BİR ORTAÖĞRETİM MATEMATİK DERSİNDEKİ İSPAT YAPMA ETKİNLİĞİNE YÖNELİK SINIFİÇİ TARTIŞMA SÜRECİNE ÖĞRENCİ SÖYLEMLERİ ÇERÇEVESİNDE YAKINDAN BAKIŞ

A CLOSE VIEW ON THE DISSUSSION IN RELATION TO A ACTIVITY ABOUT PROVING A THEOREM IN A HIGH SCHOOL MATHEMATICS LESSON VIA STUDENTS' DISCOURSE

Işıkhan UĞUREL* , Sevgi MORALI**

ÖZET:

Bu araştırma bir ortaöğretim sınıfının matematik dersinde uygulanan ispat yapma etkinliği esnasındaki iletişim durumlarının incelenmesini kapsamaktadır. Söz konusu iletişim sürecinde tüm sınıf bazında yapılan tartışmalara odaklanılarak özellikle öğrencilerin söylemleri analiz edilmiştir. Özel durum çalışması niteliğindeki bu nitel araştırmada söylem çözümlemesi gerçekleştirilmiştir. Söylem çözümlemesi, araştırmanın tasarımında, veri toplama aşamasında, verilerin analizinde ve raporlaştırılmasında metodolojik çerçeveyi oluşturmaktadır. Çalışmanın örneklemi özel bir fen lisesinin on birinci sınıfındaki 11 öğrenci ve o sınıfın matematik öğretmeninden (toplam 12 kişi) oluşmaktadır. *Teşvik edilmiş söylem* (TES) aracılığıyla öğrencilerin ispat ve ispatlamaya yönelik bilgileri ve anlamaları hakkında kayda değer bulguların elde edildiği bu çalışmanın ülkemizde ispatın öğretimi ve ispat yapma becerisinin geliştirilmesine yönelik öğretim anlayışının iyileştirilmesine katkı yapması ve konu ile ilgili araştırmacılara faydalı bilgiler sağlaması amaçlanmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Matematik Öğretimi,İletişim, İspat, Teşvik Edilmiş Söylem, Söylem Çözümleme

ABSTRACT:

This study includes the communication processes occuring during proof activities in mathematics lessons in a high school. The student discourse has been analysed by focusing the discussions realised in the whole class. In this qualitative study, which can be described as a case study as well, discourse analysis has been used. Discourse analysis is the methodological framework used in the design of the research, data collection, the analysis and reporting stages. The study has a sample of 12 people consisting of 13 eleventh-year students from a private science high school and their mathematics teacher. Finally, important findings have been found out concerning the students' knowledge and perception of proof and proving via *prompt discourse* (PD). The study aims at providing the future researchers some useful informations about the subject and contributing to the improvement of the proving skill and teaching proof in our country.

Keywords: Mathematics Teaching, Communication, Proof, Prompt Discourse, Discourse Analysis

* Dr., Dokuz Eylül Üniversitesi Buca Eğitim Fakültesi , isikhan.ugurel@deu.edu.tr

** Yrd.Doç.Dr., Dokuz Eylül Üniversitesi Buca Eğitim Fakültesi, sevgi.morali@deu.edu.tr

Not: Bu makale ilk yazarın doktora tezindeki dördüncü alt problemin bir bölümünden oluşturulmuştur.

1. GİRİŞ

Matematiğin sahip olduğu kendine has (sözcüksel, sembolik ve simgesel) sistematik yapısı onun uluslararası bir dil formu olarak kabul edilmesini sağlamıştır. Bu dil belki de gerçek anlamda evrensel olma yönü ile var olan tek dildir. Matematiğin dil ile olan çok boyutlu ilişkisi ve kendi dilsel kimliğine yönelik var olan ilgiler sadece matematik alanında değil felsefe, psikoloji, sosyoloji, dilbilim, eğitim bilim ve matematik eğitimi gibi geniş bir disiplin çeşitliliği içerisinde önemli araştırma konularından birini oluşturmuştur. Matematiğin bireylerin ve toplumların gelişimlerindeki artan rolü ve önemi dikkate alındığında bu doğal bir durumdur. Dil ve matematik arasındaki ilişkilerin boyutlandırılarak irdelenmesi hem matematiğin yapısı, güzellikleri ve yaşama etki etmedeki bazı gizemlerini anlama ve yorumlamada, hem de her düzeyde daha nitelikli matematik eğitimi-öğretimi yapabilmede bakış açılarımızın zenginleşmesine ve derinleşmesine olanak sağlamaktadır. Günümüzde iletişime yönelik bakış açılarındaki genişleme ve derinleşme ile oluşan iletişimi yeniden ele alış biçimi, eğitim-öğretim sürecinde de kendini göstermiş ve öğrenme ortamlarında var olan iletişim biçimlerini ve onların öğrenme ve anlama üzerine etkilerini, odaklanılan konuların ön sıralarına taşımıştır (Cazden ve Beck, 2003). Hiebert ve ark. (1998) öğrencilerin ancak kendi bilgilerine yönelik ilişkileri ve bağlantıları kurabildiklerinde matematiksel anlamayı gerçekleştirebileceklerini iddia ederek, *iletişimi* söz konusu ilişkisel anlamayı sağlamadaki en önemli anahtar bileşen olarak tanımlamaktadır (akt. Steele, 2001). Alan eğitimi literatüründe özellikle matematik eğitimi alanında iletişime yönelik ilgi ve dikkatin hızla arttığı görülmektedir. Bu durum matematik eğitimindeki reform hareketleri sonrasında pek çok ülkede yenilenen matematik öğretim programları [örn. Güney Afrika (Setati, 2005), İsveç (Ryve, 2004), Japonya (Kharing, Hamaguchi ve Ohtani, 2007), Vietnam (Vui, 2007), Tayvan (Lin, Shann ve Lin, 2007), Singapur (Har, 2007), Peru (Miyagui, 2007), Filipinler (Ulep, 2007) ve Çin (Wang, 2007)], NCTM'in prensipleri ve standartları ve NCSM'nin başarılı biçimde matematik öğretimi için gerekli gördüğü bileşenlerde de (Ellerton ve Clarkson, 1996) açıkça görülmektedir. NCTM prensip ve standartlarında, matematik öğretme ve öğrenmede iletişim kurmanın önemli bir amaç olduğu, öğretim süreçlerinin anaokulundan liseye kadar tüm öğrencilerin matematiksel düşünmelerini iletişim aracılığıyla düzenleme ve pekiştirmelerine imkân tanıması ve matematiksel düşünceleri aracılığıyla akranları, öğretmenleri ve diğer kişilerle iletişim kurabilmeleri gerektiği (NCTM, 2000) vurgulanmaktadır. Ülkemizde de köklü biçimde değişikliğe uğrayarak yeniden geliştirilen ve 2005-2006 yılında uygulamaya konulan yeni matematik dersi öğretim programlarında da iletişimin merkezi bir yeri olduğu ve matematik öğrenmede iletişim kurmanın bir gereklilik oluşturduğunun açıkça vurgulandığı görülmektedir. Yeni ortaöğretim matematik dersi öğretim programında iletişim hem programın altı temel öğrenme alanından hem de kazandırılması istenen dört temel beceriden biri (MEB, 2005) olarak ele alınmaktadır. Dolayısıyla matematikle dil arasındaki ilişkiler ağı içerisinde matematiksel öğrenme, anlama ve kavramayı iletişim perspektifinden ele almak ve incelemek yararlı ve gerekli hale gelmiştir. İletişim sürecini incelemenin yöntemlerini ve kuramsal kaynağını dil, psikoloji ve sosyoloji gibi disiplinlerin sunduğu geniş bilgi bankasından sağlamak mümkündür. Sosyal bilimler alanı dili ve ona dayalı iletişim sürecini araştırmada, sadece belirli bir disipline ait ayrıntılı bilgiler sunmakla kalmayıp bunun yanı sıra bazı disiplinler arası özgün yaklaşımlardan yararlanılmasına da imkân sağlamaktadır. Bu alanlardan birisi de söylem çözümlemesidir.

Söylem çözümlemesi (**SÇ**) bir kuramsal çerçeve, bir nitel araştırma yöntemi, belirli adımları ve kendine has sistematiği olan bir araştırma izlencesi, birçok yaklaşımı içine alan disiplinler arası bir bilim/alt disiplin ve kullanılan dili çeşitli açılardan analiz etmeyi mümkün kılan bir takım analitik yaklaşımlar bütünü olarak tanımlanabilir.

'*Söylem*' tek bir cümleden daha uzun olan sözlü ya da yazılı dilin her türlü grubuna yönelik kullanılmaktadır (Cazden ve Beck, 2003) ve "terim olarak söylem, hem dilbilimsel formun (yapının) hem de sosyal iletişimsel pratiklerin mantıksal yorumunu içermektedir" (Hicks, 1996: 51). Günay (2010) söylemi, bir şey/konu/durum hakkında bir öznesi (vericisi), bir alıcısı ve bir konusu olan, öznenin kendi değer yargılarını ve güç değerlerini yansıtan, iç ve dış bağlama gönderimde bulunan tutarlı, tümce ötesi bir dilsel birim olarak nitelendirmektedir. Taylor (2001), SÇ'yi söylemi işlevi açısından incelemeye dönük yaklaşımların genel bir adlandırması, kullanılan dilin yakından incelenmesi); Akturan ve ark. (2008) ise söylemi temel alarak günlük metinlerin söylendikleri bağlam içerisinde incelenmesine dayalı bir yaklaşım biçiminde tanımlamaktadır.

