BUCA EĞİTİM FAKÜLTESİ DERGİSİ 33 (2012)

SONSUZ SAYI KÜMELERİ IŞIĞINDA İLKÖĞRETİM ÖĞRENCİLERİNİN SONSUZLUK ALGI VE YANILGILARININ BELİRLENMESİ

DETERMINATION OF PRIMARY SCHOOL STUDENTS' PERCEPTIONS AND MISCONCEPTIONS OF INFINITY USING INFINITE NUMBER SETS

Serkan NARLI[1] Pınar NARLI[2]

ÖZET: Sonsuzluk, gerçek ve potansiyel sonsuzluk olmak üzere ikiye ayrılmaktadır. Eski zamanlardan beri, potansiyel sonsuzluğun matematiksel sonsuzluk olduğu kabul edilmektedir. Sayı kümeleri ise, matematiksel sonsuzluğu içeren kavramların başında gelir. Bu yüzden, sayı kümeleri, sonsuzluk fikrinin belirlenmesinde kullanılabilir. Diğer taraftan, bu kümelerin tam olarak algılanabilmesi için öğrencilerde sonsuzluk fikrinin bulunması gerekir. Bu bağlamda bu çalışmanın amacı, öğrencilerin sonsuzluk fikrine ne derece sahip olduklarını, okulun öğrencilere sonsuzluk fikrini kazandırıp kazandıramadığını ve öğrencilerin bu konudaki yanılgılarını, sayı kümeleri ile ilişkilendirerek belirlemeye çalışmaktır. Bu amaçla 13-14 yaş arası İlköğretim öğrencilerinden, 131 öğrencinin görüşleri açık uçlu anket ile toplanmış ve bunların 10'u ve 3 ilköğretim öğretmeni ile yarı yapılandırılmış görüşme yapılmıştır. Sonuçta öğrencilerin sahip oldukları sonsuzluk fikirlerinde kişisel deneyimlerin yattığı ve formal eğitimin buna fazla yardım etmediği görülmüştür. Ayrıca öğrencilerin kümelerin sonsuz olup olmamasını belirlemede, sezgisel yollarla, tümevarımsal süreç ve başka bir küme ile karşılaştırma yöntemlerini kullandıkları tespit edilmiştir. Sonsuz kümelerin karşılaştırılmasında da literatürde bahsedilen bazı yanılgıların bulunduğu anlaşılmıştır.

Anahtar Sözcükler. Sonsuz kümeler, matematik eğitimi, sayı kümeleri, denklik

ABSTACT: Infinity has divided into two componenets, the actual and potential infinity. Potential infinity has been considered as mathematical infinity for a long time. Number sets is one of the concepts involving mathematical infinity. Therefore, numer sets can be used to determine perception of infinity. On the other hand, students must have some perception of infinity to perceive this sets exactly. In this context, the aim of this study is threefold: to investigate primary school students' perception of infinity concept, to determine to what extent schooling is successful in the attainment of the concept of infinity, and to investigate their misconceptions of the concept of infinity by associating it with number sets. Data collected through open-ended questionnaires administered to 131 primary school students aged 13-14 and semi-structured interviews conducted with ten of these students and three primary mathematics teachers. Results indicated that students' personal experiences mainly determined their concept of infinity and that formal education had minimal effects. Also, it was determined that there were two methods which intuitively used by students to decide whether a given set is finite or infinite: induction process and comparing the given set with another set. Students' also displayed some misconceptions about the comparison of infinite sets.

Keywords. Infinity sets, matematics education, number sets, equality

1. GİRİŞ

Çıkarımcı doğasından dolayı matematik, temeldeki birincil fikirlere, aksiyomlara ve tanımlara dayanır. Tanımlar, matematikte bazı kavramların (rasyonel sayılar, karmasık sayılar vs.) matematiksel varlığını ortaya koymak için sıklıkla kullanılır (Tirosh,1999). Ancak matematik tarihi, birçok durumda, bu tür tanımların ortaya koyduğu kavramların hemen kabul görmediğini göstermektedir. Hatta çoğunlukla matematik dünyasının bunları kabul etmesi on yıllar, hatta yüzyıllar almıştır (Fischbein, 1987).

[1]Dr. DEU Buca Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği ABD, İzmir, serkan.narli@deu.edu.tr
[2] İlköğretim Matematik Öğretmeni, pinar.narli.mat@gmail.com

Bunların en uç durumu, muhtemelen sonsuz küme kavramıdır. Sonsuz kümeleri matematiksel nesne olarak görmedeki gönülsüzlük, sonsuzluğun bir potansiyel olduğunu ve gerçek olmadığını öne süren Aristo'ya kadar götürülebilir (Tirosh, 1991). Bu yaklaşım 2000 sene boyunca matematiğe egemen olmuştur. Matematikte sonsuzluk açıkça veya üstü kapalı olarak ilk büyük matematikçilerin yapıtlarında görülmektedir. Fakat sonsuzluk kavramı, kendi doğasından gelen çelişkilere yol açmıştır. Galileo ve Gauss gerçek sonsuzluğun mantıklı ve tutarlı akıl yürütmeye dahil edilemeyeceği sonucuna varmışlardır. Gauss, 1831'de sonsuz bir çokluğun tamamlanmış bir nicelik olarak kullanımına hiçbir zaman izin verilemeyeceğini belirtmiştir. Kant ise, çalışmalarında, uzay ve zamanın sonsuzluğuna gönderme yapmış ve dünyanın gerek uzaysal gerekse zamansal yönden sonluluğu ya da sonsuzluğunu, insan zekâsının kabul edemeyeceğini ileri sürmüştür. Bu durum Kant’a göre, uzay ve zamanın kendiliğinden dış dünyada var olmadığının, anlama, düzenleme uğraşında olan beynimiz tarafından düzenlenmiş kavramlar olduğunun bir kanıtıdır (Fischbein, 2001).

Filozoflar ve matematikçiler, gerçek ve potansiyel sonsuzluğu ayırmışlardır. Zekânın kavramayı zor, hatta imkânsız bulduğu sonsuzluk, “Dünyanın sonsuzluğu, bir doğru parçası üzerindeki noktaların sonsuzluğu” örneklerindeki gibi gerçek sonsuzluktur. Akıl asıl olarak, uzay ve zamandaki davranışlarımızla kazandığımız sonlu gerçeklere adapte olmuştur. Mantık, sadece sonlu gerçeklerle ifade edilen kavramları tutarlı olarak ele alabilir. Bu yüzden de gerçek sonsuzluk ile uğraşılmaya başlandığı anda çelişkiler de kendini göstermeye başlar.

19. yy.'nin sonunda Cantor, sonsuz bir kümeyi, kendi asal alt kümelerinden biriyle birebir eslenebilen bir küme olarak tanımladığı bir sonsuz kümeler teorisi formüle etmiştir. Cantor bunu yaparak sayıların bir seferde sonsuz bir topluluk olarak algılanmasına yapılan köklü itirazları dağıtmıştır. Cantor'un sonsuz küme tanımı, “bir kümeyle asal alt kümelerinden birinin denkliği” kavramını içinde barındırdığı için, sonsuzluk fikriyle ilgili önemli bir algısal engel oluşturur. Bu eşitliği kabul etmek, “bütün parçalarından daha büyüktür” fikrinin her küme için doğru olmayacağının kabulünü gerektirdiğinden algısal olarak çaba gerektirir. Bundan dolayı bu sonsuz küme tanımının küme teorisi görmemiş öğrenciler tarafından kendiliğinden kullanılması çok düşük bir olasılıktır (Tirosh,1999).

