BŞEÜ Fen Bilimleri Dergisi
9(2), 847-854, 2022

BSEU Journal of Science
https://doi.org/10.35193/bseufbd.1091550

e-ISSN:2458-7575 (https://dergipark.org.tr/tr/pub/bseufbd)

Araştırma Makalesi- Research Article

Momentler Metodu ile Parametre Tahmini Üzerine

On Parameter Estimation with the Method of Moments

Yunus Bulut[1*], Ahmet Demiralp[2]

Geliş / Received: 22/03/2022 ***Revize / Revised: 26/06/2022*** ***Kabul / Accepted: 01/07/2022***

ÖZ

Momentler Metodu, bir istatistiksel modelin parametrelerini tahmin etmek için kullanılır. Bu yöntem örnek momentleri ile anakütle momentleri arasındaki ilişki ile verilen denklemlerin çözümü ile parametrelerin değerlerini bulmayı amaçlar. Literatürde bilinen ilk tahmin yöntemi olan Momentler Metodu ilk olarak Pearson tarafından ortaya atılmıştır. Uygulanabilirliği, basit ve anlaşılır olmasından dolayı sürekli başvurulan bir yöntemdir. Bu çalışmada, Binom, Poisson, Sürekli Düzgün ve Gamma dağılımlarının bilinmeyen parametrelerinin tahmincileri Momentler Metodu ile elde edilmiş ve verilen dağılımlar için tesadüfi veriler simüle edilerek gerçek değerleri ile tahmin değerleri karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler- Parametre Tahmini, Momentler Metodu, Binom Dağılımı, Poisson Dağılımı, Gamma Dağılımı

ABSTRACT

The method of moments uses to estimate the parameters of a statistical model. This method aims to find the values of the parameters which are solutions of equations given by relationship between the sample moments and the population moments. The Method of Moments, which is the first estimation method known in the literature, was first introduced by Pearson. This method is constantly used because of its applicability, simplicity and understanding. In this study, the estimators of the unknown parameters of the Binomial, Poisson, Continuous Uniform, and Gamma distributions are obtained by the Moments Method and the actual values and the estimation values are compared by simulating random data for the given distributions.

Keywords- Parameter Estimation, Method of Moments, Binomial Distribution, Poisson Distribution, Gamma Distribution

[1]*Sorumlu yazar iletişim: ybulut79@gmail.com (https://orcid.org/0000-0002-9108-4937)
Ekonometri Bölümü, İnönü Üniversitesi, Malatya, Türkiye
[2]İletişim: ahmt.dmrlp@gmail.com (https://orcid.org/0000-0002-0981-7215)
Ekonometri Bölümü, Harran Üniversitesi, Şanlıurfa, Türkiye

I. GİRİŞ

Veri analizinde, makine öğrenmesinde güdümlü öğrenmede, regresyon analizinde, karar teorisinde vs. işlenen tüm verilerin belirli bir dağılım göstermesi beklenir. Örneğin, sistem analizinde bileşen ömürleri belirlenirken gözlenen verilerin Weibull dağılımı ailesine uyması beklenir. Bu verilerin uyduğu dağılımın parametrelerini belirlemek için çeşitli tahmin yöntemleri kullanılmaktadır. Literatürde en çok kullanılan yöntemler En Küçük Kareler (EKK), Maksimum Olabilirlik (MLE), Bayes ve Momentler (MME) yöntemidir. Bu yöntemler içinde bilinen ilk parametre tahmin yöntemi MME'dir. Bu yöntem ilk olarak Karl Pearson tarafından önerilmiştir [1]. Yöntemin geliştirildiği zamandan bu zamana kadar parametre tahmininin en basit yolu olarak yaygın bir şekilde kullanılmaktadır ve birçok uygulama probleminde etkili bir şekilde bu yönteme başvurulmaktadır. Genellikle, diğer tahmin yöntemleri ile elde edilen tahminler, MME yöntemi ile elde edilen tahminler ile kıyaslanmaktadır.