Henüz yeni bir alan olmasına karşın söylemi ve onu analiz etmeyi içeren matematik eğitimi çalışmalarında söylem ve sosyal perspektiflere çok yoğun bir ilginin olduğu görülmektedir (Barwell, 2003; Sfard, 2001; Morgan, 2006). Ancak bu çalışmalar içerisinde iletişim açısından (okul) sınıflarındaki söylemleri ve onların analizleri yoluyla ispat ve ispatlamaya yönelik öğrenmeleri, anlamaları ve becerileri inceleme konusu yapan çok az araştırmanın bulunduğu görülmektedir. Bu araştırmanın amaçlarından biri söz konusu bu eksikliğin giderilmesine katkı yapmaktır.

İspat ve ispatlama hem matematiksel düşünmenin (ve tabi ileri matematiksel düşünmenin) geliştirilmesinde hem de matematik yapmada, matematiksel bilginin yapısını, doğasını, tarihsel gelişimini kavramada, matematiksel nesnelerin türlerini, geliştirilme yollarını, bireyler ve toplumlarca ne şekilde paylaşıldığını algılamada merkezi bir öneme sahiptir. İspat matematik ve matematik eğitiminin merkezinde olan en önemli kavramlardan biri olarak görülmektedir (Ball ve ark., 2002; Knuth, 2002; Lee, 2002; Padraig ve McLoughlin, 2002). İleri matematiğin belirleyici özelliği ispata vurgu yapmasıdır (Houston, 2010) ve ileri matematik alanında her matematikçi için ispat yapma oldukça önemli bir beceridir (Weber, 2001). Euclid'in Elementler adlı çalışmasından bu yana ispat belirli evrimlerle formal matematiğin gelişiminde büyük rol oynamıştır. "Bazılarına kanaatine göre, matematik oyununun adı ispattır; ispat yoksa matematikte yoktur" (Davis ve Hersh, 2002: 174). Eski Yunan medeniyetinden insanoğluna kalan en olağanüstü miraslardan birisi ispattır (Harel ve Sowder, 2007). Matematikçinin yaptığı işe dair öz bir tanımlama yapmak gerektiğinde şu ifade edilebilir; "matematikçi, sayılar ve geometrik konfigurasyonlar gibi soyut nesnelere ilişkin şeyleri, onların ilişkilerini ve genelleştirmelerini ispatlayan kişidir" (Garnier ve Taylor, 1996: 3). İspatın matematik öğretimindeki yeri, önemi ve rolü çerçevesinde matematik eğitimindeki reform hareketleri kapsamında okul matematiği içerisinde ispatın daha zengin bir içerikte ve öğretilme biçiminin çok daha geniş ve derinleşen bir yapıda ele alındığı görülmektedir. Bugün matematik eğitimi alanında uluslararası düzeyde sadece ispat ve ispatlamayı konu edinen bilimsel organizasyonların (örn. ICMI Study-19 Conference: Proof and Proving in Mathematics Education-2009) yapılmaya başlaması aynı zamanda araştırma alanı olarak da ispat ve ispatlamaya verilen önemi ortaya koymaktadır.

Bu çalışma iletişimi odağa alarak, bir ortaöğretim sınıfındaki ispat yapma etkinliği sürecinde, tüm sınıf bazında yapılan tartışmalarda görev alan sözlü söylemler üzerinde yapılan bir SÇ uygulamasının bulgularını ve yorumlarını içermektedir. Yapılan bu araştırma ile ispat ve ispatlamaya yönelik literatüründeki boşluğun doldurulmasına ve özellikle ispat ve ispatlamaya ilişkin ülkemizdeki öğretim anlayışının geliştirilmesine yönelik katkı sağlanması amaçlamaktadır.

1.1 Kuramsal Çerçeve

Araştırmada öğrencilerinin ispata yönelik sınıf içi söylemleri ve bunların öğrenmeleri üzerindeki etkileri ele alındığından kuramsal çerçeve olarak sosyokültürel yaklaşım temel alınmıştır. Bu yaklaşım Vygotsky'nin psikoloji ve eğitim alanında çok büyük etkileri olan çalışmalarıyla doğmuş bir düşünce sistemidir. Bu yaklaşıma göre öğrenmede sosyal etkileşimin ve kültürün önemli bir rolü vardır. Bireyler yaşamları boyunca sosyal yapılar içerisinde akranları ya da kendinden daha yetkin olan kişilerle iletişim ve paylaşım içerisindedir. Söz konusu iletişim ve paylaşımda merkezi bileşen dildir. Dil kendi doğası gereği sosyal ve canlı bir mekanizma olması nedeniyle kendisinin yer aldığı yaşamsal ve zihinsel her sürece de sosyal bir bağlam sağlamaktadır. Bu düşünce sisteminin tasvir ettiği yapılandırma süreci, bir grup içerisinde tüm fikirlerin eşdeğer statüde yer aldığı bir anlama ve öğrenmeye (Şimşek, 2004) işaret etmektedir. Sosyokültürel yaklaşıma göre bireylerin bilişsel yapısı, bulundukları kültür içindeki etkileşimleri gözlenmeksizin anlaşılamaz (Fosnot ve Perry, 2007). Çünkü "öğrenme bireyin yaşadığı toplumsal ve kültürel doku içerisinde gerçekleştirdiği bilinçli bir etkinliktir" (Ağlagül, 2009: 39). "Bu yaklaşımın temel iddiası, zihinsel işlevin kültürel, tarihsel ve kurumsal bağlamlara göre durumsallaştığıdır" (Wertsch ve Toma, 1995: 159). Bireylerin etkileşimlerine ve deneyimlerine dayalı olarak oluşturdukları bilgiler, zihinsel bir özdüzenleme sonrasında içselleştirilerek öznel bir forma dönüşür. Bir okul sınıfınında öğretmenler, öğrenciler ve onlar arasındaki etkileşim süreci dikkate alındığın, sınıfın bir sosyokültürel yapı olma niteliği taşıdığı görülmektedir. Dolayısıyla öğrencilerin öğrenme ve anlamalarını içinde bulundukları sınıf kültürü çerçevesinde incelemek mümkündür. Bu bağlamda bu çalışmada bir ortaöğretim sınıfındaki ispat yapma etkinliğinde görev alan söylemlerin analizi yoluyla öğrencilerin öğrenmelerine yönelik bir bakış elde etmeye çalışılmaktadır. Araştırmanın problemi "bir ispat yapma etkinliği çerçevesinde öğrenciler arasında var olan iletişim sürecinde görev alan söylemlerin doğası nasıldır?" biçimindedir.

2. YÖNTEM

Bu çalışma yapılan araştırmanın amacı, problemi, araştırma tasarımı, veri toplama biçimi ve verilerin analizinde yararlanılan yaklaşımlar açısından bir nitel araştırmadır. Nitel araştırma,

> Pek çok disiplinin (sosyoloji, antropoloji, felsefe, psikoloji, dilbilim gibi) etkisiyle gelişmiş ve güçlü kuramsal temelleri olan bir alandır. Tüm bu disiplinlerde ortak olan tema insan davranışını, içinde bulunduğu ortam içinde ve çok yönlü olarak anlamaya çalışmaktır (Yıldırım ve Şimşek, 2000: 18).

Baş ve Akturan (2008), nitel araştırmayı betimlerken modern yaklaşıma dayalı araştırmalarda tek bir gerçeklik yerine farklı gruplar için farklı gerçekliklerin var olabileceğini ve olayların dışarıdan izlenmesi yerine konuya incelenilen grupların perspektifinden yaklaşılmaya çalışıldığını ve doğal olarak elde edilen bulguların evrensel nitelikler taşımak yerine sadece (araştırma grubu) belli özellikleri taşıyan gruplar için geçerli sayıldığını ifade etmektedir. Bu araştırma genel itibariyle nitel araştırma paradigmasına göre geliştirilmiş olup bu paradigma altında gerçekleştirilen analiz yöntemi ise söylem çözümlemesidir. Bu araştırmanın metodolojik çerçevesi Uğurel ve Moralı (2010) tarafından ifade edildiği biçimiyle bir SÇ araştırmasındaki temel aşamaların uygulanmasına dayanmaktadır.

2.1 Örneklem

Araştırmanın örneklemi İzmir ilindeki bir özel Fen Lisesinin 11. sınıfında öğrenim görmekte olan 11 öğrenci ve bu sınıfın matematik derslerini yürüten bir matematik öğretmeni, toplam 12 kişiden oluşmaktadır. Örneklem seçiminde seçkili örnekleme yöntemi uygulanmıştır.

2.2 Veri Toplama Biçimi

Araştırmanın verilerini, ortaöğretim öğrencilerinin matematik derslerindeki sınıf içi bireysel ve karşılıklı (öğrenci-öğrenci, öğretmen-öğrenci) sözel ve yazılı söylemleri ve araştırmacı gözlemleri oluşturmaktadır. Söylemler sınıf içi video kayıtları yoluyla toplanmıştır. Yıldırım ve Şimşek (2000), nitel araştırmalardaki verileri genel olarak üç grupta 1-çevresel veriler, 2-süreçle ilgili veriler ve 3-algılara ilişkin veriler olarak ifade eder ve 2. grubu "araştırma sürecinde neler olup bittiğini ve bu olanların araştırma grubunu nasıl etkilediğine ilişkindir" (s.19) biçiminde tanımlamaktadır. Bu nedenle toplanan veriler *süreçle ilgili veriler* olarak nitelendirilebilir. Ayrıca süreçle ilgili verileri oluşturan söylemler oluşturulmalarındaki etki ve bağlam açısından da *doğal söylemler* [DS] ve *teşvik edilmiş söylemler* [TES] biçiminde iki kategori altında ele alınabilir.