Cantor’dan bu yana, sözü geçen güçlükleri içinde barındıran sonsuzluk kavramı, üzerinde çalışılan bir alan olmuştur. Fiscbein ve arkadaşları (1979,4-5), üstü kapalı olarak ta olsa, Piaget ve Inhelder (1956, p.125-149) in çalışmasını, çocukların sonsuzluğu anlaması üzerine yapılan araştırmaların başlangıcı olmasını teklif etmiştir (Monaghan, 2001). Geometrik figürlerin tekrarlı bölünmesini içeren bu çalışmadan bu yana sonsuzluk kavramı üzerine çalışmalar devam etmiştir.

Genelde yapılan çalışmalar, 8 yaşındaki çocukların doğal sayılar dizisinin sonu olmadığını anladığını bildirmiştir. Sonradan, 11–12 yasına kadar çocuklar noktaların boyutsuzluk özelliğinin farkına varırlar ve akabinde doğru parçalarının sonsuz kere bölünebilir olduğunu iddia ederler. Bu çalışmalarda öğrencilere bazı süreçlerin sonuçlanıp sonuçlanmayacağı sorulmuştur. Süreçlerin sonlanmayacağını iddia eden öğrencilerin ortaya çıkan kümenin sonsuz olduğunu anladığını araştırmacılar tarafından varsaymıştır (Tirosh,1999).

Daha yüksek yaş gruplarında yapılan çalışmalar da, Cantor küme teorisini algılamada öğrencilerin zorlandığını belirtmektedir (Narli, 2011; Narli and Başer, 2008, 2010; Tsamir 1999,2001,2002).

Sayılarda ve sayı kümlerinde ise sonsuzluk sezgisel olarak kendisini hissettirmekte ve sözü geçen bu sorunlar, öğrencilerin sonsuzluk kavramında sorunlar yaşamasına neden olmaktadır. (Singer ve Voica, 2003). Fischbein'e göre (1987), öğrencilerin sonsuzluk hakkında sahip oldukları sezgisel düşünceler iki kategoride incelenebilir. İlk olarak, sonsuzluk fikri için, temelde kişisel deneyimler bulunur, ikincisinde ise formel eğitim sonsuzluk fikrini oluşturur. Bunlar birincil ve ikincil sezgiler olarak isimlendirilmektedir. Sonsuzluk hakkında bu tür sezgileri araştıran Singer ve Voica(2003), sonraki çalışmalarında, sezgiler ile kavrama (algı) arasındaki ilişkiyi araştırmış ve sonsuzluk ile ilgili algıları birincil ve ikincil olmak üzere iki kategoride toplamışlardır (Singer ve Voica, 2008): Okul dışı kişisel deneyimlerin belirlediği birincil algılar ve formal eğitim kaynaklı ikincil algılar. Birincil algılar ise, üç kategoride toplanmıştır. Süreçsel, topolojik ve dinsel olarak belirlenen bu üç kategori, öğrencilerin, “sonsuzluk kavramını kendi cümlelerinizle tanımlayınız” sorusuna verdikleri cevaplar ışığında oluşturulmuştur. Bu çalışmanın amacı ise, öğrencilerin sonsuzluk fikrine gerçekten sahip olup olmadıklarını ve öğrencilerin bu konudaki yanılgılarını belirlemeye çalışmaktır. Sayı kümelerinin, sonsuzluk fikrini belirlemede yararlı olabileceği düşünülmüş ve genel amaç için aşağıdaki alt problemler belirlenmiştir:

1. Öğrencilerin doğal sayılar kümesinin sonsuzluğu hakkındaki düşünceleri nelerdir?
2. Öğrencilerin rasyonel sayılar kümesinin sonsuzluğu hakkındaki düşünceleri nelerdir?
3. Öğrencilerin açık aralıkların sonsuzluğu hakkındaki düşünceleri nelerdir?
4. Sonsuz kümelerin karşılaştırılması (denkliği) ile ilgili öğrencilerin sezgisel düşünceleri nelerdir?

2. YÖNTEM

Bu çalışma, nitel bir çalışmadır. İlköğretim 8. sınıf öğrencilerin sonsuzluk kavramı hakkındaki görüşleri; açık uçlu değerlendirme sorularından oluşan açık uçlu bir anket ile toplanmış ve bunu takiben on öğrenciyle ve 3 ilköğretim matematik öğretmeni yarı yapılandırılmış görüşme yapılmıştır.

2.1 Çalışma Grubu

Çalışmanın öğrenci örneklem grubu, Milli Eğitim Bakanlığına bağlı İlköğretim Okulu 8. sınıf öğrencilerinin içinden seçilmiştir. Açık uçlu anket, 67’si kız, 64’ü erkek olmak üzere toplam 131 öğrenciye uygulanmış ve görüşme ise bu öğrenciler arasından seçilen 5’ i erkek 5’i kız, 10 öğrenci ile yapılmıştır. Ayrıca bu öğrencilerin matematik derslerini yürüten ikisi bayan biri erkek toplam üç matematik öğretmeni ile görüşülmüştür.

2.2 Veri Toplama Araçlarının Geliştirilmesi

Bu çalışmada, İlköğretim 8. sınıf öğrencilerin sonsuzluk hakkındaki fikirlerini belirleyen açık uçlu bir anket ve yarı yapılandırılmış bir görüşme formu ve öğretmen görüşme formu geliştirilmiştir. Her bir aracın geliştirilme süreçleri şöyledir:

a) Açık uçlu öğrenci anketi: Toplam yedi maddeden oluşan bu açık uçlu anket oluşturulmadan önce beş İlköğretim Okulu son sınıf öğrencisiyle konu hakkında tamamen açık uçlu serbest sohbet şeklinde bir görüşme yapılmış ve bu sohbet sırasında öne çıkan konular listelenmiştir. Burada ortaya çıkan konular ana başlıklar halinde listelendikten sonra açık uçlu anket taslağı oluşturulmuştur. Elde edilen bu taslağa 25 İlköğretim Okulu son sınıf öğrencisiyle deneme çalışması yapılmış, işlerlik kazandığı konusunda uzman görüşleri alındıktan sonra taslak, uygulamaya hazır hale gelmiştir.
b) Öğrenci Görüşme Formu: Açık uçlu anket geliştirilmesi sırasında sohbet şeklinde yapılan görüşmeden ve pilot çalışmada elde edilen veriler ışığında toplam 20 maddelik bir görüşme formu taslağı geliştirilmiştir. Pilot çalışmaya katılan 25 öğrenciden ikisiyle bu taslak görüşme formu; kapsam, işlerlik ve zaman açısından pilot çalışma olarak

denenmiş, işlerlik kazandığına uzman görüşleriyle kanaat getirdikten sonra uygulamaya hazır hale gelmiştir.

c) Öğretmen Görüşme Formu: Öğrenci görüşme formunda geliştirilen sorular sadece hitap tarzı öğretmenleri kapsayacak şekilde değiştirilerek kullanılmıştır.

2.3 Geçerlilik ve Güvenirlik

Veri toplama araçlarının kapsam geçerliliği Matematik Eğitimi Anabilim Dalından iki öğretim elemanı ile araştırma konu kapsamı detaylı bir şekilde dikkate alınarak sağlanmıştır. Güvenirlik değerlendirmesi yapılırken elde edilen nitel veriler her bir araştırmacı tarafından ayrı ayrı kategorilere ayrılmış ve kodlanmıştır. Daha sonra bu kategorilerin uyum oranları belirlenmiştir. Yapılan bu kodlama sonrasında %92 uyum sağlandığı görülmüştür.