Birçok istatistiksel modellerin parametre tahminlerini MME ile hesaplamak olabilirlik fonksiyonunun maksimize edilmesinden çok daha kolay yapılmaktadır. MME, bazı dağılımlar için yanlı fakat tutarlı tahminciler üretmektedir. Bazı dağılımlar için ise tutarlı olmasa bile asimptotik olarak tutarlı ve asimptotik olarak etkin tahminciler üretir. Bu yüzden hesaplama süresinin minimizasyonunun sonlu varyans değerinden daha önemli olduğu problemlerde MME önerilir [2].

Literatürde MME yöntemi hem teorik olarak hem de birçok farklı alanda uygulamaları ile ilgili sayısız çalışmalar bulunmaktadır. Bickel vd. [3], bir grafikteki belirli desenlerin ampirik sayımlarıyla büyük bir olasılık modeli sınıfını sığdırmak için kullanılabilecek genel bir MME yaklaşımını önermişlerdir. Bücher ve Jennessen [4], durağan zaman serisinin extrem indeksi için MME yöntemini kullanarak yeni bir sıralama tabanlı tahmin aracı geliştirmişlerdir. Wnag ve Peng [5], çalışmalarında belirsizlik dağılımlarını uzmanların deneysel verileriyle tahmin etmek için bir MME sunarak bilinmeyen parametreleri bulmak için sayısal bir yöntem tasarlamışlardır. Wikström [6], gerçek sabit etkiler modelini MME ile tahmin ederek, aynı modelin Maksimum Olabilirlik metodu ile tahminine kıyasla daha esnek olduğunu göstermiştir. Wang ve Hsiao [7], gözlemlenmeyen tahmin değişkenlerinin ve ölçüm hatalarının dağılımlarının parametrik olmadığı bir doğrusal olmayan değişkenlerdeki hatalar modelini, enstrümental değişken yaklaşımını kullanarak, bilinmeyen parametreler için MME ve çoklu integral içeren bir amaç fonksiyonunu en aza indirgemenin olası hesaplama zorluğunun üstesinden gelmesi için simülasyon tabanlı tahminciler üretmişlerdir. Chen vd. [8], döviz getirilerinin ağır kuyruklu dağılımlara sahip olduğunu göz önüne alarak, döviz opsiyonlarını fiyatlandırmak ve etkin bir yöntem önermek için, dağılımın kuyruğu, Normal dağılım yerine Student-t dağılımı kullanılarak modellemişlerdir ve Student-t dağılımının parametrelerini MME ile tahmin etmişlerdir. Negri ve Nishiyama [9], MME'yi kullanan bir değişim noktası saptama prosedürü önermişlerdir. Accrachi vd. [2], MME'yi geliştirerek MME tabanlı yeni testin asimptotik davranışlarını tanımlamışlardır. Aoki vd. [10], öntest/sontest gibi tekrarlanan ölçüm verilerinin analizi için kullanılan boş kesmeli ölçüm hatası regresyon modelleri için MME kullanılarak parametreler tahmin etmiş ve asimptotik bağıl etkinlikleri, elde edilmesi zor olan MLE'ye göre değerlendirmişlerdir. Carpenter ve Mishra [11], geleneksel MME ve MLE'yi geliştirmek için standart beta parametrelerinin boostrap sapması düzeltilmiş bir tahmincisini önermişlerdir. Abarin vd. [12], modeldeki rastgele etkilerin ve diğer rastgele hataların dağılımlarının fonksiyonel formları üzerinde herhangi bir varsayım gerektirmeyen bir MME geliştirmişlerdir. Hayek [13], Laplace dağılımı için yeni bir MME yaklaşımı geliştirmiş ve daha önceden bilinen MLE ile karşılaştırmıştır. Lee [14], klasik MME'yi incelemenin temel bir parametrik modelinin Birinci Tip Beta dağılımı iken iki şekil parametresi için bir dizi yüksek mertebeden MME'yi ve çözümün de kapalı formda olduğunu göstermiştir. Jangphanish ve Budsaba [15], İki Parametreli Ters Gauss dağılımın parametrelerini tahmin etmek için MME ile MLE'yi kullanmışlardır. Dabye vd. [16], homojen olmayan poisson süreçlerinin gözlemlenmesi durumunda sonlu boyutlu parametrelerini MME ve çok adımlı MLE ile tahmin etmişlerdir. Gu ve Abraham [17], McDaniel modelinin kümülatif dağılım fonksiyonunu yaklaşık olarak tahmin etmek için MME ile MLE metodlarını kullanmışlardır.

