler gerektirdiği düşünüldüğünde bu durum çok şaşırtılacak bir durum değildir.

Türev-teğet/eğim ilişkisinin incelendiği sorular arasında öğretmen adaylarının en yüksek başarı oranına sahip oldukları soru dördüncü sorudur. Öğretmen adaylarının yarısı bu sorunun çözümünde başarılı olmuştur. Soruyu doğru cevaplayan öğretmen adaylarının bir kısmı teğetin eğiminden yararlanarak istenilen noktadaki türevi hesaplarırken bir kısmı da çizdikleri doğrunun tanjantından türevi hesaplamayı başarmıştır. Öğretmen adaylarının cebirsel formda verilen soruların çözümündeki başarılarını burada da devam ettirdiklerini söyleyebiliriz. Öğretmen adayları teğetin tanımını yapmakta zorlanmış ve hangi noktalarda nasıl teğet çizilebileceğini tam olarak kavrayamamış olmalarına rağmen bu sorunun çözümünde başarılı olmuşlardır. Sorunun ilk ve orta öğretimde seviyesinde ve sınavlardan alışık oldukları tarzda sorulmuş olmasının da sorunun çözümüne katkısı olduğu düşünülmektedir. Selden, Selden ve Mason (1994)’a göre öğrenciler rutin analiz problemlerini çözerken çok iyi bir performans sergilemelerine rağmen, rutin olmayan problemleri çözerken büyük zorluklara sahiptir ya da bu türden problemleri çözememektedir. Bu durum söz konusu kavramlarla ilgili öğretmen adaylarının sınırlı kavramsal anlamalara sahip olduklarını göstermektedir. Gerçi cevaba yanlış cevap veren öğretmen adaylarının cevabı azımsanamayacak kadar çoktur. Sınıfın %38’i soruya yanlış cevap vermiştir.

Öğretmen adaylarının en yaygın olarak yaptığı hata türenden biri işlem hatası olmuştur. Öğretmen adayları soruda verilen değerleri kullanarak grafik çizmiş daha sonra bu grafikteki değerleri yanlış okuyarak soruya cevap vermiştir. Yapılan klinik mülakat sonucunda da öğretmen adayı işlem hatasının farkına varmıştır. İşlem hatası veya dikkatsizlik hemen hemen her soruda yapılan bir hata türü olmasına rağmen bu soruda bu oran biraz daha artmıştır. Her ne kadar öğretmen adaylarının cebirsel formadaki soruların çözümünde başarılı olduklarını düşünsek de bu tarz soruların çözümünde en sık yapılan hata türü işlem hatasıdır. Bu durum öğretmen adaylarının soruların çözümünde daha dikkatli olmalarının gerekliliğini ortaya koymaktadır. Bir diğer hata türü de teğet denkleminin herhangi bir noktada türevi veren bir fonksiyon olarak düşünülmesi olmuştur. Öğretmen adayları (1, 7) ve (-2, -2) noktalarından geçen teğet doğrusunun denklemini  $y=3x + 4$  olarak bulmuştur. Bu doğrunun eğimini sorunun cevabı olarak söylemeleri gerekirken elde ettikleri denklemde  $x$  yerine 1 yazarak cevabı 7 olarak vermişlerdir. Amit ve Vinner (1990) araştırmalarında öğrencilerin bir fonksiyonun türevini, verilen bir noktada fonksiyona çizilen teğet doğrusunun denklemini olarak gördüklerini ortaya çıkarmıştır. Ayrıca çalışmalarına katılan öğrencinin türevle teğet doğruları arasındaki ilişkiyi biliyor gibi görünmesine rağmen teğet doğrusunun teğet noktasındaki denklemini sanki o noktada türevmiş gibi kullandığını görmüşlerdir. Bu çalışmada da daha önce belirttiğimiz gibi öğretmen adayları türevle teğet arasındaki ilişki hakkında bazı bilgilere sahip olmalarına rağmen benzer bir hata yapmışlardır. Öğretmen adaylarının ve öğrencilerin aynı hataları yapmaları oldukça dikkat çekici bir durumdur. Buradan hareketle öğretmen adaylarının bir noktada türev ile o noktada çizilen teğet doğrusu arasındaki ilişkiyi bilmediklerini ya da ezberleme yoluyla öğrenmeye yönelerek böyle bir yanılığa sahip olduklarını söyleyebiliriz.