Sonuçta elde edilen açık uçlu anket, 7 sorudan oluşmaktadır. Bu sorulardan 3'ü *[1. Sonsuzluk denildiğinde aklınıza ne geliyor? Sonsuzluk kavramını siz kendi kelimelerinizle nasıl tanımlarsınız? 2. Sonsuzluk kavramı ile ilk olarak ne zaman(kaç yaşında), nerede ve nasıl karşılaştınız? 3. Bugüne kadar öğrenim yaşantınızda sonsuzluk kavramı ile karşılaştınız mı? Açıklayınız(hangi ders ve konularda)]* ile ilgili bulgular, Narlı ve ark. (2009)'da incelenmiştir. Bu çalışmada ise sorulardan diğer dördü tartışılacaktır. Bu dört soru şunlardır: *1. Doğal sayılar kümesi sonsuz mudur? Neden? Açıklayınız. 2. Rasyonel sayılar kümesi sonsuz mudur? Neden? Açıklayınız. 3. (3,5) aralığında kaç tane rasyonel sayı vardır? Niçin? Açıklayınız. 4. İki sonlu kümenin elemen sayısı eşitse bu iki kümeye denk kümeler denir. Sizce sonsuz kümeler denk olabilir mi? Açıklayınız.*

3. BULGULAR

Açık uçlu anketten ve yarı yapılandırılmış görüşmelerden elde edilen bulgular bu bölümde sunulacaktır.

3.1. Açık uçlu anketten elde edilen bulgular

Açık uçlu ankette öğrencilere "*Doğal sayılar kümesi sonsuz mudur? Neden? Açıklayınız."*sorusu yöneltilmiştir. Bu soruya verilen yanıtlar gruplanmıştır. Kategoriler ve frekansları Tablo 1'de görülmektedir.

Tablo 1. Öğrencilerin Doğal Sayılar Hakkındaki Düşünceleri

Doğal sayılar kümesi sonsuz mudur? Neden? Açıklayınız	**Cinsiyet**		**n**
BOYUTLAR	**Kız(67)**	**Erkek(64)**	**(131)**
1.Sonsuzdur	**60**	**54**	**114**
a. Sınırsızlık, sürerlilik	**31**	**21**	**52**
b.Tümevarım yaklaşımı	**5**	**2**	**7**
c. Diğer	**24**	**31**	**55**
2.Değildir	**2**	**5**	**7**
3.Bilmiyorum	**5**	**5**	**10**

Tablo 1'den de görülebileceği gibi öğrencilerin çok büyük bir kısmı doğal sayıların sonsuz olduğunu belirtmektedir. Bu kategori üç başlık altında toplanmıştır. Öğrenciler, doğal sayıların sonsuzluğunu sınırsızlık ve sürerlilik kavramlarıyla açıklama eğilimi göstermektedirler. *"Bir sınırlama getirilemez"*, "*Sınırsızdır*", "*Devam ettiği için*" vb.. Bu gruptaki açıklamaların bir kısmında sonsuzluğunun başlangıcı olduğu kabul edilip sonunun olmadığı ifade edilmiştir: *"Başlangıcı belli sonu belli değildir, istediğin yere kadar devam eder"* ,*"0'dan başlayıp sonsuza kadar gider"*vb. Ayrıca öğrencilerin, "*En yüksek sayıyı yanına bir rakam daha ekleyip çoğaltabiliriz*", "*Mesela elinize bir defter alalım. O defteri sayılarla doldururum. Her sayıyı yazınca mutlaka bir devamı vardır*" gibi ifadeler kullandıkları görülmektedir. Bu tür ifadeler "tümevarım yaklaşımı" alt başlığında toplanmıştır. Doğal sayılara sonsuz deyip, herhangi bir yorum yapmayan veya "*Bize öyle öğrettiler", "(-) de olabilir (+) da olabilir", "Herkes ölüyor ama sayı hiç ölmüyor*" gibi yorum yapan öğrenciler, "diğer" alt başlığında dahil edilmiştir.

Bunun yanında doğal sayılar kümesi sonsuz değildir ve bilmiyorum diyen öğrenciler, sonsuzudur diyen öğrencilere oranla oldukça azdır. Sonlu diyen öğrencilerde sadece "hayır" diye cevap vermiş herhangi bir açıklama yapmamışlardır.

Açık uçlu ankette öğrencilere diğer bir soru olarak "*Rasyonel sayılar kümesi sonsuz mudur? Neden? Açıklayınız."*sorusu yöneltilmiştir. Bu soruya verilen yanıtlar Tablo 2'de görülmektedir:

Tablo 2. Öğrencilerin Rasyonel Sayılar Hakkındaki Düşünceleri

Rasyonel sayılar kümesi sonsuz mudur? Neden? Açıklayınız	Cinsiyet		n
BOYUTLAR	**Kız(67)**	**Erkek(64)**	**(131)**
1.Sonsuzdur	**56**	**54**	**110**
a. Sınırsızlık, sürerlilik	**14**	**11**	**25**
b.Karşılaştırma	**13**	**3**	**16**
c. Diğer	**29**	**40**	**69**
2.Değildir	**7**	**5**	**12**
3.Bilmiyorum	**4**	**5**	**9**

Öğrencilerin çoğunun, rasyonel sayıların sonsuz olduğunu belirttikleri görülmektedir. Öğrencilerin bazılarının, rasyonel sayıların sonsuzluğunu, sınırsızlık ve sürerlilik kavramlarıyla açıklama eğiliminde oldukları anlaşılmaktadır. "*Bitmez*", "*Devam eder*", "*Bu rakamlar sınırsızdır*", *"Q nun ucu bucağı yoktur*" gibi. Bu gruptaki açıklamaların bir kısmında rasyonel sayıların başlangıcı olduğu kabul edilip sonunun olmadığı ifade edilmiş; *"Başlangıcı vardır ama sonu yoktur"* "*1'den başlayıp sonsuza kadar gittiği için*", "*0 dan başlar sonsuza kadar devam eder*", bir kısmında da rasyonel sayıların başlangıcının da sonunun da olmadığı söylenmiştir: "*Başlangıcı ve bitişi belli değildir*". Öğrencilerin bazıları da rasyonel sayıların sonsuzluğunu, başka kümeler ile karşılaştırarak ifade etmeye çalışmışlardır: *"Onlarda doğal sayılar kümesine girerler", "Rasyonel sayılar doğal sayılardan oluşur bu yüzden rasyonel sayılar sonsuzdur", "Tamsayılı olabilir ve istediğimiz kadar araya yazabiliriz", "Doğal sayılar sonsuz olduğundan rasyonel sayılar da sonsuzdur"* vb.. Doğal sayılara sonsuzdur deyip herhangi bir açıklama getirmeyen veya sınırsızlık, sürerlilik ve karşılaştırma alt bölümlerine dahil edilemeyecek ifadeler diğer boyutunda toplanmıştır. Bu boyutta "*Kesirlidir çünkü", "Herhangi iki sayı arasında sonsuz sayı vardır", "Çünkü sayı doğrusu üzerinde her bir rakam rasyoneldir ve sonsuzdur", "1 den başlar 1000 e kadar uzar", "Negatif ve pozitif olarak ikiye ayrılır bu yüzden sonsuzdur*" gibi ifadeler bulunmaktadır.

Rasyonel sayılar kümesinin sonsuz olmadığını iddia eden öğrenciler, herhangi bir gerekçe sunmamışlardır. Sadece bir öğrenci, "*0 dan başlamadığı için sonsuz değildir*" cevabını vermiştir. Ayrıca verilen cevaplarda, sonsuz olup olmaması haricinde, rasyonel sayılarla ile ilgili oldukça yanlış ifadelerin kullanıldığı görülmektedir.