MME yöntemi, hem bilinen ilk yöntem olması hem de kolay uygulanmasından dolayı popülerliğini korumaktadır. Bu çalışmada MME'nin algoritması tanıtılmış ve bazı özel dağılımların bilinmeyen parametreleri için MME tahmincileri elde edilmiştir. Elde edilen tahmincilerin performanslarını görmek için R'da dağılımlara uyan tesadüfi gözlem değerleri üretilerek MME tahmincileri elde edilmiştir. Farklı değerlere karşılık gelen tahmin sonuçları tablolar halinde verilmiştir.

II. MATERYAL VE METOT

A. *Momentler Metodu*

Bu yöntem dağılım fonksiyonunun var olan anakütle momentleri ile örneklem momentlerinin eşitlenmesi esasına dayanır. Fakat bazı dağılım fonksiyonları için parametre tahmin edicisi örneklemin bir fonksiyonu olarak belirlenemez.

$\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_r)' \in \Theta \subset \mathbb{R}^r, r \geq 1$ parametre vektörüne sahip $f(.;\boldsymbol{\theta})$ olasılık (yoğunluk) fonksiyonundan seçilen $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ örnekleminin k.momentleri

$$\hat{\alpha}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k, k = 1, \dots, r = [1:r] \tag{1}$$

ve anakütle dağılımının momentleri

$$\alpha_k = E_\theta\left(X_i^k\right), k \in [1:r] \tag{2}$$

olmak üzere; örneklem momentleri ile anakütle momentlerinden ilk r tanesinin eşitlenmesiyle elde edilen ve $\theta_i, 1 \leq i \leq r$ bilinmeyenlerine göre r denklemli denklem sisteminin çözümü olan $\widetilde{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{X}) = \left(\tilde{\theta}_1(X_1, \dots, X_n), \dots, \tilde{\theta}_r(X_1, \dots, X_n)\right)' = \left(\tilde{\theta}_1(\boldsymbol{X}), \dots, \tilde{\theta}_r(\boldsymbol{X})\right)'$ tahmin edicisine $\boldsymbol{\theta}$ parametre vektörünün momentler yöntemi tahmin edicisi denir. Momentler yönteminin algoritması aşağıdaki gibidir.

Koşul: r parametreli anakütle dağılımının k. anakütle dağılım momenti vardır. Yani her $k \in [1:r]$ için $E_\theta(|X_i|^k) < \infty$ dur.

1. Adım: İlk r anakütle dağılım momentleri bulunur. Yani her $k \in [1:r]$ için $\alpha_k = E_\theta\left(X_i^k\right)$ hesaplanır.

2. Adım: İlk r örneklem momentleri örnek verileri ile hesaplanır. Yani her $k \in [1:r]$ için $\hat{\alpha}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$ hesaplanır.

3. Adım: Anakütle ve örnek momentleri eşitlenerek r bilinmeyenli r denklemli bir denklem sistemi elde edilir.

$$\hat{\alpha}_k = a_k, k \in [1:r] \tag{3}$$

denklem sistemi çözülerek $\widetilde{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{X})$ elde edilir.

B. *Binom Dağılımının MME ile Parametre Tahmini*

Her iki parametresi bilinmeyen Binom olasılık fonksiyonu

$$f(x;\boldsymbol{\theta}) = \begin{cases} \binom{\theta_1}{x} {\theta_2}^x (\theta_2)^{\theta_1 - x}, & x \in [0:\theta_1],\ \ \theta_1 \in [1:\infty], \theta_2 \in (0,1) \\ 0, & diğer\ yerlerde \end{cases} \tag{4}$$