DS, araştırmacının herhangi bir etkisi olmaksızın matematik derslerinde, öğretim sürecinde görev alan, sınıf içi öğrenci-öğrenci ve öğretmen-öğrenci arasındaki iletişim süreçlerinde ispat kavramına ve ispatlamaya yönelik sözel, matematiksel, sembolik ya da bunların kombinasyonları yoluyla oluşmuş söylemleri ifade etmektedir.

TES ise araştırmacının uygulama öncesinde kendisinin belirlediği ve yazılı biçimde matematik öğretmenine sunduğu, sınıf içinde öğrencilere yöneltilmesini ve öğrencilerin bu sorular aracılığı ile ispata/ispatlamaya yönelik açıklama yapmaya, tartışmaya ve fikirlerini paylaşmaya ve ispat yapma yaklaşımlarını sergilemeye teşvik edilmelerinin amaçlandığı soruya/sorulara dayalı olarak sınıfta oluşmuş söylemleri kapsamaktadır. Bu söylem tipi ilk yazar tarafından literatürde 'yaratılmış söylem' olarak adlandırılan kavram tanımından yararlanılarak geliştirilmiş ve ilk kez tez araştırmasında kullanılmıştır.

Bu bağlamda bu makalede analiz edilen söylemler bir TES uygulamasından elde edilen sözlü ve yazılı söylemlerdir. Çalışmada TES'lerden yararlanılmasının sebebi veri toplanan sınıfta geleneksel öğretim anlayışının hâkim olması nedeniyle öğrencilerin konuşma ve tartışma fırsatlarının sınırlı olmasıdır. TES'ler yardımıyla öğretmenden ziyade öğrencilerin bireysel ve kendi aralarındaki söylemlerinin ortaya çıkarılması amaçlanmıştır. Veriler ilk yazarın doktora tezine yönelik (2008-2009 öğretim yılı bahar döneminde) yaklaşık üç ay süren veri toplama aşamasının sonlarına doğru (26 Mayıs Pazartesi dördüncü derste) matematik dersinde yapılan bir TES uygulamasından elde edilmiştir. Söz konusu derste araştırmacının kendisinin belirlediği bir teoremin, sınıf içerisinde matematik öğretmeni (**MO**) tarafından uygulanması ve bu teorem üzerine öğrencilerin hem tüm sınıf bazında sözel tartışmalar yapması hem de bu tartışmaların sonrasında bireysel olarak yazılı biçimde ispatı yapmaları istenmiştir. Bu süreçte öğretmen sadece tartışmaları yöneten bir görev üstlenmiş olup tartışmalar ve yazılı çözümler esnasında kendi bilgi ve düşüncelerini mümkün olduğunca sunmamaya çalışmıştır. Söz konusu TES uygulaması esnasında ilk yazar derste gözlemci olarak bulunmuş dersi video ile kaydetmiş ve kendi gözlem notlarını tutmuştur. Araştırmacının belirlediği teorem "***iki rasyonel sayı arasında bir irrasyonel sayı vardır***" biçimindedir. Araştırmacı bu teoremi, ifadesinin basit ve anlaşılır olması, az sayıda ön bilgi kullanımını gerektirmesi, daha önce bu ve benzer tarzda bir ispatın sınıfta yapılmamış olması ve özgün bir düşünme tarzını gerektirmesi nedeniyle seçmiştir.

2.3. Verilerin Analizi

Tez çalışmasını yapan araştırmacı tarafından toplanan video kayıtlarındaki söylemler önce araştırmacı tarafından bire bir olarak transkript edilmiş daha sonra transkript metni üzerinde SÇ gerçekleştirilmiştir. Bir SÇ araştırmasında söylemlerin analizine yönelik kodlamalar araştırmacının kendisi tarafından çalışmaya özgü geliştirilebileceği gibi belli bir teorik çerçeveye dayanan ya da başka bir araştırmada kullanılandan yararlanma biçiminde de olabilmektedir. Doktora araştırmasına yönelik alt problemlerde ilk yazar literatürde yer alan ve sosyal göstergebilim olarak bilinen bir alanda önemli çalışmalarıyla tanınan Halliday ve Hasan'ın (1989) üç bileşenli modelini kodlama çerçevesi olarak kullanırken bu makalenin verilerine yönelik analizde ise yazar kendi kodlamasını oluşturmuştur. Tez çalışmasında araştırmacı hem matematik hem de geometri derslerindeki ispata yönelik (DS ve TES'leri) söylemleri karşılaştırmalı olarak analiz etmeyi amaçladığı için kodlamada Halliday ve Hasan'ın (1989) modelinden yararlanılmıştır. Bu makalenin konusunu oluşturan TES uygulamasında ise incelenen şey bir ispat yapma uygulamasında sınıf bazında oluşturulan öğrenci söylemleri olduğu için doğrudan TES'e yönelik özgün bir kodlama yapılması tercih edilmiştir. Araştırmacı TES'teki teoremin ispatına yönelik öğrenci söylemlerinin, içerdikleri ifadeler açısından 6 kod altında toplanabileceğini gözlemlemiş ve analizini bu kodlar üzerinde gerçekleştirmiştir. Kodlar belirlenirken söylemlerin yer aldığı transkript metni yaklaşık on kez baştan sona incelenerek örüntüsel nitelikteki ve baskın olan söylemlerin ve bunların iletişimi nasıl yönlendirdiğinin üzerinde durulmuştur. Böylece geçerli ve uygun bir ispat geliştirmeye engel olan temel noktaların iletişimsel göstergelerinden hareketle bilişsel nedenlerine yönelik bir takım belirlenmeler yapmak olanaklı hale gelmiştir. Söz konusu kodlar aşağıdaki gibidir,

1-*ifadenin doğruluğunu örnekler üzerinde deneme*
2-*ispat yapmaya yönelik düşünceler ve ispat yapma yöntemi*
3-*tanımlar*
4-*teoremin ifadesini yorumlama*
5-*alternatif yaklaşımlar*
6-*sıkıntı yaşanan anlardaki söylemler*

3. BULGULAR

Aşağıdaki tabloda belirlenen teoremin uygulandığı derste oluşan sınıf içi sözlü söylemler yer almaktadır. Sınıfta 13 öğrenci bulunmasına karşın uygulamanın yapıldığı gün iki öğrenci proje yarışmasına katıldığı için tabloda 11 öğrencinin söylemleri bulunmaktadır.

Tablo 1. Araştırmacı Tarafından Seçilen İspatın Uygulanmasındaki Sözlü Söylemler

		26 MAYIS-Pzt (Mat-4) TES Uygulaması	Kod
		"İki rasyonel sayı arasında bir irrasyonel sayı vardır" gösteriniz.	
2	**MO**	***Örnek verin kendinize göre bir yorumlayın bakalım.***	
3	OG-13	Örnek versek olur mu?	**--**
4	**MO**	***Tabi, ne istiyorsan, nasıl düşünüyorsan!***	
5	OG-3	İyide o ispat olmaz ki!	**2**
6	**MO**	***Ne demek istedim, örnek ver derken kafanda bir şey canlandır.***	
7	OG-13	1 ile 2 arasında $\sqrt{3}$ var, irrasyonel sayı olur mu?	**1-3**
8	**MO**	***Bilmem artık sen karar ver.***	
9	OG-8	İrrasyonel köklü sayı oluyor, yani 4 ile 16 arasında 9 var öyle düşünelim, 2 ile…	**3-1**
10	**MO**	***Herkes kendi yorumunu kendisi yapsın.***	
11	OG-1	İrrasyonel ne?	**3**
12	**MO**	***İrrasyonel köklü sayılar $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$ gibi.***	