"(3,5) aralığında kaç tane rasyonel sayı vardır? Niçin? Açıklayınız" sorusuna verilen cevaplar ise Tablo 3'te gruplandırılmıştır:

Tablo 3. Öğrencilerin (3,5) aralığı Hakkındaki Düşünceleri

(3,5) aralığında kaç tane rasyonel sayı vardır? Niçin? Açıklayınız	**Cinsiyet**		**n**
BOYUTLAR	**Kız(67)**	**Erkek(64)**	**(131)**
1.Sonsuz olma	**35**	**32**	**67**
2.Sonlu	**13**	**12**	**25**
3.Bilmiyorum(Emin Değilim)	**9**	**5**	**14**
Cevap Vermeyenler	**8**	**11**	**19**
4.Diğer	**2**	**4**	**6**

Bu aralıkta sonsuz elemanın bulunduğunu söyleyen öğrencilerin sayısı, örneklemin hemen hemen yarısı kadardır. Öğrencilerin birçoğu, bu aralıkta sonsuz eleman olduğunu belirtmiş ama neden olduğunu açıklayamamışlardır. Bazı öğrenciler, sayılabilirlik kavramı ile bu aralığın sonsuzluğunu ilişkilendirmişlerdir: "*Sonsuz, çünkü sayamayız belli değildir kaç sayı olduğu*". Ayrıca karşılaştırma yoluyla da aralığın sonsuz olduğunu belirtenlerde bulunmaktadır: "*Sonsuz çünkü rasyonel sayılar tam sayı değildir*". Sonlu diyen öğrencilerin, genel olarak rasyonel sayıları, tamsayılar veya rakam gibi düşündükleri söylenebilir: "*4 tür*", "*İki tane rasyonel sayı vardır", "Bir tane vardır, çünkü rasyonel sayılar 10'a kadardır*". Ayrıca sınırlılık ile sonluluğu aynıymış gibi düşünenlerin de var olduğu görülmektedir: "*3 ve 5 sayıları birer sonlu sayıdır, başlangıcı ve bitişi bellidir. Aralarında da 4 sayısı vardır", "Bu iki sayı arasında sonsuz sayıda rasyonel sayı yoktur. Çünkü bu iki sayının arasında sonsuza kadar gittiğini gösteren hiçbir işaret yoktur*". Öğrencilerin yaklaşık dörtte biri, bu soruyu boş bırakmış veya soruya bilmiyorum cevabını vermiştir. Ayrıca birkaç öğrenci cevap yazmış ama cevaplarında, aralık içindeki rasyonel sayıların sayısına, sonlu yada sonsuz dediğini gösterecek bir ifade bulunmamaktadır. Bu öğrenciler diğer kategorisinde kodlanmıştır: "*Zaman çok kısa yapmam imkânsız", "3,5 - 4,0 - 4,5 çünkü*".

Açık uçlu anketteki son soru olan "*İki sonlu kümenin elemen sayısı eşitse bu iki kümeye denk kümeler denir. Sizce sonsuz kümeler denk olabilir mi? Açıklayınız.*" sorusuna verilen cevaplar ise Tablo 4'te özetlenmiştir:

Tablo 4. Öğrencilerin Sonsuz Kümelerin Denkliği Hakkındaki Düşünceleri

İki sonlu kümenin elemen sayısı eşitse bu iki kümeye denk kümeler denir. Sizce sonsuz kümeler denk olabilir mi? Açıklayınız.	**Cinsiyet**		**n**
BOYUTLAR	**Kız(67)**	**Erkek(64)**	**(131)**
1.Denk olabilme	**31**	**21**	**52**
2.Denk olmama	**22**	**21**	**43**
3.Bilmiyorum(Emin Değilim)	**12**	**14**	**26**
4.Cevap Vermeyenler	**2**	**8**	**10**

Tablo 4'den görüleceği üzere araştırmaya katılan öğrencilerin yaklaşık %40'ı sonsuz kümelerin denk olabileceğini düşünmektedirler. Bu durumu ifade ederken bazı öğrenciler bütün sonsuz kümelerin denk olduğunu düşünmüş; "*Evet, çünkü ikisi de sonsuzdur"*, bazıları sonsuz kümleri eşit kabul etmiştir: " *Evet olabilir, iki kümede aynı sayı olacaktır yani ikisi de aynı çoklukta olur*". Bu durum, sonlu kümelerin denkliği için yaptıkları kıyaslamaları sonsuz kümelere taşıdıklarını göstermektedir ki bu bir yanılgıdır. Bunun yanında sonsuz kümelerin denkliği için, tam olarak ifade edemeseler de, bire bir eşlemeye yönelik yorumlara da rastlanmıştır: "*Bence o kadar sayı olduğu için bir yerlerde karşılaşıyorlar bu da denk-olabilme şansını yaratıyor böylece denk olabilir"*.

Araştırmaya katılan öğrencilerin yaklaşık %32'si ise sonsuz kümelerin denk olamayacağını düşünmektedir. Bütün sonsuz kümeleri denk gibi düşünen öğrencilerin yanında kümelerin sonsuzluğunu denk olamamasına neden gösteren öğrencilere de rastlanmaktadır: *"Olamaz, sonsuza kadar gidiyor, gittikçe gidiyor, nasıl denk olabilir ki"*.

Araştırma sorusunu yönelttiğimiz öğrencilerin yaklaşık %28'i, soruyu yanıtlamamış veya bilmiyorum-emin değilim şeklinde cevaplamıştır.

3.2. Yarı yapılandırılmış görüşmelerden elde edilen bulgular

Araştırma kapsamında 10 öğrenciyle yarı yapılandırılmış görüşme yapıldı. Görüşmeler sonunda öğrencilerin verdiği cevapların genelde açık uçlu ankette yer alan boyutlarla örtüştüğü söylenebilir. Genel olarak görüşmelerde öğrencilerin kafalarında bir sonsuzluk düşüncesi oluşturmadıkları anlaşılmakta ve bunu açıkça belirttikleri görülmektedir. Ancak biraz düşündükten sonra ve yöneltilen sorular yardımıyla oluşturdukları düşüncelerini aktardıkları ve bu düşüncelerin de tamamen informal yollarla elde edilmiş düşünceler olduğu dikkat çekmektedir.

Örneğin, doğal sayıların sonsuzluğunu kabul etmeyen öğrencilerin olduğu, okulun bu görüşü öğrenciye kazandıramadığı görülmektedir. Bununla birlikte, görüşme sonunda doğal sayıların sonsuzluğuna ikna olabilmektedirler:

DERYA

S: sayılar mesela! Sayılar dedin madem hemen oradan bağlayalım. Doğal sayılar sonsuz mudur? *(D: ya sonsuz deniyor ama bence bir sonu var)* S: nedir mesela sonu nedir? En son sayı nedir? *(D: bilim adamlarının bulması lazım)* S: nasıl bilim adamları? *(D: onlar kabul ettirsin ona göre şu an ben bir şey söyleyemem)*. S: sen mesela en büyük sayıyı söyleyebilir misin bize mesela? *(D: şu an söyleyemem)*. S: söyleyemezsin ama sonsuz olmasını gerektirmez mi diyorsun? *(D: evet sonuçta bulunabilir söylenebilir)*. S: Diyelim ki A sayısı diye buldular. A bilmiyoruz A sayısı. Bundan daha büyük bir sayı yok mudur? *(D: yoktur)*. S: A +1 mesela. En büyük sayıyı buldum. Bilim adamları gecesini gündüzüne kattı buldu en büyük sayı A'dır . Telaffuz edemiyoruz çok büyük. A+1 o sayıdan daha büyük değil midir? *(D: yani öyledir)* S: Öyledir değil mi? A+1 büyüktür A'dan. O zaman sen hangi sayıyı söylersen söyle bir büyüğünü söyleyebilirim. Mesela doğal sayılarda bu mantıkla düşünecek olursak doğal sayılar sonsuzdur diyemez misin? Yoksa onlar yanlış biliyor mu diyorsun? ne dersin? Doğal sayılar sonlu mudur sonsuz mudur? *(D: sonsuzdur)*