şeklindedir. Bu dağılıma ait ilk iki anakütle momentleri, $\alpha_1(\boldsymbol{\theta}) = \theta_1\theta_2$ ve $\alpha_2(\boldsymbol{\theta}) = \theta_1\theta_2(1-\theta_2) + {\theta_1}^2{\theta_2}^2$ dir. $\boldsymbol{X}$ gözlem değerlerinden elde edilen örneklem momentleri $\hat{\alpha}_1(\boldsymbol{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ ve $\hat{\alpha}_2(\boldsymbol{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ dir. Anakütle ve örneklem momentleri eşitlenerek iki bilinmeyenli iki denklem ile çözüm aranacaktır, yani $k = 1,2$ için $\alpha_k(\boldsymbol{\theta}) = \hat{\alpha}_k(\boldsymbol{X})$ eşitliğini sağlayan $\boldsymbol{\theta}$ bilinmeyen parametre vektörü, $\boldsymbol{X}$ gözlem değerine bağlı olarak çözümlenecektir. $k = 1, 2$ için,

$$\begin{cases} \theta_1\theta_2 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X} \\ \theta_1\theta_2(1-\theta_2) + {\theta_1}^2{\theta_2}^2 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \end{cases}$$

denklem sisteminin çözümü;

$$\theta_1\theta_2(1-\theta_2) + {\theta_1}^2{\theta_2}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \quad \Rightarrow \quad \bar{X}(1-\theta_2) + \bar{X}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

BSEU Journal of Science
https://doi.org/10.35193/bseufbd.1091550

e-ISSN:2458-7575 (https://dergipark.org.tr/tr/pub/bseufbd)

$$\Rightarrow \quad 1-\theta_2 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X}^2}{\bar{X}}$$
$$\Rightarrow \quad \theta_2 = \frac{\bar{X} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + \bar{X}^2}{\bar{X}}$$

ve $\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ olduğundan $\widetilde{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{X}) = \left(\frac{\bar{X}^2}{\bar{X}-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}, \frac{\bar{X}-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\bar{X}}\right)'$ elde edilir.

Burada $\bar{X} > \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ ve $\tilde{\theta}_1$ tahmini değeri tam sayı olması şartının yerine getirilmesi durumunda, Binom dağılımı için gerekli olan $\tilde{\theta}_1 \epsilon \mathbb{N}$ ve $0 < \tilde{\theta}_2 < 1$ şartları sağlanmış olur.

C. Poisson Dağılımının MME ile Parametre Tahmini

θ parametresi bilinmeyen Poisson olasılık dağılımının fonksiyonu

$$P(x;\theta) = \begin{cases} \frac{e^{-\theta}.\theta^x}{x!}, & x = 0,1,2,\ldots,\theta > 0 \\ 0, & diğer\ yerlerde \end{cases} \tag{5}$$

şeklinde tanımlanır. Bu dağılıma ait anakütle momenti, $\alpha_1(\boldsymbol{\theta}) = \theta$ ve $\boldsymbol{X}$ gözlem değerlerinden elde edilen örneklem momenti $\hat{\alpha}_1(\boldsymbol{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ eşitlenerek bir bilinmeyenli bir denklem elde edilir. Buna göre θ parametresinin tahmini $\tilde{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}$ şeklinde elde edilir.

D. Sürekli Düzgün Dağılımın MME ile Parametre Tahmini

İki parametresi de bilinmeyen Sürekli Düzgün dağılım

$$U(x,\boldsymbol{\theta}) = \begin{cases} \frac{1}{\theta_2-\theta_1}, & \boldsymbol{\theta} = (\theta_1,\theta_2), \theta_1,\theta_2 \in \mathbb{R}, \theta_1 < \theta_2,\ \theta_1 \le x \le \theta_2 \\ 0, & diğer\ yerlerde \end{cases} \tag{6}$$

ile ifade edilir. Bu olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip X tesadüfi değişkeninin anakütle momentleri $k = 1,2$ için

$$\alpha_k(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k} \theta_1^i \cdot \theta_2^{k-i}$$

şeklinde ifade edilir. Anakütle momentleri ile, $\boldsymbol{X}$'e ait örnek momentleri eşitlenirse, $k = 1, 2$ için,

$$\begin{cases} \dfrac{\theta_1+\theta_2}{2} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X} \\ \dfrac{\theta_1^2+\theta_2^2+\theta_1\theta_2}{3} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \end{cases}$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin çözümü ile MME tahmin vektörü ise $\widetilde{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{X}) = \left(\tilde{\theta}_1 = \bar{X} - \sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}, \tilde{\theta}_2 = \bar{X} + \sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}\right)'$ dir.