Öğretmen adaylarından bir grafiğe ait belirli noktalardan geçen teğetlerin çizilmesinin istendiği son soruda sınıfın %69'u soruya yanlış cevap vermiştir. Bu oran araştırmanın benzer nitelikteki ikinci sorusundaki orana yakındır ve öğretmen adayları genel olarak teğetle ilgili bilgilere sahip olsalar bile bu bilgiler özel durumları yorumlamalarına veya grafiksel olarak türev-teğet ilişkisini kurmalarına çok fazla katkı sağlamamıştır. Konuyla ilgili öğretmen adaylarının yeterli bilgiye sahip olmadıkları açıkça ortaya çıkmıştır. Öğretmen adaylarının konuyla ilgili yeterli bilgiye sahip olmayışı onların soruların çözümde özgüvenlerini kaybetmelerine neden olmaktadır. Örneğin soruya doğru cevap veren bir öğretmen adayı araştırmanın ikinci sorusunda dönüm noktasında çizilen teğetin eğriyi kestiği düşüncesiyle teğet olmayacağını belirtmiş olmasına rağmen bu soruda dönüm noktasında teğet çizmiştir. Yani çelişkili bir durum ortaya çıkmıştır. Bu durum mülakatta esnasında öğretmen adayına hatırladığında cevabını değiştirerek dönüm noktasındaki teğetin eğriyi kestiğini belirterek soruya yanlış cevap vermiştir. Benzer bir durumun tersi de yine mülakat esnasında ortaya çıkmıştır. Araştırmanın üçüncü sorusunda dönüm noktasında teğet çizilmeyeceğini belirten öğretmen adayı yine bu soruda diğer öğretmen adayı gibi çizilebileceğini belirtmiştir. Bu durum kendisine hatırlatıldığında ise ikinci sorudaki cevabının yanlış olduğunu ifade edip dönüm noktasıyla ilgili olarak "çünkü fonksiyonun o noktada sürekli ve türevli olmasına bir mani yok o yüzden teğet çizilebilir" açıklamasını yapmıştır. İki öğretmen adayıyla yapılan mülakatta elde edilen bu durumu kısaca özetleyecek olursak, konuyla ilgili yeterli bilgiye sahip olmayan öğretmen adaylarının sorunun çözümünü için gerekli yorum gücüne ve özgüvene sahip olmadıklarını bu yüzden her sorunun çözümünde başarılı olamadıklarını söyleyebiliriz. Tam tersi bir durumda ise bilgi düzeyi iyi olan, kavramlar arası ilişkileri kurmada başarılı olan öğretmen adayları soruların çözümünde ve yorumlanmasında başarılı olmuşlardır. Öğretmen adaylarının sahip oldukları alan bilgisinin önemi bir kez daha ortaya çıkmıştır.

Bu soruya verilen en yaygın hata türünü yapan öğretmen adaylarının hepsi dönüm noktasında teğet çizilemeyeceğini belirtmiştir. Bu durum araştırmanın üçüncü probleminde de öğretmen adaylarının en çok yapmış oldukları hata türüydü. Bir diğer hata türünde ise öğretmen adayları fonksiyonun sürekli olduğu her noktada türevli olabileceğini düşünerek fonksiyonun sürekli olduğu  $x_0$ ,  $x_1$ ,  $x_2$  ve  $x_3$  noktalarında teğetler çizmişlerdir. Yalnız  $x_2$  noktasındaki sivri uça çizilebilecek sonsuz tane teğet var iken bu noktada öğretmen adayları kendi belirledikleri bir teğet çizerek soruya yanlış cevap vermişlerdir. Araştırmanın birinci alt probleminde de benzer nitelikteki bir soruya öğretmen adayları yine aynı gerekçeyle yanlış cevap vermişlerdir. Yapılan hatalar göz önünde bulundurulduğunda özellikle öğretmen adaylarının dönüm noktası ve sivri uç gibi bir eğri üzerindeki farklı tipteki noktalarda türev-teğet ilişkisini kuramadığı görülmüştür. Öğretmen adaylarının teğet ve eğimle ilgili bilgileri olduğu söylenebilir ancak bu bilgiler farklı durumlarla karşılaşıldığında yorum yapmak ve derinlemesine düşünmek için yeterli değildir. Öğretmen adaylarının bu konuları ileride öğretecek olduklarını düşünürsek sadece tanım düzeyinde bilgi sahibi olmak veya cebirsel gösterimde soruların çözümünde başarılı olmak bu konuların öğrencilere sağlıklı bir şekilde aktarılmasında yeterli olmayacaktır.