Bununla birlikte, tümevarım mantığına benzer yorumlar ve karşılaştırma ile kümelerin sonsuzluğunu açıklayan öğrencilerde bulunmaktadır:

ARDA

S: Peki doğal sayılar sonsuz mudur Arda? *(A: sonsuzdur)*. S: Neden sonsuzdur? *(A: çünkü bir son bulamıyoruz yani hep bir fazlası oluyor).*

...
S: Mesela rasyonel sayıları düşünelim Arda rasyonel sayıları biliyorsun. *(A: Bilmiyorum).* S: a/b şeklinde yazılabilenler falan. Sonsuz mudur rasyonel sayılar?*(A: Sonsuzdur).* S: Neden? *(A: Çünkü her doğal sayı rasyonel sayıdır. O sonsuz olduğuna göre o da sonsuzdur).*

Ayrıca sınırsızlıkla, sonsuzluğu özdeşleştirip, (3,5) aralığında sonlu tane rasyonel sayı olduğunu savunan ve bu görüşünde direnen öğrencilerde bulunmaktadır. Hatta sadece 2 öğrenci bu aralıkta sonsuz rasyonel sayı olduğunu belirtmiştir. Bu durum “sonsuz küme sınırlı olamaz” yanılgısının öğrencilerde bulunabileceğini gösterebilir:

BELİZ

S: Peki (3,5) aralığında. (3,5) aralığını biliyorsun 3’ten büyük 5’ten küçük kaç tane rasyonel sayı vardır? Veya şöyle ondan önce şunu sorayım. Herhangi bir sınırlı kümede sonsuz tane eleman bulunabilir mi? *(B. Sınırlı kümede?).* S: herhangi mesela en büyük elemanı da belli olan en küçük elemanı da belli. O kümenin arasında. *(B: Tabi ki de sonludur).* S: Mesela (3,5) aralığını düşünecek olrsak 3’ten büyük 5’ten küçük kaç tane rasyonel sayı vardır? Ne dersin? *(B: Şimdiii sınırlıdır ama).* S: sonlu mudur sonsuz mudur arada rasyonel sayılar? *(B: Sonludur)* S: Ne var mesela? Kaç tane vardır sonluysa. (3,5) arasında bana rasyonel sayı söyler misin biraz? Ondalıklı da söyleyebilirsin illa da kesirli söylemeye çalışma. *(B. mesela 3.1).* S: hımm. Başka. *(B: 3.01).* S: Başka? *(B: 3.001 diye gidiyo)* S: Kaç tane söyleyebilirsin böyle peki. Sonlu mudur sonsuz mudur? *(B:ya yine de sonlu diyeceğim).*

Bu aralıkta sonsuz rasyonel sayı olduğunu iddia eden öğrenciler geometrik yorumda bulunmuşlardır:

EMRE

S: peki (3-5) aralığını düşünecek olursak aralık derken 3’ten büyük 5’ten küçük kaç tane rasyonel sayı vardır? *(E:sonsuz).* S:sonsuz tane mi vardır? *(E:bölersek yani en küçük yani böl böl bitmez yani mesela onun yarısı, onun yarısı, onun yarısı gider)*

Görüşmelerde öğrencilerin büyük bir kısmı sonsuzluk kavramını sonu olmayan ve sürekli bir kavram olarak düşünmüşlerdir. Diğer büyük bir kısım öğrenci de gördüklerinden yola çıkarak sonsuzluğu tanımlama yoluna gitmişlerdir. Evrende mekânsal şeylerin sınırlarını kaldırarak onu sonsuzla ilişkilendirmişlerdir.

EFEKAN

S:öncelikle sonsuzluk denildiğinde aklına ne geliyor. Sen kendi kelimelerinle nasıl anlatırsın sonsuzluğu *(E: uçsuz bucaksız bir şey erişilemez)*S: erişilemez.*(E: evet)*S: diyorsun. Başka bir şey söyleyebilir misin sonsuzluk için? *(E: ya sonuçta bittiği bir nokta yok sürekli devam ediyor ya da ne bileyim*)

Sonsuzluk kavramın, öğrencilerin kendi iç dünyalarında oluşturdukları etkilerden ve de yaşantıları sonucunda yapılandırdıkları sonsuzluk tanımları da görülmüştür. Ayrıca sonsuzlukla ilgili yanılgılarda ortaya çıkmaktadır. Bazıları sonsuzluğu erişebildikleri bir nokta olarak düşünmektedirler. Öğrencilere söz konusu kavramın olumsuzunu yani sonluluğu sorduğumuzda da “ başlarsın bir işe iyi veya kötü bitirirsin, biten bir şey, sınırı olan, sonu belli olan, ötesi olmayan, kısıtlı bir şey, seni engelleyen kişi gibi cevaplar verdikleri görülmektedir. Ayrıca ilk olarak sonsuzluk kavramının başlangıcının olacağını, bitişinin olmayacağını söylemektedirler. Ancak daha sonra bu cevapların değişebildiği gözlenmektedir. Başı ve sonu olmayan sonsuzlukların olabileceğini ilk anda söyleyenlerde olmaktadır.

EZGİ

S:Peki sonluluk nedir? *(E:Biten bir şey olabilir mi? Mesela 3ile 10 arasındaki sayılar.)* P:Biten bir şey. Nasıl sayılar? *(E:Doğal sayılar.)* S:Peki sence sonsuzluğun başlangıcı olabilir mi? *(E:Olamaz.)*
S:Neden? Kendince *(E:Sonsuz yani)* S:Başlangıcı olamaz diyorsun. *(E:Sonsuz sonuçta yani)* S:Sonsuzluğun sonu yoktur diyorsun herhalde. Başlangıcı yok mudur? Başlangıcı olabilir mi? *(E:Bence olabilirde mesela neyi söyleyeyim?)* S:Başlangıcı olabilir mi sonsuzluğun? Sonu yok diyorsun. *(E:Başı da yok ama ortası var yani hepsi varda. Ya mesela sayılar olarak eksi sonsuz var, artı sonsuz var.)* S:Sayı kümelerinden hangi mesela sayı kümelerinden hangi aklına geliyor? *(E:Sıfırdan sonsuza kadar olanlar başı var ama. Eksi sonsuzdan artı sonsuza kadar olanları da yok)* S:Bazen özel olarak başlangıcı olabilir mi? *(E:Olur. Sonu da olur. Eksi sonsuzdan 3'e kadar olur)*

Bazı öğrencilerde ise öncelikle başlangıcı ve bitişi olmasını reddetmişler daha sonrada olabileceğini kabul etmişlerdir. Bu durum öğrencilerin sonsuzluk fikrine çokta fazla sahip olmadıklarını ve dolayısıyla eğitim sistemimizin bu fikri öğrencilere kazandıramadığını gösterebilir. Başlangıcı ve bitişi olan ya da olmayan sonsuzluklara örnek vermeleri istendiğinde sonsuzluğu görebildikleri şeylerde aramaları onları sonsuzlukla ilgili yanılgılara götürebilmektedir. Deneklere sayıların sonsuzluğu sorulduğunda sayıların başlangıcı ve sonundan yola çıkarak bunu yanıtlama yoluna gitmektedirler.