E. Gamma Dağılımının MME ile Parametre Tahmini

X, Gamma tesadüfi değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x;\boldsymbol{\theta}) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\theta_1)\theta_2^{\theta_1}} x^{\theta_1-1} \cdot e^{-\frac{x}{\theta_2}}, & x > 0,\ \theta_1,\theta_2 \in (0,\infty) \\ 0, & diğer\ yerlerde \end{cases} \tag{7}$$

ile ifade edilir. Gamma dağılımı, iki parametreli sürekli olasılık dağılımlarının bir ailesidir. Üstel dağılım, Erlang dağılımı ve Ki-kare dağılımı, Gamma dağılımının özel durumlarıdır. Bu özel durumlara uygun olarak genellikle iki farklı parametrezasyon kullanılır. Bunlardan ilki; θ_1 şekil ve θ_2 ölçek parametreleriyle ikincisi ise θ_1 şekil ve

$1/\theta_2$ ters ölçek (oran) parametresi ile belirlenir. Gamma dağılımına ait k**.** anakütle momenti aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$E(x^k) = \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\theta_1)\theta_2^{\theta_1}} x^{\theta_1-1} \cdot e^{-\frac{x}{\theta_2}} x^k dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\theta_1)\theta_2^{\theta_1}} \int_0^\infty x^{\theta_1+k-1} \cdot e^{-\frac{x}{\theta_2}} dx$$

$$= \frac{\Gamma(\theta_1+k)\theta_2^{\theta_1+k}}{\Gamma(\theta_1)\theta_2^{\theta_1}} \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\theta_1+k)\theta_2^{\theta_1+k}} x^{\theta_1+k-1} \cdot e^{-\frac{x}{\theta_2}} dx$$

$$= \frac{\Gamma(\theta_1+k)\theta_2^{k}}{\Gamma(\theta_1)} \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\theta_1+k)\theta_2^{\theta_1+k}} x^{\theta_1+k-1} \cdot e^{-\frac{x}{\theta_2}} dx$$

$$= \frac{\Gamma(\theta_1)\theta_1(\theta_1+1)\ldots(\theta_1+k-1)\theta_2^{k}}{\Gamma(\theta_1)} \int_0^\infty f(x;\theta_1+k,\theta_2)\, dx$$

Son eşitlikte, $f(x;\theta_1+k,\theta_2)$ fonksiyonu $f(x;\boldsymbol{\theta})$ olasılık fonksiyonun k birim ötelenmiş hali olduğundan $(0,\infty)$ açık aralığındaki integrali "1" olacaktır. Buna göre,

$$E(x^k) = \theta_1(\theta_1+1)\ldots(\theta_1+k-1)\theta_2^{k}$$

elde edilir. Anakütle momentleri ile, $\boldsymbol{X}$'e ait örnek momentleri eşitlenirse, $k = 1, 2$ için

$$\begin{cases} \theta_1\theta_2 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X} \\ \theta_1^2\theta_2^2 + \theta_1\theta_2^2 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \end{cases}$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin çözümü ile MME tahmin vektörü ise $\widetilde{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{X}) = \left(\frac{n(\bar{X})^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}, \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{n\bar{X}}\right)'$ dir.

III. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde MME ile parametre tahmini yapılan dağılımların farklı tesadüfi değerler ile yapılan tahmin sonuçları R ile hesaplanmıştır. Ayrıca her bir dağılımın performansını değerlendirmek için hata kareler ortalamaları (HKO) hesaplanmıştır. İlk olarak, Binom dağılımının bilinmeyen parametrelerin tahmini için elde edilen sonuçlar Tablo 1'de verilmiştir. Burada Binom dağılımının bilinmeyen parametreleri, θ_1 Binom dağılımı için denemenin tekrar sayısını, θ_2 de deneyin gerçekleşme olasılığını göstermektedir. $\theta_1 = 10, 100, 500$ ve 1000 ve $\theta_2 = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ değerleri için ayrı ayrı $n = 100$ adet Binom dağılımına uyan tesadüfi veriler üretilerek tahmin değerleri elde edilmiştir. Tablo 1'e göre elde edilen tahmin değerleri deneme sayısı ve olasılığına bağlı olmadan gerçek değerlere yakın değerler aldığı görülmektedir.