13	OG-1	Bir iki sayıyla göstersek olur mu?	**2**
14	**MO**	***Artık siz kendinize göre kendi kanıtınızı yapın bakalım.***	
15	OG-4	x ‘li falan göstermek lazım.	**2**
16	**MO**	***Birbirinize bakmadan herkes kendi kendine yapsın.***	
17	OG-5	Hocam irrasyonel sayı köklü sayı değil mi?	**3**
18	OG-2	Hocam doğru değil ki bu. *[Verilen önermeyi kastediyor.]* -1 ile -2 arasında.	**1-3**
19	**MO**	***İyi düşün bakalım.***	
20	OG-2	Eksi kök yok ki.	**3**
21	OG-8	$-\sqrt{3}$ *[var]*	**3-1**
22	B-OG	*i* var.	**3-1**
23	OG-9	Karmaşıklarda irrasyonel.	**3**
24	OG-3	Hocam buradaki bir *[ifadesi]* sadece bir *[tane]* anlamında mı, 2, 3, 4 tane de olabilir mi?	**4**
25	**MO**	***Bir tane vardır diyor yani.***	
26	OG-9	En az 1.	**4**
27	OG-3	En az 1, çok sayıda var işte. *[çünkü]*	**4**
28	OG-8	$-\sqrt{3}$ irrasyonel sayı mı?	**3**
29	B-OG	Evet.	**3**
30	OG-6	İspatladım işte.	**2**
31	**MO**	***Biraz daha düşün. [Kâğıda bakıyor.]***	
32	OG-9	Mesela ben 1 ile 2 arasında $\sqrt[3]{3}$ olduğunu gösterdim.	**1**
33	OG-5	En ücra sayıların arasında bile var.	**4**
34	OG-3	Olmasaydı desek,	**2**
35	**MO**	***Olmayana ergiyle ters örnekle de ispat yapabilirsin.***	
36	OG-1	Bir yanlış gösterirsek doğru olduğunu ispatlamış olur muyuz?	**2**
37	**MO**	***Tabi onu da kullanabilirsin.***	
38	OG-2	Hocam iki rasyonel sayının ardışık olması gerekli mi?	**4**
39	**MO**	***Yaa kendi düşüncenize göre bir şey gösterin bakalım, ne düşünüyorsunuz, ne gösterebiliyorsunuz.***	
40	OG--	0 ile 1 arasında var mı?	**1**
41	OG-4	Var.	**1**
42	OG-5	Her yerde var her yerde.	**4**
43	OG-4	½ nin karekökü irrasyonel oluyor yine değil mi?	**3**
45	OG-9	Her sayının karekökü irrasyonel sayı değil midir?	**3**
46	**MO**	***[OG–7’ ye] Ama sen söylüyorsun [yazdıklarına bakıyor] örnek ver bir şeyler yap, ne yapıyorsun genelliyor musun? Aksine mi örnek veriyorsun? Çelişkiyle mi yapıyorsun ispatı?***	
47	OG-3	Sözel olarak anlatabilir miyiz?	**6**
48	OG-5	*[OG–9 ‘a]* 4 yerine 4,5 un karekökünü al bakalım.	**3**
49	OG-9	Her sayının karekökü irrasyonel değildir o zaman.	**3**
50	OG-6	1 ile 2 arasında $\sqrt{3}$ var, karesini alarak kanıtlayabiliriz.	**1-2**
51	OG-3	Hocam aslında üçgenle falan olur mu acaba?	**5**
52	**MO**	***Olabilir bak güzel bir düşünce geldi.***	
53	OG-5	Sayı doğrusu üzerinde ispatlayabilir miyiz?	**5**
54	OG-7	Ben öyle yaptım.	**5**
55	**MO**	***Olabilir, yani bakın bir sürü ispat çeşidinden bahsetmedik mi! Aksine örnek verme dedik, genelleme dedik, çelişki dedik, tümevarım dedik, değil mi?***	
61	OG-13	0 ile 1 arasında var mı?	**1**
62	OG-3	Var $\sqrt{3}/100$	**1**
63	OG-5	Önemli olan düşünmemiz değil mi hocam?	**6**
64	**MO**	***Tabi, nasıl düşünüyorsun, nasıl düşünebileceğin.***	
65	OG-4	Bir şey düşünemiyorum yaa.	**6**
69	**MO**	***Artık ne düşünüyorsanız, hangi bilgileri kullanıyorsanız, sizi serbest, özgür bırakıyoruz, benim ağzımdan bir şey alamazsınız siz kendiniz yapın.***	
70	OG-9	Burada…*[kâğıdındakini gösteriyor MO’ ya]*	**--**
71	**MO**	***Yani hep kareköklü sayılar mı irrasyoneldir? Küp kökler, dördüncü, beşinci kuvvetten kökler irrasyonel değil midir?***	
72	OG-2	Onlar da var ama biz bir tane gösterdik mi tamam işte.	**2-4**

73	B-OG	Hayır /olmaz/tam tersi olur.	**2**
74	**MO**	***Genelleyeceksin bence.***	
75	OG-2	İki rasyonel sayı arasında bir irrasyonel sayı vardır diyor, bir tanesini göster tamam doğru işte.	**4-2**
76	OG-13	Hayır, bir tane yanlış çıkarsa.	**2**
77	OG-2	Hayır, iki rasyonel sayı arasında bir tane bul yeter, yani onu doğrular.	**2**
78	OG-6	Tamamını doğrulamaz ki.	**2**
79	OG-2	Tamamını demiyorum parça parça.	**2**
80	OG-1	Bir tane olmayanını gösterirsen kanıtlamış olursun.	**2**
81	OG-2	İyi de o değil ki buradaki.	**2**
82	OG-1	Olmayana ergi yöntemi işte.	**2**
83	OG-3	Hayır, eğer olmasaydı diyeceğiz, olmazdı diyeceğiz, bu yüzden olmalıdır diyeceğiz. Ama nasıl diyeceğiz? *[Olmayana ergi yönteminin nasıl uygulanacağını açıklıyor.]*	**2**
88	OG-4	Yaa, ben zihnimde çözdüm ama buraya *[kâğıda]* aktaramıyorum.	**6**
89	**MO**	***Zihnindekini kâğıda dökersen çok mutluluk duyacağım, bana söyleme kâğıda da yaz.***	
90	OG-3	Bir şey buldum, öyle bir şey olmasaydı *[önermenin ifadesini kastediyor]* bunlar aynı sayı olurdu doğru mu?	**2**
93	OG-13	Zil çalacak hocam. yardımcı olun *[da yapalım.]*	**6**
94	**MO**	***Hayır, bu sizin işiniz. Doğru ya da yanlış ne düşünüyorsunuz, sizin görüşleriniz lazım.***	
95	OG-4	Yaa, şöyle işte ben sözel olarak ifade edeyim de; her iki rasyonel sayı arasında.	**6**
96	**MO**	***Tek bana değil, kâğıdına da anlat.***	
97	OG-4	Ama hocam anlatamıyorum oraya işte.	**6**
98	**MO**	***Bana anlattıklarını oraya da anlat.***	
99	OG-4	Her iki rasyonel sayı arasında bir rasyonel sayı vardır. O rasyonel sayı da bir sayının karekökü.	**6**
100	OG-5	Bir şeyler yazdım kendi çapımda, sayı doğrusundan gittim ben.	**5-6**
101	OG-7	Bende.	**6**
102	OG-8	Ben bir şey yapamadım.	**6**
104	OG-8	Zaten doğru olduğunu kanıtlayın demiyor ki gösteriniz diyor, ben de örnekle gösterdim.	**4-2**
105	**MO**	***Örnekle göstermek, göstermek mi oluyor? Biz öyle mi yapıyoruz?***	
106	OG-2	Hocam *i*, 0 ile -1 arasında bir sayı değil mi?	**3**
107	**MO**	***i***, $\sqrt{-1}$ ***demek***	
108	OG-2	Yani 0 ile -1 arasında mı?	**3**
109	**MO**	***Bilemem.***	
110	OG-2	Ya o zaman sıfırdan küçük şeyler için olmuyor. *[Önerme geçersiz anlamında.]*	**4**
111	OG-3	Ama iki farklı rasyonel sayı arasında diyor değil mi? Aynı sayı olmaz.	**4**
112	OG-8	O iki sayının karesini al, arasındaki sayılardan birinin kökünü al olur işte.	**2**
113	OG-1	Hocam sonsuzun karekökü sonsuz mudur?	**--**
114	**MO**	***[Evet anlamında başını sallıyor.]*** $+\infty$***' dan bahsediyorsan tabi [eğer].***	
115	OG-1	Buldum galiba, bakar mısınız?	**--**
116	**MO**	***Bakayım.***	
117	OG-1	Şimdi bu bir sayı (sonsuzdan küçük bir değer) bu da sonsuz arasında bir değer.	**2**
118	**MO**	***Rasyonel sayı için sonsuzdan mı gidiyorsun [yola çıkıyorsun anlamında] yani?***	
119	OG-1	Evet. *[MO negatif bir ifadeyle bakıyor OG-1'e.]*	**--**
120	OG-4	Hocam her iki rasyonel sayı arasında bir rasyonel sayı vardır değil mi? Bunu ispatlamama gerek yok burada değil mi?	**2**
121	**MO**	***Hayır, [gerek] yok.***	
122	OG-9	-1 ile 0 arasında var mı?	**1**
123	OG-4	-1 ile 0 arasında -1/2 var.	**1**
124	OG-12	-0.01 de *[mesela anlamında]*	**1**
125	OG-2	Hayır, irrasyonel sayı yok.	**3**
126	OG-12	Onu köklü yazabilirsin nasıl olsa.	**1**
127	OG-2	Köklü yaz ne oluyor *[o zaman]*, kaçın karesi -1 dir?	**3**
128	OG-4	OG–2 bak $\sqrt{\frac{1}{2}}$'i onun arasındaki sayı.	**1**
129	OG-13	$\frac{1}{\sqrt{2}}$ al.	**1**

130	OG-4	Hayır, $\sqrt{\frac{1}{2}}$ alınca, 0 ile 1 arasında oluyor, *i'* li alınca.	**1**
131	OG-2	İyi de *i*, 0 ile 1 arasında değil işte.	**3**
132	OG-4	*i* sanal bir sayı *[OG–2 'ye söylüyor sonra MO' ya dönüyor] i* diye bir sayı yok değil mi hocam?	**3**
133	B-OG	Var var.	**3**
134	OG-13	Kök -1'dir o.	**3**
135	**MO**	***Kök içerisinde -1'i "i" kabul ediyoruz işte.***	
137	OG-8	Ben şöyle yazdım [*Kâğıdı eline alıp, okuyor.*] Her iki rasyonel sayı arasında bir rasyonel sayı vardır. Bu rasyonel sayıları irrasyonel biçimde yazabiliriz. Bu yazdığımız irrasyonel sayılar, rasyonel sayının arasında olduğundan	**6**
140	**MO**	*[Zil çalıyor.]* ***Tamam, kâğıtları verin, toplayalım şunları hemen***.	
		MO: Matematik Öğretmeni, **OG-X**: X numaralı öğrenci, **B-OG**: Bazı öğrenciler	