## 5. Öneriler

Türev konusuyla ilgili lisede verilen eğitimde ağırlıklı olarak işlemsel becerilerin geliştirildiği formül veya kuralların kullanılarak soruların çözüldüğü dersler yerine kavramsal anlamının ön planda olduğu, konunun teorik alt yapısına daha çok vurgu yapılan bir eğitim verilebilir. Öğrencilerin kısa işlemlerle hızlı bir şekilde cevap veremeyeceği yorum ve derinlemesine düşünmeyi gerektiren sorulara da yer verilmelidir.

Araştırma sonuçları öğretmen adaylarının cebirsel gösterimle verilen soruları çözümedeki başarılarını nümerik ve grafiksel sorularda göstermediklerini ortaya koymuştur. Bu durumu göz önüne alırsak bu ilişkinin iyi bir şekilde anlaşılması için grafiksel yöntemlerin kullanıldığı sorulara yer verilebilir.

Özellikle türev ile teğet/eğim ilişkisinin daha anlaşılır bir hale getirebilmek için bilgisayar cebir sistemi yazılımları veya dinamik matematik yazılımlarına derslerde yer verilmelidir.

## Extended Abstract

### Kaynaklar

- Akkaya, E. (2009). Matematik öğretmen adaylarının türev kavramına ilişkin teknolojik pedagojik alan bilgilerinin öğrenci zorlukları bağlamında incelenmesi. Yayınlanmamış yüksek lisans tezi, Marmara Üniversitesi, İstanbul.
- Amit, M. & Vinner, S. (1990). Some misconception in calculus: Anecdotes or the tip of an iceberg?. In G. Booker ve T.N. Mendicuti (Eds.), Proceedings of the 14th Annual meeting of the International Group of Psychology of Mathematics Education: Vol. 1 (pp. 3-10). Cinvestav, Mexico.
- Aspinwall, L & Miller, L.D. (2001). Diagnosing conflict factors in calculus through students' writings: one teacher's reflections. *Journal of Mathematical Behavior*, 20(1), 89-107.
- Baki, A. (2008). *Kuramdan uygulamaya matematik eğitimi* (4. Baskı). Trabzon: Harf Eğitim Yayıncılığı.
- Balcı, M. (2000). *Genel Matematik 1*. Ankara: Balcı Yayınları.
- Bezuidenhout, J. (1998). First-year university students' understanding of rate of change. *International Journal of Mathematical Education in Technology*, 29, 389-399.
- Bingölbali, E. (2008). Türev kavramına ilişkin öğrenme zorlukları ve kavramsal anlama için öneriler. M. F. Özmantar, E. Bingölbali ve H. Akkoç (Ed.), *Matematiksel Kavram Yanılgıları ve Çözüm Önerileri* içinde (s. 223-255). Ankara: PegemA.
- Bittinger, M.L., Ellenbogen, D.J. & Surgent, S.A. (2012). *Calculus and its application* (10 th Edition). Addison-Wesley.
- Bütün, M. (2012). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının önerilen entegre program sürecinde matematiği öğretme bilgilerinin gelişimi. Yayınlanmamış doktora tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon.
- Çepni, S. (2009). *Araştırma ve proje çalışmalarına giriş* (4. Baskı). Trabzon.
- Doğan, A., Sulak, H. ve Cihangir, A. (2002, Eylül). İlköğretim matematik eğitimi anabilim dalı öğrencilerinin özel fonksiyonlar ile fonksiyonlarda limit, türev ve türev uygulamaları konularındaki yeterlikleri üzerine bir araştırma. V. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi, Ortadoğu Teknik Üniversitesi, Ankara.
- Duru, A. (2006). Bir fonksiyon ve onun türevi arasındaki ilişkiyi anlamada karşılaşılan zorluklar. Yayınlanmamış doktora tezi, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.
- Ekiz, D. (2003). *Eğitimde araştırma yöntem ve metotlarına giriş: nitel, nicel ve eleştirel kuram metodolojileri*. Ankara: Anı Yayıncılık.
- Fennema, E. & Franke, M. L. (1992). Teachers' knowledge and its impact. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Learning and Teaching Mathematics* (pp. 147-164). New York: Macmillan.
- Gür, H. ve Barak, B. (2007). Ortaöğretim 11. sınıf öğrencilerinin türev konusundaki hata örnekleri. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri Dergisi*, 7(1), 453-480.
- Hacıömeroğlu, E. S. (2007). Calculus students' understanding of derivative graphs: problems of representations in calculus. Unpublished doctoral dissertation, Florida State University.
- Hacısalıhoğlu, H. H., Hacıyev, A., Kalantarov, V., Sabuncuoğlu, A., Brown, L. M., İbikli, E. ve Brown, S., (2000). *Türk dil kurumu matematik terimleri sözlüğü*. Ankara: Bizim Büro Basımevi Yayın Dağıtım.
- Hauger, G. S. (2000). Instantaneous rate of change: a numerical approach. *International Journal of Mathematical Education of Science and Technology*, 31(6), 891-897.
- İşleyen, T. ve Akgün, L. (2009, Ekim). Matematik Öğretmen Adaylarının Türev ve Diferansiyel Kavramlarını Algılama Düzeyleri, XVIII. Ulusal Eğitim Bilimleri Kurultayı, Ege Üniversitesi, İzmir.
- Kendal, M. and Stacey, K. (2003) Tracing learning of three representations with the differentiation competency framework. *Mathematics Education Research Journal*, 15(1), 22-41.
- Lloyd, G.M. & Wilson, M. (1998). Supporting innovation: the impact of a teacher's conception of function on his implementation of a reform curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(3), 248-274.
- Orton, A. (1983). Students' understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics*, 14, 235-250.
- Özbellek, S. (2003). İlköğretim 6. ve 7. sınıf düzeyindeki açığı konusunda karşılaşılan kavram yanılgıları, eksik algılamaların tespiti ve giderilme yöntemleri. Yüksek Lisans Tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi, İzmir.