Tablo 1. Binom dağılımının parametrelerinin moment metodu ile tahmini

$\boldsymbol{\theta_1}$	**10**					**100**				
$\boldsymbol{\theta_2}$	**0.1**	**0.2**	**0.3**	**0.4**	**0.5**	**0.1**	**0.2**	**0.3**	**0.4**	**0.5**
$\tilde{\theta}_1$	6	8	10	10	10	61	85	81	99	84
$\tilde{\theta}_2$	0.160	0.2378	0.3048	0.4071	0.5090	0.1624	0.2356	0.3719	0.4070	0.6012
$HKO(\tilde{\theta}_1)$	0.16	0.04	0	0	0	15.21	2.25	3.61	0.01	2.56
$HKO(\tilde{\theta}_2)$	3.6e-5	1.42884e-5	2.304e-7	5.041e-7	8.1e-7	3.8938e-5	1.2674e-5	5.1696e-5	4.9e-7	1.0241e-4
$\boldsymbol{\theta_1}$	**500**					**1000**				
$\boldsymbol{\theta_2}$	**0.1**	**0.2**	**0.3**	**0.4**	**0.5**	**0.1**	**0.2**	**0.3**	**0.4**	**0.5**
$\tilde{\theta}_1$	295	342	348	465	459	677	685	813	1053	1009
$\tilde{\theta}_2$	0.1703	0.2893	0.4339	0.4315	0.5455	0.1462	0.2924	0.3699	0.3804	0.4969
$HKO(\tilde{\theta}_1)$	420.25	249.64	231.04	12.25	16.81	1043.29	992.25	349.69	28.09	0.81
$HKO(\tilde{\theta}_2)$	4.9421e-5	7.9745e-5	1.7929e-4	9.9225e-6	2.0703e-5	2.1344e-5	8.5378e-5	4.886e-5	3.842e-6	9.61e-8

Poisson dağılımının bilinmeyen parametresinin tahmin değerleri Tablo 2'de verilmiştir ve θ, Poisson dağılımının ortalamasını, n ise gözlem sayısını göstermektedir. $n = 10, 100, 500, 1000$ ve $\theta = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ değerleri için Poisson dağılımına uyan tesadüfi veriler üretilerek Poisson dağılımının parametresinin tahmin değerleri elde edilmiştir. Tablo 2'ye göre n arttıkça tahmin değerlerinde iyileşme olduğu görülmektedir.

Tablo 2. Poisson dağılımının parametrelerinin moment metodu ile tahmini

$\boldsymbol{n}$	**10**					**100**				
$\boldsymbol{\theta}$	**0.1**	**0.2**	**0.3**	**0.4**	**0.5**	**0.1**	**0.2**	**0.3**	**0.4**	**0.5**
$\tilde{\theta}$	0.2	0.3	0.3	0.6	0.6	0.11	0.21	0.34	0.43	0.5
$HKO(\tilde{\theta})$	1e-3	1e-3	0	4e-3	1e-3	1e-6	1e-6	1.6e-5	9e-6	0
$\boldsymbol{n}$	**500**					**1000**				
$\boldsymbol{\theta}$	**0.1**	**0.2**	**0.3**	**0.4**	**0.5**	**0.1**	**0.2**	**0.3**	**0.4**	**0.5**
$\tilde{\theta}$	0.106	0.212	0.344	0.43	0.512	0.107	0.214	0.322	0.411	0.498
$HKO(\tilde{\theta})$	7e-8	2.88e-7	3.872e-6	1.8e-6	2.88e-7	4.9e-8	1.96e-7	4.84e-7	1.21e-7	4e-9

Sürekli Düzgün dağılımın bilinmeyen parametreleri θ_1 dağılımın minimum değerini, θ_2 maksimum değerini n ise gözlem sayısını göstermek üzere parametre tahmin değerleri için elde edilen sonuçlar Tablo 3'de verilmiştir. $n = 10, 100, 500, 1000$, $\theta_1 = 0.1$ ve $\theta_2 = 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ değerleri için öncelikle Sürekli Düzgün dağılıma uyan tesadüfi veriler üretilerek dağılımın bilinmeyen parametrelerinin tahmini MME ile elde edilmiştir. Tablo 3'deki sonuçlar incelendiğinde tahmin değerleri ile gerçek değerlerin yakın olduğu görülmektedir.