Sonsuz kümelerin denkliği konusundaki görüşmelerde de, sonsuz kümelerin denk olabileceğini belirten öğrenciler yanında denk olamayacağını savunan öğrencilere de rastlanmaktadır. İlk sorulduğunda sonsuz kümelerin denk olamayacağını düşünen öğrenciler görüşmenin devamında sonsuz kümelerin de denk olabileceğini ifade etmişlerdir. Ayrıca "bütün parçadan büyüktür" fikrine uygun olarak, aralıkların denkliğinde, aynı uzunluktaki aralıkları denk kabul ederken, farklı uzunluktaki aralıkların denkliğini ret etmişlerdir. Genelde, görünüşte aynı sayıda elemana sahip sonsuz kümeleri (Z^+ ile Z^- gibi) denk olarak düşünürken, farklı sayıda elemana sahipmiş gibi görünen sonsuz kümelerin (Doğal sayılar ile çift doğal sayılar gibi) denk olmadığını ifade etmişlerdir. Bu kümelerin denkliğinden bahsederken bir öğrenci dışında hiçbir öğrenci birebir eşlemeyi kullanmamıştır. Fakat bu kümeler arasındaki birebir eşleme ifade edildiğinde hemen hemen bütün öğrenciler birebir eşleme fikrini mantıklı bulmuştur. Görüşmeler sonucunda öğrencilerin sonlu kümelerin denkliği için uyguladıkları yöntemleri, olduğu gibi sonsuz kümelere transfer ettikleri söylenebilir.

Yarı yapılandırılmış görüşme sonuçlarına göre öğretmenler, ana hatlarıyla şunları bildirmişlerdir:

- Öğrenciler, sonsuzluk fikrine tam sahip değiller
- Sayılamazlık kavramı ile sonsuzluğu açıklarlar
- Okul sonsuzluk fikrini öğrenciye pek kazandırmıyor
- Müfredatta da sonsuzluk ile ilgili doğrudan bir ünite yok
- Öğrenciler, sayı kümleri ve geometride (doğru, ışın vs.) sonsuzluk ile karşılaşıyor, buradaki sonsuzluğu da aslında tam anlamıyorlar
- Doğal sayılar ve rasyonel sayıların sonsuz olduğunu bilirler
- (3,5) aralığında sonsuz tane rasyonel sayı olduğunu bilirler
- Sonsuz kümelerin denkliği ile ilgili karşılaştırma yapamayız derler
- Sonsuz kümelerin denkliği ile ilgili sonlu kümelere benzer yorum yaparlar. Mesela pozitif tamsayılar ile negatif tamsayılara denk derler ama pozitif tamsayılar ile pozitif çift tamsayılara görünüşte farklı elaman sayısına sahip oldukları için denk değil derler

- Öğrenciler bu yaşta sonsuzluk kavramını tam anlayamazlar, bu yüzden bu yaşlarda bu konunun üstünde çokta fazla durmaya gerek yok.
- Aslında öğretmenlerde sonsuzluk fikrine tam sahip değil

4. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu çalışmada, öğrencilerin sonsuzluk hakkındaki düşünceleri, yanılgıları ve verilen bir kümenin sonsuz olup olmadığını belirlemede kullandıkları sezgisel yöntemleri araştırılmıştır. Beklendiği üzere sonsuz kümelerin formal tanımı öğrenciler tarafından genelde sezgisel olarak kullanılmamıştır. Bununla birlikte öğrencilerin bir kısmı kümeler ile ilgili ifadeler ile kümelerin sonsuzluğunu ispat etmeye çalışmışlardır. Doğal sayılarda her elemana bir eleman daha eklemek, aralığı parçalara ayırmak, rasyonel sayıları doğal sayılar ile karşılaştırmak gibi yöntemler ile bu kümelerin sonsuz olduğunu ispatlamak istemişlerdir. Öğrencilerin genel olarak kullandığı metodlar bunlardır. Literatürde farklı yaş gruplarında da aynı yöntemlerin kullanıldığı rapor edilmektedir (Tirosh, 1999).

Gerçek sonsuz nosyonuna karşı çıkan Poincaré, "*Gerçek sonsuzluk yoktur ve sonsuz bir topluluktan bahsettiğimiz zaman kendisine hiç bitmeden yeni eleman ekleyebildiğimiz bir topluluğu anlıyoruz*" demiştir (Tirosh, 1999). Onun için sonsuz bir topluluk; üstüne yeni elemanların hiç durmadan eklenebileceği bir topluluktu. Poincare eklenen elemanların yeni olması gerektiğini, yani hiçbir evrede eklenen öğenin daha önce eklenmiş olmaması gerektiğini savunmuştu. Ayrıca bu süreç yöntemini kullanırken eklenen öğelerin özelliklerine de dikkat edilmeliydi (yani matematiksel mi, materyal mi olduğuna). Öğrencilerin sezgisel olarak sonsuz kümeleri belirlemekte veya o kümenin sonsuzluğuna gerekçe göstermekte kullandıkları süreç metoduyla ilgili olarak, Poincaré'nin sonsuz bir topluluk ile ilgili yorumuna başvurmanın önemli olduğu söylenebilir. Özellikle doğal sayıların sonsuzluğunun belirlenmesinde bu görüşün kullanıldığı iddia edilebilir.

Ayrıca öğrencilerin net bir sonsuzluk fikirleri bulunmamaktadır. Sahip oldukları sonsuzluk fikirlerinin formel yoldan edinilmediği görülmektedir. Öğrenciler daha çok okul dışı deneyimlerine yönelik sonsuzluk tanımları yapmışlardır. Sonsuzluğu daha çok yaşadıkları sonlu çevre ile ilişkili kavramlarla anlatma yoluna gitmişlerdir. Bununla birlikte günlük hayattan sonsuzluk örnekleri vermede oldukça zorlanmışlardır. Akıl asıl olarak, uzay ve zamandaki davranışlarımızla kazandığımız sonlu gerçeklere adapte olmuştur. Mantık, sadece sonlu gerçeklerle ifade edilen kavramları tutarlı olarak ele alabilir. Bu yüzden de gerçek sonsuzluk ile uğraşılmaya başlandığı anda çelişkiler de kendini göstermeye başlar (Tirosh,1999, Fischbein, 2001).

Öğrenciler, sonsuzluğun sınırlı olabileceği fikrini genelde kabul etmemektedirler. Sonsuzluk ile sınırlılık kavramlarını bir arada düşünememektedirler. Sonsuzluğun başlangıcının olabileceğini ama sonunun olamayacağını ifade etmektedirler. Bu bulgu, yine formel eğitimin eksikliğini gösterebilir.