- Park, J. (2011). Calculus instructors' and students' discourses on the derivative. Unpublished doctoral dissertation, Michigan State University.
- Shulman, L.S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Stein, M. K., Baxter, J. A., & Leinhardt, G. (1990). Subject-matter knowledge and elementary instruction: a case from functions and graphing. *American Educational Research Journal*, 27(4), 639-663.
- Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.
- Thomas, G. B., Weir, M. D., Hass, J. & Giordano, F. (2005). *Thomas' Calculus* (11th Edition). Pearson Education. Addison-Wesley.
- Ubuz, B. (2001). First year engineering students' learning of point of tangency, numerical calculation of gradients, and the approximate value of a function at a point through computers. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 20 (1), 113-137.
- Ubuz, B. (1999). Genel matematikte (Calculus) öğrenci hataları. *Matematik Dünyası*, 5, 9-11.
- Van Dooren, W., Verschaffel, L., & Onghena, P. (2002). The impact of preservice teachers' content knowledge on their evaluation of students' strategies for solving arithmetic and algebra Word problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5), 319-351.
- White, P. & Mitchelmore, M. (1996). Conceptual knowledge in introductory calculus. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(1), 79-95.
- Yenilmez, K. ve Yaşa, E (2008). İlköğretim öğrencilerinin geometrideki kavram yanılgıları. *Eğitim Fakültesi Dergisi*, XXI (2), 461-483
- Yürük, N. Çakır, Ö. S. Ve Geban, Ö. (2000). Kavramsal değişim yaklaşımının hücresel solunum konusunda lise öğrencilerinin biyoloji dersine karşı tutumlarına etkisi. IV. Fen Bilimleri Eitimi Kongresi 2000, Hacettepe Üniversitesi 6-8 Eylül Ankara.
- Zandieh, M. (2000) A theoretical framework for analyzing students understanding of the concept of derivative. *Conference Board of the Mathematical Sciences (CBMS) Issues in Mathematics Education*, 8, 103-127.