Teoremi okuduktan sonra öğrencilerin öncelikli yaklaşımı teoremdeki ifadenin doğruluğunu araştırmak için örnekler bulmaya (kod-1) çalışmaktır. Tartışmanın ilerleyen aşamalarında da yine örneklere yönelik görüş alış-verişleri ile karşılaşılmaktadır. Örnek bulmaya yönelik girişimler kimi (1,5,8,13 numaralı öğrenciler) öğrencilerin irrasyonel sayının ne olduğu konusunda yeniden düşünmelerine yol açmıştır. OG-2 irrasyonel sayıların negatiflerinin olamayacağını ifade ederken (18),(20), (110); OG-8 ise irrasyonel sayıları köklü sayılar olarak tanımlamış, dokuz sayısını irrasyonel olarak ifade etmiş ve bu sayıların negatiflikleri konusunda da kararsız kalmıştır (21),(28). OG-5 ve OG-9 da her sayının karekökünün irrasyonel olup olmadığını sorgulamaktadır. Ayrıca "*i*" sayısının da irrasyonel sayı örneği olarak söylenmesi teoreme örnekler bulmada onu da tartışma konusu yapmaktadır. Öğrencilerin ağırlıklı çabası herhangi iki rasyonel sayı seçerek aralarındaki irrasyonelleri belirlemeye yöneliktir. Bu aşamada hiçbir öğrenci rasyonel sayıların a/b (a,b $\in Z$ ve b$\neq$0) ya da (a $\in Q$ ve b $\in Q$) biçimindeki cebirsel gösteriminden söz etmemiştir. İspat yapmaya yönelik düşünceler ve ispatlama yöntemleri (kod-2) öğrencilerin söylemlerinde fazlaca yer bulan diğer ifade grubunu oluşturmaktadır. Bu gruptaki söylemler:

-- ispat için bir iki örnek üzerinde doğru olduğunu göstermek (13),(72),(75),(104),
-- x gibi değişkenler kullanarak genel bir gösterim yapmak (15),
-- olmayana ergi yöntemini denemek (34),(82),
-- aksine örnek bulmak (36),(80) biçiminde sıralanmaktadır.

OG-1 ispata yönelik "*bir tane olmayanını gösterirsen kanıtlamış olursun* (80)" ifadesini kullanmış ve daha sonra bu ifadesini olmayana ergi yöntemi olarak tanımlamıştır (82). Olmayana ergi yöntemi için OG-3'ün yaptığı açıklama ise "*eğer olmasaydı diyeceğiz, olmazdı diyeceğiz, bu yüzden olmalıdır diyeceğiz* (83)" biçimindedir. Ayrıca ispatta alternatif yaklaşımların da (kod-5) olabileceği dile getirilmiş ve bu bağlamda; üçgenlerden yararlanma (51) ve sayı doğrusunda gösterme (53),(54) ifade edilmiştir. Tartışmalar içerisinde verilen teoremin ifadesinin ne anlama geldiğine, nasıl yorumlanması gerektiğine (kod-4) yönelik ifadeler de yer almaktadır. Bunlar aşağıdaki gibi örneklenebilir:

--hocam doğru değil ki bu. *[Verilen önermeyi kastediyor.]* -1 ile -2 arasında (18)
--buradaki bir [*ifadesi*] sadece bir [*tane*] anlamında mı, 2, 3, 4 tane de olabilir mi? (24)
--en ücra sayıların arasında bile var (33)
--iki rasyonel sayının ardışık olması gerekli mi? (38)
--iki rasyonel sayı arasında bir irrasyonel sayı vardır diyor, bir tanesini göster tamam doğru işte (75)

--zaten doğru olduğunu kanıtlayın demiyor ki gösteriniz diyor, ben de örnekle gösterdim (104)
--ama iki farklı rasyonel sayı arasında diyor değil mi? Aynı sayı olmaz (111)

Söylemler içerisindeki bir diğer grup ise öğrencilerin ispatlama aşamasında ilerleyememelerinden ya da tatmin edici bir yaklaşım sunamamalarından kaynaklanan sıkıntı yaşadıklarını (kod-6) gösteren ifadelerdir. Bu ifadeler de şu şekilde örneklenebilir,

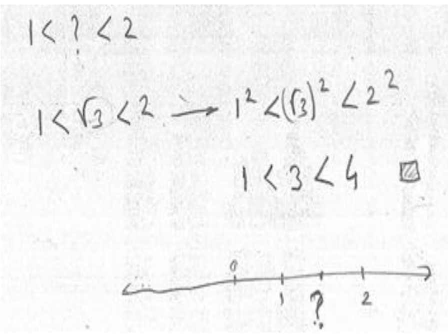
-- Yaa, ben zihnimde çözdüm ama buraya [*kâğıda*] aktaramıyorum (88)
-- Ama hocam anlatamıyorum oraya [*kâğıda*] işte (97)
-- Bir şeyler yazdım kendi çapımda, sayı doğrusundan gittim ben (100)

Bu tür sıkıntılı anlarda öğrencilerin eğilimlerinden birisi de ispata yönelik sözel açıklamalar yapmayı talep etmektir [örn. (95),(99),(137)]. Öğrenciler uygulama esnasında sözel tartışmaların olduğu anlarda bir yandan da kendilerine dağıtılan kâğıtlar üzerinde ispatı yazılı olarak yapmaya çalışmıştır.

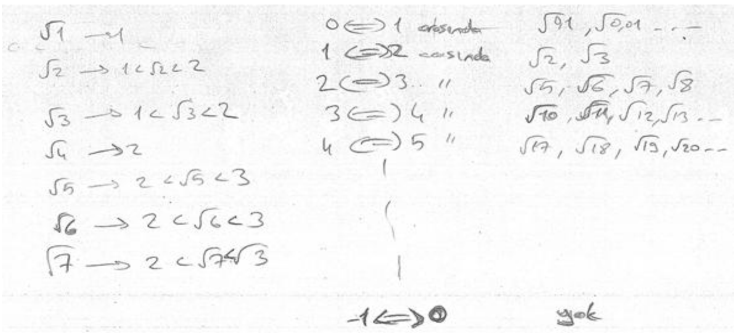
Yazılı yaklaşımların oluşmasında öğrenciler doğal olarak sözel tartışmalarına dayalı olarak birbirlerini etkilemiş ve sınıf içerisinde paylaşılan düşünceler kâğıtlara da yansımıştır. Öğrencilerin kâğıt üzerinde yaptığı yaklaşımlar incelendiğinde sözlü söylemlerine paralel matematiksel gösterimler ve açıklamalar ile karşılaşılmaktadır. Yazılı kâğıtların çoğunda sözel açıklamalar bulunmakta ve teoremin doğru olup olmadığı seçilen bazı sayı örnekleri üzerinde gösterilmeye çalışılmaktadır. Öğrenci kâğıtları kendi içerisinde sadece sözel açıklama içerenler (OG-5), sadece bazı sayılar üzerinde örneklemeler içerenler (OG-1, OG-2, OG-6, OG-9, OG-13) ve her ikisini de barındıranlar (OG-3, OG-4, OG-7, OG-8, OG-12) biçiminde üç gruba ayrılabilir. On bir öğrenciden yedisinin açıklama ya da örneklendirmelerinde sayı doğrusunu kullandığı, bir öğrencinin ise (OG-7) hem sayı doğrusu hem de dik üçgenden yararlanmaya çalıştığı görülmektedir. Rasyonel sayıları göstermede harfleri kullanan yalnızca OG-3'tür. Diğer tüm öğrenciler sayıları kullanarak ispat yapmaya çalışmıştır. Öğrencilerden hiç biri kâğıtlarında teoremde verilen ya da istenenin ne olduğunu belirtmemiştir.

4. SONUÇ VE TARTIŞMA

İspatı doğru olarak tamamlayan ya da kabul edilebilir bir yaklaşım sunan öğrenci bulunmamaktadır. Bu durumun oluşmasına etki eden unsurlardan birisi öğrencilerdeki bazı ön bilgi eksiklikleri ve kavram yanılgılarıdır. Öğrenci kâğıtlarından seçilen bazı örneklerde de (bkz. Ek) bu bulgular açıkça görülebilir. Öğrencilerin yaklaşımlarındaki ilk aşama teoremin ifadesine yönelik örnekler bulmayı kapsamaktadır.