Sonsuz kümelerin karşılaştırılmasında, öğrenciler sonlu kümler için uyguladıkları yöntemleri sonsuz kümelere de uyarlama eğilimindedir. Literatürde de benzer çalışmalara ve bulgulara rastlanmaktadır (Duval, 1983; Falk, Gassner, Ben Zoor ve Ben Simon, 1986; Fischbein, Tirosh ve Melamed, 1981; Martin ve Wheeler, 1987; Tsamir ve Tirosh, 1992, 1994; Tsamir, 1999). Bu çalışmalar, "bütün parçadan büyüktür" ifadesini öğrencilerin, çeşitli yollarla haklı çıkarmaya çalıştıklarını göstermektedir. Ayrıca öğrencilerin genelde, sonlu kümelerin denkliği için kullandıkları kavramları, sonsuz kümelerin denkliğine olduğu gibi transfer ettikleri anlaşılmaktadır (Güven, Karataş, 2004). Bu çalışmanın bulguları da, bu prensibin öğrencilerin verilen bir kümenin sonsuzluğu ile ilgili kararlarını etkilediğini söylemektedir. Sonsuz kümelerin denkliği için sahip olunan yanılgılar şu şekilde sıralanabilir:

a. Tüm sonsuz kümeler aynı sayıda elemana sahiptir
b. Sonsuz kümeler denk olamaz
c. Sadece aynı çoklukta elemana sahipmiş gibi görünen sonsuz kümeler (Negatif tamsayılar ile pozitif tamsayılar gibi) denk olabilir
d. Herhangi bir sonsuz küme kendi özalt kümesine denk olamaz

Diğer yandan, öğrenciler genelde denklikte birebir eşlemeyi düşünmemekle birlikte ifade edildiğinde birebir eşleme fikrini kabullenmektedirler. Bu durum öğrencilerin sonsuz kümeler ve özelliklerini anlayabilecek alt yapılarının olduğunu gösterebilir. Singer ve Voica (2003) da, sonsuzluk sezgisinin yaş ile bağlantılı olmadığını ifade etmiştir. Bu da araştırma sonucunu destekler niteliktedir.

Öğrencilerin kullandıkları formal ifadelerin çoğu matematik ve sayı kümeleri ile ilgilidir. Bu yüzden sonsuzluk ile ilgili formal sezgisel ifadelerin, sayı kümelerinden çok etkilendiği söylenebilir. Aristo'dan bu yana, gerçek sonsuzluğun algılanmasının zor ve potansiyel sonsuzluğun matematiksel sonsuzluk olduğu kabul edilmektedir Bu yüzden, sayıların tam kavranabilmesi, sonsuzluk kavramının sindirilmesi ile gerçekleşebilir. Diğer taraftan, sonsuzluğun kavranabilmesi için sayılar kullanılabilir. Bu yüzden kümeler sunulurken sonsuzluk ile ilişkileri irdelenebilir. Öğrencilerin özellikle rasyonel sayı kavramında oldukça eksiklikleri olduğu görülmüştür. Rasyonel sayıların, sonsuzluk ile ilintilendirilerek anlatılması bu kavramın daha iyi anlaşılmasını sağlayabilir.

"*Sonsuzluk kendi arasında ikiye ayrılır. Birincisi dünyanın ve evrenin hiç bitmemesi, ikincisi ise matematikte doğal sayıların sonsuzluğu*" gibi cevap veren öğrencilerin varlığı ilginçtir. Bu durum gerçek ve potansiyel sonsuzluğun farkına varabilecek ilköğretim öğrencilerinin var olabileceğine bir kanıt sayılabilir.

Yapılan görüşmelerde, öğretmenlerin de sonsuzluk konusunda yeteri kadar düşünmedikleri görülmüştür. Ayrıca bu yaş grubunda, sonsuzluk kavramının gerekliliğine de pek inanmamaktadırlar. Öğrencilerin sonsuzluk ile ilgili fikirlerinin çoğunu tahmin edebilmekle birlikte, açık aralığın sonsuzluğu ile ilgili öğrencilerden farklı düşündükleri görülmektedir.

Öğrencilerin sonsuzluk kavramını okulda daha derinlemesine düşünmeleri sağlanabilir. Bunun için gerekirse programlar gözden geçirilebilir. Program geliştirmeciler, matematik eğitimcileri ile ortaklaşa bu durumu irdeleyebilirler.

Öğretmen adayları bu konulardan haberdar edilmelidir. Özellikle Matematik Öğretimi'ne benzer derslerde sonsuzluk kavramı ile ilgili konular iyi işlenebilir. Yapılan görüşmelerde öğretmenlerin de, sonsuzluk hakkında, öğrencilere benzer yanılgılara sahip oldukları görülmüştür. Bu yüzden, hali hazırda görev yapan öğretmenler de hizmet içi kurslar ile bu konularda eğitilebilir.

KAYNAKÇA

Duval, R.: (1983), 'L'obstacle du dedoublement des objects mathematiques', *Educational Studies in Mathematics* 14, 385–414.

Falk, R., Gassner, D., Ben Zoor, F. ve Ben Simon, K.: (1986), 'How do children cope with the infinity of numbers?' *Proceedings of the 10th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, London, England, pp. 7–12.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics*. Dodrecht, Holland: Reidel.

Fischbein, E., Tirosh, D. and Hess, P.: 1979, 'The intuition of infinity', *Educational Studies in Mathematics* 10, 3–40

Fischbein, E. (2001). "Tacit Models and Infinity" Educational Studies in Mathematics 48: 309-329

Fischbein, E., Tirosh, D. ve Melamed, U.: (1981), 'Is it possible to measure the intuitive acceptance of a mathematical statement?' *Educational Studies in Mathematics* 12, 491–512.

Güven, B ve Karataş, İ. (2004). Sonsuz Kümelerin Karşılaştırılması: Öğrencilerin kullandıkları yöntemler, *Dokuz Eylül Üniversitesi Buca Eğitim Fakültesi Dergisi* 15: 65-73

Martin, W. G. ve Wheeler, M. M.: (1987), 'Infinity concepts among preservice elementary school teachers', *Proceedings of the 11th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, France, pp. 362–368.

Monaghan, J. (2001). Young peoples' ideas of infinity. *Educational Studies in Mathematics,* Vol. 48 pp 239 – 257.

Narli,S. (2011). Is constructivist learning environment really effective on learning and long-term knowledge retention in mathematics? Example of the infinity concept. *Educational Research and Reviews*, in press

Narli, S. & Baser, N. (2008). Cantorian Set Theory and teaching prospective teachers. *International Journal of Environmental & Science Education, 3*(2), 99-107.

Narli, S. & Baser, N. (2010). The effects of constructivist learning environment on prospective mathematics teachers' opinions. *Us-China Education Review, 7*(1), 1-16.

Narli, S., Delice, A.ve Narli, P. (2009). Secondary School Students' Concept of infinity: primary and secondary intuitions. In Tzekaki, M., Kaldrimidou, M. & Sakonidis, H. (Eds.). *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, pp. 209-216. Thessaloniki, Greece

Piaget, J. and Inhelder, B. (1956). *The Child's Conception of Space*, Routledge and Kegan Paul, London (originally published in 1948).

Singer,M., Voica, C. (2003) "Perception of infinity: does it really help in problem solving" The Mathematics Education into the 21st Century Project Proceedings of the International

Conference The Decidable and the Undecidable in Mathematics Education Brno, Czech Republic, September 2003

Singer,M., Voica, C. (2008). Between perception and intuition: Learning about infinity, *The Journal of Mathematical Behavior*, 27, 188–205

Tirosh, D. (1991). “The role of students’ intuition of infinity in teaching the Cantorian theory” in D. Tall (ed.) Advanced Mathematical Thinking, Kluwer, Dordrecht, pp. 199-214

Tirosh, D. (1999). Finite and infinite sets:definitions and intuitions Int J. Math.Educ.Sci.Technol., Vol.30, No. 3, 341-349

Tsamir, P. (1999). *The transition from the comparison of finite to the comparison of infinite sets: Teaching prospective teachers*. Educational Studies in Mathematics. *38* (1-3), 209-234

Tsamir, P. (2001). When “the same” is not perceived as such: The case of infinite sets. *Educational Studies in Mathematics, 48*, 289-307.