OG-6



OG-2

Söz konusu örnekler büyük oranda sayısal olup cebirsel gösterimler şeklinde değildir. Bu durum test çözme üzerine odaklanılan öğretim anlayışı altında öğrencilerin matematiksel yazım, sembol ve notasyon kullanımları konusunda yeterince yönlendirilmemesinin sonuçlarından biri olarak düşünülebilir. Öğrencilerin ifadelerinde yer alan örnekler, sayılara ait bazı özelliklerin ne derecede bilindiğini içeren bir tartışma sürecini içermektedir. Söylemlere bakıldığında irrasyonel sayının ne olduğu, ne olmadığı, köklü sayı ile irrasyonel sayı arasında farklılıklar, *i* sayısının irrasyonel olup olmadığı gibi konulara ilişkin bilgilerin yeterince kavranmadığı görülmektedir. Tartışmalarda yer alan bir diğer şey teoremdeki ifadenin anlamının sorgulanmasıdır. Öğrencilerin verilen ifadenin ne anlama geldiğini farklı biçimlerde yorumlayabildiği görülmektedir. Hatta bir öğrenci teoremin ifadesinin yanlış olduğunu bile iddia etmiştir. Doğal olarak teorem ifadesine yüklenen anlamlardaki farklılıkların ispat yapma yaklaşımlarını da etkilediği görülmektedir. Öğrencilerin teoremin ifadesine yönelik örnekler bulmaya çalışması bir anlamda önce kendileri ve sonrasında arkadaşlarını teoremin doğru olduğuna ikna etme çabasını yansıtmaktadır. Almeida'nın (2001) belirttiği üzere lise öğrencileri genellikle ispatları deneysel olarak gerçekleştirmeye çalışmaktadır ve bu çabaları onların baskın stratejisi olarak karşımıza çıkmaktadır. İfadeyi yorumlamadaki iletişim sürecinin sağlıklı bir biçimde belli bir yöne doğru ilerleyememesinde, yine öğrencilerin matematiksel gösterimler kullanmayı denemek yerine düşüncelerini çoğu kez sözel olarak dile getirmenin ve bu düşüncelerini sayısal örneklere aktarmaya çalışmalarının etkili olduğu düşünülmektedir. Sayı örnekleri üzerindeki yaklaşım ve açıklamalar genelleyici olmadığı için öğrencilerin birbirini ikna etmesi de güçleşmektedir. İspatı gerçekleştirmeye yönelik girişimlerde hangi ispat yapma yönteminin uygun olacağına dair bir düşünme ve araştırma aşamasının bulunmadığı da görülmektedir. Öğrenciler deneme-yanılma yoluyla pratik bir yoldan düşünce üretmeye çalışmaktadır. Hem bireysel hem de sınıf bazında ispat yapmaya yönelik yaklaşımların bir düzen içerisinde gerçekleştirilemediği görülmektedir. Teoremde verilen ve istenenleri belirleme, bunları matematiksel olarak ifade etmeye çalışma, hangi ispat yapma yönteminin kullanılabileceğini araştırma gibi adımlar yerine verilen ifadeyi örnekler üzerinden test etmeye dayanan yaklaşımlarla karşılaşılmaktadır. Benzer bir bulgu Özer ve Arıkan'ın (2002) lise öğrencileri üzerinde yaptığı araştırmada da yer almaktadır. İlgili araştırmada öğrencilerin teoremdeki ifadeyi özel sayısal değerlerle ispat etmeye çalıştıkları ifade edilmiştir. Özel bazı sayısal örneklere bağlı yaklaşımlarda bulunmak sonuçta doğru ve geçerli bir ispatın geliştirmesini engellemektedir. İspatın gerçekleştirilmesine yönelik başlangıç aşamasının, hızlı bir şekilde nümerik örnekler üreterek gerçekleştirilmesi uygun ispat yapma yaklaşımından uzaklaşılmasına yol açmaktadır (Coe & Ruthven, 1994).

Ortaya konan bulgular çerçevesinde özetle şu yorumlara ulaşmak mümkündür;

Öğrencilerin,
-- ispatın sadece sözel açıklamalar biçiminde yapılamayacağı;
-- ispatlarda örnekler üzerinde deneme yapmanın başlangıç için yararlı olmakla birlikte örnekleme yoluyla tek başına bir ispatın oluşturulamayacağı;
-- ispatın, teorem (ya da önerme) içerisinde geçen tanımların ve özeliklerin sadece anlamlarını ifade ederek değil aynı zamanda matematiksel gösterimlerinin de kullanılmasını gerektirdiği,
-- ispatın birbirini izleyen bir dizi mantıksal adım içerisinde verilenden istenene ulaşma işlemi olduğunu kavramada ve bunu kendi ispat yapma süreçlerine aktarmalarında önemli sıkıntıları bulunmaktadır.

Bir ispatı sınıfta birlikte tartışarak ve yazılı olarak yapmayı içeren bu TES uygulamasının analizi çerçevesinde, öğrencilerin ispata yönelik kavramsal anlamalarında ve ispat yapmaya yönelik yaklaşımlarındaki sıkıntılı yanların doğrudan sözlü söylemlerine yansıdığı ve yazılı söylemlerinde de benzer durumun daha açık ve genele yayılan bir şekilde ortaya çıktığı görülmektedir. Öğrencilerin ispat ve ispatlamaya yönelik anlamalarının araştırılmasında TES'in yararlı ve işlevsel bir araç olduğu söylenebilir. (İlk yazarın yaklaşık üç ay boyunca yaptığı gözlemlere dayalı olarak şunlar ifade edilebilir) Araştırmanın yapıldığı sınıfta öğretmen merkezli bir öğretim anlayışı hâkimdir. İspata yönelik bilgiler ve ispat yapma becerisinin geliştirilmesinde temel kaynak sınıf içerisindeki öğretmen söylemleridir. Öğrencilerin bilgi yapılandırmaları büyük oranda öğretmenleri ile etkileşimleri çerçevesinde gerçekleşmektedir. Dolayısıyla öğrencilerde var olan yetersizlik, yanılgı ve yanlış algılamalara zemin oluşturan temel nedenler içerisinde öğretmenlerin iletişim biçimi ve bu iletişimdeki söylemlerinin yapısı, rolü ve işlevlerinin yeterli niteliğe sahip olmaması da sayılabilir. Öğretmenin ispatları ağırlıklı olarak bilgi aktarımı yoluyla sunması, ispatın inşası esnasındaki bilişsel süreçlere öğrencileri yeterince dâhil etmemesi ve ispat yapmanın anlamı ve adımlarını sınırlı bir şekilde ifade ederek aktarması niteliği düşüren hususlara örnek olarak verilebilir.

Ortaya çıkan bulgular ve onlar üzerinde yapılan tartışmalar çerçevesinde yapılabilecek öneriler şu şekilde sıralanabilir;

Öğretmenler derslerde sınıf içerisinde var olan iletişimin yalnızca konu anlatımlarını, soru/problem çözümlerini ve öğrencilerle yapılan sınırlı sözel soru-cevapları içeren bir takım konuşmalar ve tahtada yazılan sınırlı gösterimler olmadığı konusunda bilinçlendirilmelidir. Özellikle günümüzde iletişime yüklenen anlamların ve iletişimin sahip olduğu fonksiyonların artmasıyla birlikte, iletişimin hem günlük yaşamda hem de öğrenme-öğretme sürecindeki yeri ve rolünün doğru olarak kavratılması gerekmektedir.

Öğrencilerin matematik öğrenme-öğretme sürecinde yeni ortaöğretim matematik dersi öğretim programında öngörüldüğü şekilde aktif, katılımcı ve iletişime açık olmalarına ve hem günlük dili hem de matematiksel dili etkili bir şekilde kullanmalarına imkân sağlanmalıdır.

Öğrencilerin ispatlara ve ispatlamaya yönelik bilgilerinde var olan eksiklikler ve sınırlılıkların giderilmesinde ve ispatlama becerilerinin geliştirilmesinde izlenecek yollardan biri onları ispatlarla daha fazla karşı karşıya getirmek ve ispatlar üzerinde bireysel ve gruplar içerisinde çalışmalarına olanak sağlamaktır.

Sınıf içi öğretim sürecinde ispatın oluşturulması esnasında kullanılan argümanlar, mantıksal adımlar ve ön bilgilerin öğretmenlerce ayrıntılı biçimde sunulması ve bunlara yönelik gerekli açıklamaların yapılması öğrencilerin ispatlara yönelik anlamlandırmalarına olumlu katkı yapacaktır.

İspat ve ispatlamaya yönelik ülkemizdeki matematik öğretiminin daha nitelikli hale getirilmesinde SÇ çalışmalarının yapılması yararlı olacaktır. Bu çalışmalar içerisinde TES'lerin kullanılması, yapılan çalışmalardaki verilerin daha zengin ve çok yönlü biçimde toplanmasına olanak sağlamaktadır. Bu tür araştırmalar ile öğrencilerin ispat ve ispatlamaya ilişkin anlamalarına ve öğrenmelerine dair derinlemesine bilgiler elde edilmesi mümkün olabilecektir. Bu nedenle SÇ'ye dayalı araştırmaların yapılması önerilmektedir.

KAYNAKLAR

Ağlagül, D. (2009). *Beşinci Sınıf Sosyal Bilgiler Dersinde Sınıf Öğretmenlerinin Yapılandırmacı Öğrenme Ortamı Düzenleme Becerilerinin Değerlendirilmesi*. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Çukurova Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Adana.

Akturan, U. Domaç, B. ve diğer. (2008). Söylem Analizi, (Eds. T. Baş ve U. Akturan) *Nitel Araştırma Yöntemleri Nvivo 7.0 ile Nitel Veri Analizi*, Ankara: Seçkin Yayıncılık, s. 25-40.

Almeida, D. (2001). Pupils' Proof Potential. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* 32(1), pp. 53–60.

Ball, D.L., Hoyles, C., Jahnke, H.N., & Movshovitz-Hadar, N. (2002). The Teaching of Proof. In L.I. Tatsien (Ed.). *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Vol. III, pp. 907–920). Beijing: Higher Education Press.

Barwell, R. (2003). Discursive Psychology and Mathematics Education: Possibilities and Challenges, *ZDM*, Vol. 35 (5), 201-207.

Baş, T., Akturan, U., Ataçkarapınar, M. ve diğer. (2008). *Nitel Araştırma Yöntemleri, NVivo 7.0 İle Nitel Veri Analizi*, Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Cazden, C. B. & Beck, S. W. (2003). Classroom Discourse, *Handbook of Discourse Processes,* (Eds. A. C. Graesser; M, A, Gernsbacher; S. R. Goldman), New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates. Inc. Publication.

Coe, R. & K. Ruthven. (1994). Proof Practices and Constructs of Advanced Mathematical Students. *British Educational Research Journal* 20, No. 1, pp. 41–54.

Davis, P. J. & Hersh, R. (2002). *Matematiğin Seyir Defteri*.(Çev. E. Abadoğlu) Ankara: Doruk Yayıncılık.

Ellerton, N. F. & Clarkson, P. C. (1996). Language Factors in Mathematics Teaching. (In A. J. Bishop et. al.) *International Handbook of Mathematics Education*. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Fosnot, C. T. & Perry, R. S. (2007). Oluşturmacılık: Psikolojik Bir Öğrenme Teorisi (Bölüm-2), *Oluşturmacılık. Teori, Perspektifler ve Uygulama*, (2. Baskıdan Çev. S. Durmuş), Ankara: Nobel Yayın Dağıtım.

Garnier, R. & J. Taylor (1996). *100% Mathematical Proof*. John Wiley & Sons, Inc. Press.

Günay, V. D. (2010). *Söylem Çözümlemeleri*, [basımda kitap]

Halliday, M. A. K. & Hasan, R. (1989). *Language, Context and Text: Aspects of Language in A Social-Semiotic Perspective.* (2nd ed.). Oxford: Oxford University Press.

Har, Y. B. (2007). The Singapore Mathematics Curriculum and Mathematical Communication, *Proceeding of APEC-TSUKUBA International Conference III, Innovation of Classroom Teaching and Learning through Lesson Study, Focusing on Mathematical Communication*, (9-14 December), Tokyo and Kanazawa, Japon.

Harel, G., & Sowder, L (2007). Toward a Comprehensive Perspective on Proof, (Eds. F. Lester), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, National Council of Teachers of Mathematics, pp. 805-842.

Hicks, D. (1996). Discourse, Learning and Teaching, *Review of Research in Education*, Vol. 21, (1995-1996), 49-95.

ICMI Study 19. (2009). Proof and Proving in Matematics Education: Discussion Document, (Eds. F. L. Lin; F. J. Hsieh; G. Hanna & M. de Villiers) *Proceedings of the ICMI Study 19 Conference: Proof and Proving in Mathematics Education*, (10-15 May) pp. 1-XIX--1-XXX,Taipei, Taiwan.

Khaing, T. T., Hamaguchi, K. & Ohtani, M. (2007). Development Mathematical Communication in the Classroom, *Proceeding of APEC-TSUKUBA International Conference III, Innovation of Classroom Teaching and Learning through Lesson Study, Focusing on Mathematical Communication*, (9-14 December), Tokyo and Kanazawa, Japon.

Knuth, E. J. (2002). Teachers' Conceptions of Proof in the Context of Secondary School Mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*. 5, 61-88.

Lee, J. K. (2002). Philosophical Perspectives on Proof in Mathematics Education. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, 16.

Lin, C. H., Shann, W. C. & Lin, S. C. (2007). Reflection on Mathematical Communication from Taiwan Math Curriculum Guideline and PISA 2003, *Proceeding of APEC-TSUKUBA International Conference III, Innovation of Classroom Teaching and Learning through Lesson Study, Focusing on Mathematical Communication*, (9-14 December), Tokyo and Kanazawa, Japon.

MEB, (2005). *Ortaöğretim Matematik Dersi (9, 10, 11 ve 12. Sınıflar) Öğretim Programı*, http://ogm.meb.gov.tr/ (alıntı 01 Ekim 2009).

Miyagui, M. (2007). Key Questions for Focusing on Mathematical Communication, *Proceeding of APEC-TSUKUBA International Conference III, Innovation of Classroom Teaching and Learning through Lesson Study, Focusing on Mathematical Communication*, (9-14 December), Tokyo and Kanazawa, Japon.

Morgan, C. (2006). What Does Social Semiotics Have to Offer Mathematics Education Research?, *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 61, No.1/2, A PME Special Issue, 219-245.

NCTM, (2000). *Principles and Standarts for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Özer, Ö. & Arıkan, A. (2002). Lise Matematik Derslerinde Öğrencilerin İspat Yapabilme Düzeyleri, *V. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi*, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, (16-18 Eylül) Ankara.

Padraig, M. & McLoughlin, M. M. (2002). The Central Role of Proof in the Mathematics Canon: The Efficacy of Teaching Students to Create Proofs Using a Fusion of Modified Moore, Traditional, and Reform Methods. *The Annual Summer Meeting of the Mathematical Association of America*, (3 August) Burlington, Vermont.

Ryve, A. (2004). Can Colloborative Concept Mapping Create Mathematically Productive Discourses?, *Educational Studies in Mathematics*, 26, 157-177.

Setati, M. (2005). Mathem atics Education and Language: Policy, Research and Practice in Multilingual South Africa, (Eds. R. Vithal, J. Adler, & C. Keitel) *Researching Mathematics Education in South Africa*. Cape Town: HSRC Press.

Sfard, A. (2001). There is More to Discourse Than Meets the Ears: Loking at Thinking as Communicating to Learn More about Mathematical Learning, *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 46, No. 1/3, 13-57.

Steele, D. F., (2001). Using Sociocultural Theory to Teach Mathematics: A Vygotskian Perspective. *School Science and Mathematics*. 101(8), 404-416.

Şimşek, N. (2004). Yapılandırmacı Öğrenme ve Öğretime Eleştirel Bir Yaklaşım, *Eğitim Bilimleri ve Uygulama*, 3(5), 115-139.

Taylor, S. (2001) Locating and Conducting Discourse Analytic Research (Eds. M. Wetherell, S. Taylor and S. J. Yates), *Discourse As Data, A Guide for Analysis*, London: Sage Publications, pp. 5-48.

Uğurel, I. ve Moralı, S. (2010). Matematik Eğitimi ve Dilbilim Etkileşimine Dayalı Bir Araştırma ve Metodoloji Alanı: Söylem Çözümleme, *E-Journal of New World Sciences Academy*, Vol. 5, No. 1, 173-184.

Ulep, S. A. (2007). Developing Mathematical Communication in Philippine Classroom, *Proceeding of APEC-TSUKUBA International Conference III, Innovation of Classroom Teaching and Learning through Lesson Study, Focusing on Mathematical Communication*, (9-14 December), Tokyo and Kanazawa, Japon.

Vui, T. (2007). Enhancing Classroom Communication to Develop Students' Mathematical Thinking, *Proceeding of APEC-TSUKUBA International Conference III, Innovation of Classroom Teaching and Learning through Lesson Study, Focusing on Mathematical Communication*, (9-14 December), Tokyo and Kanazawa, Japon.

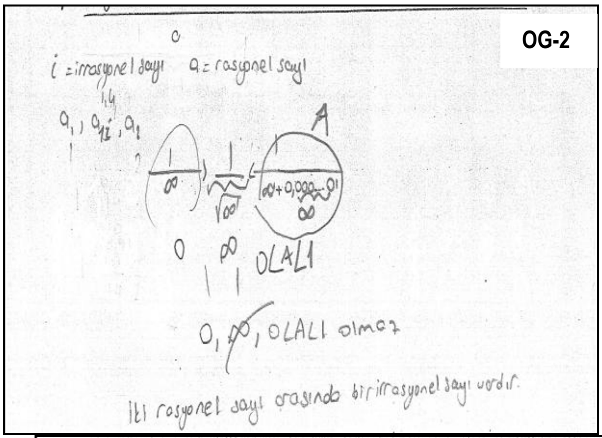
Wang, S. (2007). Research Process, Changes and Implementation of Mathematics Curriculum Standard of China, *Proceeding of APEC-TSUKUBA International Conference III, Innovation of Classroom Teaching and Learning through Lesson Study, Focusing on Mathematical Communication*, (9-14 December), Tokyo and Kanazawa, Japon.

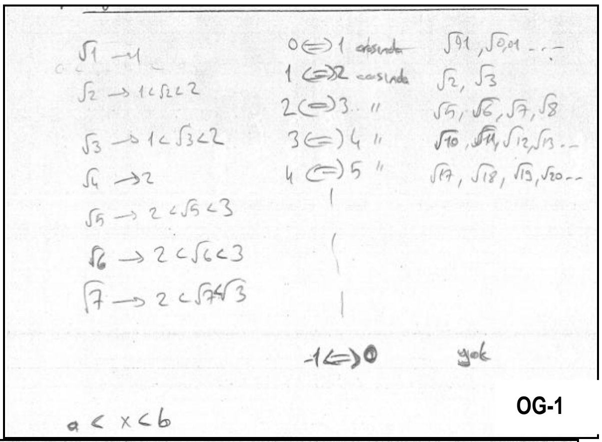
Weber, K., (2001),Student Difficulty in Constructing Proofs: The Need For Strategic Knowledge. *Educational Studies in Mathematics*. 48, 101-119.