Tsamir, P. (2002). *Primary And Secondary Intuitions: Prospective Teachers’ Comparisons Of Infinite Sets*, inCERME 2 Proceedings.

Tsamir, P., Tirosh, D. (1992), ‘Students’ awareness of inconsistent ideas about actual infinity’, *Proceedings of the 16th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Durham, USA, 3, 90–97.

Tsamir, P., Tirosh, D. (1994). *Comparing infinite sets: intuitions and representations*. Proceedings of the 18thAnnual Meeting for the Psychology of Mathematics Education (Vol. IV, pp. 345-352). Lisbon: Portugal.

EXTENDED ABSTRACT

At the end of 19th century, Cantor formulated infinite set theory, in which he defined infinite set as a set which can be put into a one to one correspondence with one of its subsets. With his formulation, Cantor refuted arguments against understanding numbers as an infinite set at once. For the idea of infinity, his definition of infinite set posed a mental challenge, as it entailed the concept of "equivalence between a set and a proper subset of itself". It required a mental effort to accept this equivalence, since it also required acknowledgement of the assertion that "whole is greater than the sum of its parts" may not be true for all sets. Hence, it was unlikely for students, who have never studied the set theory, to use this definition of infinite set on their own (Tirosh, 1999).

Since Cantor, the concept of infinity, which brought above mentioned challenges, has become a field of study.

According to Fischbein (1987), students' intuitive ideas about infinity can be examined under two categories. While personal experiences provided a basis for the idea of infinity in the first place, formal education constituted the idea of infinity in the second place. These were termed as primary and secondary intuitions respectively. Singer and Voica (2003), who studied these types of intuitions about infinity, also investigated the relationship between intuitions and perceptions in their later studies, and identified two categories of perceptions of infinity: primary and secondary perceptions. (Singer ve Voica, 2008): Primary perceptions that developed as an effect of personal experiences out of school and secondary perceptions that were acquired through formal education. Primary perceptions were also put under three categories. These three categories (processional, topological, and spiritual) were formed according to the answers of students to the question of "Use words, expressions, comparisons, metaphors to describe what you understand by the word 'infinity'". The purpose of this study was to find out whether the students truly have a notion of infinity and to identify their misconceptions on this subject. Since number sets can be helpful to assess the concept of infinity, following sub-questions were specified for this main purpose:

5. What do students think about the infinity of natural numbers?
6. What do students think about the infinity of rational numbers?
7. What do students think about the infinity of open intervals?
8. What are the intuitive thoughts of students about the equivalence of infinite sets?

A qualitative research was planned in order to search answers for these questions. An open ended questionnaire (consisted of open-ended questions) was used to gather the views of 131 students (67 female and 64 male) in the 8th grade on the concept of infinity and following this, half structured interviews were conducted with 10 students and 3 primary school mathematics teachers. Measurement tools used for this study were developed as follows:

d) Open-ended questionnaire for students: Prior to creating this open-ended questionnaire composed of 7 items, open-ended free conversations were carried out with 5 students in the last grade of primary school about the subject and a list was made out of the highlighted issues during conversation. After listing underlined issues as main topics, a draft of the open ended questionnaire was prepared. By using this draft, a pilot test was applied to 25 students in the last grade of primary school and it was finalized for the implementation after consulting experts on its operability.

e) Student Interview Form: A draft of interview form with 20 items was developed based on data gathered from the pilot test and the conversation-like interview made in the

process of developing open-ended questionnaire. This form was tested with 2 students out of 25 students, who participated in the pilot trial, in terms of operability and time; then it was prepared for the implementation after reaching to a conclusion about its operability with expert views.

f) Teacher Interview Form: The questions in the student interview form were also used in this form by revising the addressee.

Content validity of data collection tools was verified by scrutinizing the content of subject together with two instructors from the Department of Mathematics Education. The quantitative data acquired from the assessment of reliability were put under different categories and coded by each researcher and concordance rates were determined for these categories. After this coding, % 92 concordance was found.

The end result was an open-ended questionnaire consisted of 7 questions. Narlı et al. (2009) have already examined three of these questions *[1. What comes to your mind when you hear the word "infinity"? How do you define the concept of infinity in your own words? 2. When (at what age), where and how did you come across the concept of infinity? 3. Have you heard the concept of infinity during your education? Please explain (at which lessons and subjects).* In this study, the remaining four questions will be discussed, which are as follows *1. Is the set of natural numbers infinite? Why? Please explain. 2. Is the set of rational numbers infinite? Why? Please explain. 3. How many rational numbers are there in the interval of (3,5)? Why? Please explain. 4. If two finite sets have the same number of elements, these two sets are called equivalent sets. Do you think that infinite sets can be equivalent sets? Please explain.*

In conclusion, it was found that students intuitively used the methods of inductive process and comparison with another set in order to determine whether the sets are infinite.

It was observed that students did not intuitively use the formal definition of infinite sets often. However, some of them tried to prove the infinity of sets by resorting to some expressions about sets. They wanted to prove infinite sets by using methods like comparing rational numbers with natural numbers, dividing the interval into parts, by adding a new element to the each element in natural numbers. In general, these were the methods used by the students. In the literature, it was also reported that students in different age groups also utilized these methods (Tirosh, 1999).

Nevertheless, the students did not have a clear idea of infinity. It was seen that they have not acquired their ideas about infinity through formal education. The students rather defined the concept of infinity based on their personal experience out of the school. They described infinity with the concepts related to the finite environment that they lived. Nonetheless, they found it difficult to give examples of infinity from daily life.

In general, students did not accept the idea that infinity could be finite. They could not think of the concepts of infinity and finiteness together. They said that although infinity may have a beginning it cannot have an end. This finding, again, might be indicating the lack of formal education.

In comparison of infinite sets, the students showed a tendency to adapt the methods they used for finite sets to the infinite sets as well. It is also possible to find similar findings and studies in the literature (Duval, 1983; Falk, Gassner, Ben Zoor and Ben Simon, 1986; Fischbein, Tirosh and Melamed, 1981; Martin and Wheeler, 1987; Tsamir and Tirosh, 1992, 1994; Tsamir, 1999). These studies revealed that students tried to prove the idea that "the whole is greater than the sum of its parts" in various ways. Furthermore, the students usually applied the same concepts they used for the equivalence of finite sets to the equivalence of infinite sets as well. (Güven, Karataş, 2004). The findings of this study also indicated that this principle has affected the students' decisions about the infiniteness of a given set. Misconceptions about the equivalence of infinite sets can be listed as follows:

e. All infinite sets have the same number of elements.
f. Infinite sets cannot be equivalent.
g. Only the infinite sets that seemed to have the same number of elements (Like negative integers and positive integers) can be equivalent.
h. Any infinite set cannot be equivalent to one of its subsets.

Meanwhile, although the students have not usually thought one-to-one correspondence for equivalence, they accepted the idea of one-to-one correspondence when explained. This finding might be demonstrating that the students had a foundation to understand the infinite sets and their properties. Singer and Voica (2003) also mentioned that intuition about infinity was not related to age. This also supports the conclusion of our research.

Most formal expressions that students used were related to mathematics and number sets. Hence, it can be said that their formal-intuitive expressions about infinity were very influenced by number sets. Since Aristotle, it was widely accepted that the concept of actual infinity is difficult to understand and potential infinity is mathematical infinity. For this reason, numbers can truly be understood by assimilating the idea of infinity. On the other hand, numbers can be used for teaching infinity. Hence, when sets are presented, their relationship with infinity can be scrutinized. It was also observed that students especially lacked sufficient understanding of rational numbers. It might be easier for students to understand rational numbers if they are explained in relation to infinity.