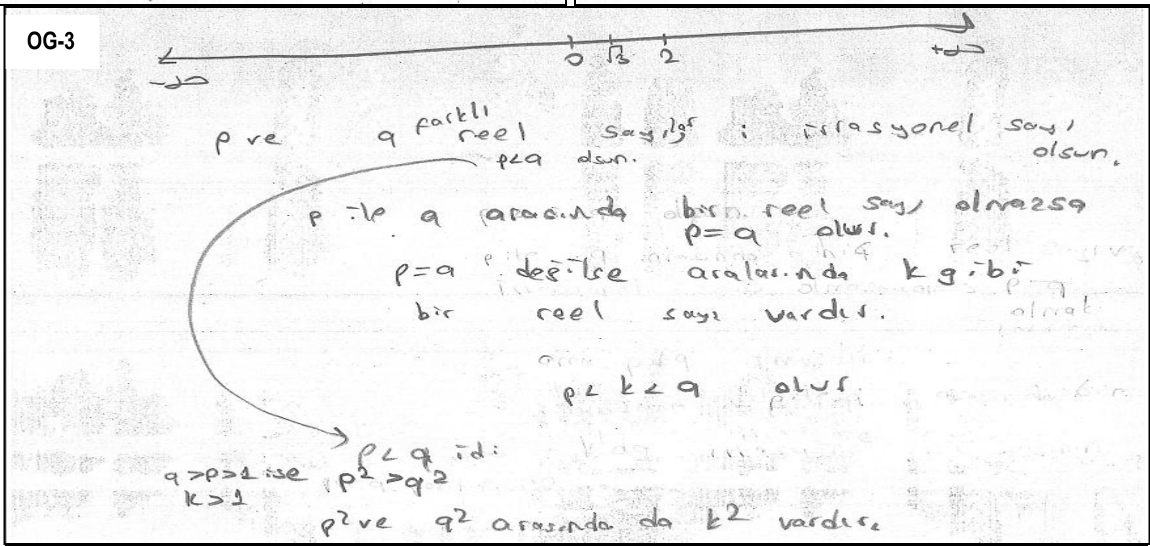
Wertsch, J. V. & Toma, C. (1995). Discourse and Learning in The Classroom: A Sociocultural Approach, (Eds. L. Steffe & J. Gale) *Constructivism in Education*, New Jersey: Lawrence Erlbaum, pp. 159-174.

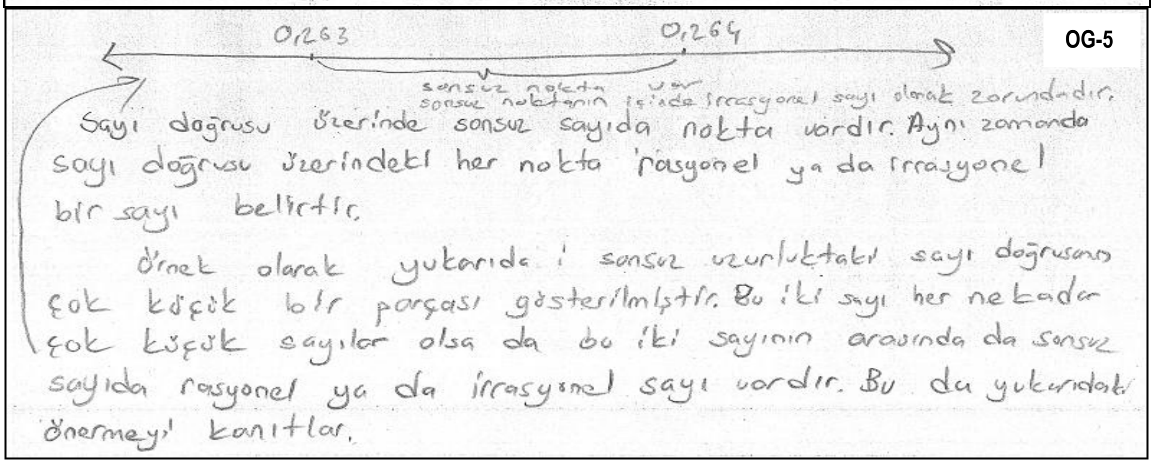
Yıldırım, A..& Şimşek, H. (2000). *Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri*, (2. Basım) Ankara : Seçkin Yayıncılık.

EK


OG-2
i = irrasyonel sayı   q = rasyonel sayı
İki rasyonel sayı arasında bir irrasyonel sayı vardır.


OG-1
0 ⟺ 1 arasında
1 ⟺ 2 arasında
yok
a < x < b


OG-3
p ve q farklı reel sayılar; irrasyonel sayı olsun.
p<q olsun.
p ile q arasında bir reel sayı olmazsa p=q olur.
p=q değilse araların da k gibi bir reel sayı vardır.
p< k< q olur.
p<q idi
q>p>1 ise p² > q²
k>1
p² ve q² arasında da k² vardır.


OG-5
0,263
0,264
sonsuz nokta var
sonsuz noktanın içinde irrasyonel sayı olmak zorundadır.
Sayı doğrusu üzerinde sonsuz sayıda nokta vardır. Aynı zamanda sayı doğrusu üzerindeki her nokta rasyonel ya da irrasyonel bir sayı belirtir.
Örnek olarak yukarıda sonsuz uzunluktaki sayı doğrusunun çok küçük bir parçası gösterilmiştir. Bu iki sayı her ne kadar çok küçük sayılar olsa da bu iki sayının arasında da sonsuz sayıda rasyonel ya da irrasyonel sayı vardır. Bu da yukarıdaki önermeyi kanıtlar.

OG-8

2 ile 3 arasında

$2 < \sqrt[3]{10} < \sqrt[3]{25} < \sqrt{5} < 3$ gibi her iki rasyonel sayı arasında bir irrasyonel sayı vardır

* her iki rasyonel sayı arasında bir rasyonel sayı vardır. Bu rasyonel sayıları irrasyonel biçimde yazabiliriz. Bu yazdığımız irrasyonel sayılar, rasyonel sayıların arasında olduğu için iki rasyonel sayı arasında bir irrasyonel sayı vardır.

EXTENDED ABSTRACT
Introduction

The related literature show that the interest toward communications in mathematics education is fast increasing. This is also seen in newly developed mathematics cirrucilums in many countries (South Africa, Sweden, Japan, Vietnam, Taivan. Singapur, Peru, Philippines, China) and NCTM principles and essencial components in successful mathematics education acording to NCTM (ericson and Clark 1996). As a concequence it became useful and necessary to consider mahematical learning, understanding and conceptualising, within relationship network between mathematics and lenguage, in communictions perspective. Social sciences, in research of language and language related communication processes not only gives us detailed knowledge on a certain discipline but also allows us the use of orginal approaches between disciplines.
Discourse analysis can be described as a theoretical framework, a quantitative research method, a research program with its own steps and systematic, an analytical approach which allow us to analyse language. Although it is a fairly new subject, it is seen that there is increasing interest in discourse and social perspectives in mathematics education research containing discourse and its analysis /Barwell 2003). Yet there is few research dealing with classroom communication discourses and investigating proving and proof learning, understanding and skills through analyzing these discourses. One of the reasons for this research is to try to contribute to this area.

Theoretical Framework

In this research students' classroom discourses on proof and the effects on their learning were taken into consideration and the theoretical framework is sociocultural approach. In this thought process all ideas within a group are considered to have equal status. (Şimşek, 2004) According to the sociocultural approach, an individual's cognitive framework cannot be explained without observing their interactions within their culture.(Fosnot and Perry, 2007) Because, "learning" is a conscious activity an individual make within the social and cultural texture he/she live in. (Ağlagül, 2009:39)

Research Question

The research question is "What is the nature of the discource of student communications (interactions) around a proving activity?"

Method

This research in generally developed according to quantitative research paradigm and the analysis used under this paradigm is discourse analysis method. Methodological framework of the research is, as explained by Uğurel and Moralı (2010), application of main stages of discourse analysis method.

Sample

The sample of the study is total of 12 people, consisting of 11 11th grade students from a private science high school and their mathematics teacher in İzmir. Selected sampling method is used.

Data Handling

Data consist of students' individual and interractive oral and written discourses in the mathematics classroom and researcher's observations. Discourses were collected as videos.The discourses analised in this research are oral and written discourses of a TES application.

TES: These consist of written questions previously determined by the researchers and given to the teacher for them to direct to students in class in order to incourage students to share ideas, give explenations and discuss their approaches about prof and prooving. This type discourse is first time in this research and developed by the writters from what was called "created discourse" in research.

Analysis

The transcripts of the videos were made by the researchers and discourse was made on these transcripts. The researchers used their own coding for the analysis of the data. The researchers realised that student discourses about the given theorem can be categorised in 6 codes.

1-Trying out the correction of the statement on examples
2-Thoughts on prooving and proof methods
3-definitions
4-interpreting the statement(yorum)
5-alternative approaches
6-discourse in the moments of difficulty

Conclusion

None of the students could be able to give the correct definition of proof or come up with an acceptable approach. This can be a result of their lack of earlier knowledge and misconceptions. Some selected samples of student paapers show this results clearly. First part of student approach contains finding examples suitable to the statement of the theorem. These examples are mostly numerical and not in the algebraic form. Another part of the discussion is to question the meaning of the theorem statement. Instead of finding out what is given to and what is expected, trying to write these in mathemetically, which proof method is to be used, they tend to give examples to test the statement.

It is seen that TES is a useful and functional tool to study students' understanding of proof and proving.

Suggestion

--The teachers should be made aware that the inner class communicatin is beyond some talks around subject matter of the lesson, question/problem solutions limited oral questions/answers and limited written representations.
--Discourse analysis would be useful to increase the qualty of prooving and proof learning in mathematics education. Using TES in these research ables us to collect richer and more varied data.