Tablo 3. Sürekli düzgün dağılımın parametrelerinin moment metodu ile tahmini

$\boldsymbol{n}$			**10**				**100**	
$\boldsymbol{\theta_1}$			**0.1**				**0.1**	
$\boldsymbol{\theta_2}$	**0.2**	**0.3**	**0.4**	**0.5**	**0.2**	**0.3**	**0.4**	**0.5**
$\tilde{\theta}_1$	0.1038	0.1075	0.1113	0.1150	0.0957	0.0914	0.0872	0.0829
$\tilde{\theta}_2$	0.1941	0.2882	0.3823	0.4764	0.1918	0.2836	0.3753	0.4671
$HKO(\tilde{\theta}_1)$	1.444e-6	5.625e-6	1.2769e-5	2.25e-5	1.849e-7	7.396e-7	1.6384e-6	2.9241e-6
$HKO(\tilde{\theta}_2)$	3.481e-6	1.3924e-5	3.1329e-5	5.5696e-5	6.724e-7	2.6896e-6	6.1009e-6	1.08241e-5
$\boldsymbol{n}$			**500**				**1000**	
$\boldsymbol{\theta_1}$			**0.1**				**0.1**	
$\boldsymbol{\theta_2}$	**0.2**	**0.3**	**0.4**	**0.5**	**0.2**	**0.3**	**0.4**	**0.5**
$\tilde{\theta}_1$	0.1015	0.1030	0.1045	0.1060	0.1003	0.1006	0.1009	0.1013
$\tilde{\theta}_2$	0.1995	0.2991	0.3986	0.4981	0.2011	0.3023	0.4034	0.5046
$HKO(\tilde{\theta}_1)$	4.5e-9	1.8e-8	4.05e-8	7.2e-8	9e-11	3.6e-9	8.1e-10	1.69e-9
$HKO(\tilde{\theta}_2)$	5e-10	8.1e-7	3.92e-9	7.22e-9	1.21e-9	5.29e-7	1.156e-8	2.116e-8

Gamma dağılımının bilinmeyen parametreleri θ_1 şekil parametresini, θ_2 ölçek parametresini ve n de gözlem sayısını göstermek üzere parametre tahmin değerleri için elde edilen sonuçlar Tablo 4'de verilmiştir. $n = 10, 100, 500, 1000$, $\theta_1 = 1, 2, 4$ ve $\theta_2 = 1$ değerlerine karşılık gelen Gamma dağılımına uyan tesadüfi veriler üretilerek dağılımın bilinmeyen parametrelerinin MME ile tahmini elde edilmiştir. Tablo 4'deki sonuçlardan elde edilen tahmin değerlerinin gerçek değerlere yakın sonuçlar verdikleri gözlenmiştir.

Tablo 4. Gamma dağılımının parametrelerinin moment metodu ile tahmini

$\boldsymbol{n}$		**10**			**100**	
$\boldsymbol{\theta_1}$	**1**	2	4	**1**	2	4
$\boldsymbol{\theta_2}$		**1**			**1**	
$\tilde{\theta}_1$	1.7953	2.7615	3.5831	1.1120	2.1794	3.4230
$\tilde{\theta}_2$	0.9242	1.1946	1.4185	0.9209	0.9451	1.1455
$HKO(\tilde{\theta}_1)$	0.06325	0.05799	0.01738	1.25e-4	3.22e-4	3.33e-3
$HKO(\tilde{\theta}_2)$	5.75e-4	3.79e-3	0.01752	6.257e-5	3.018e-5	2.12e-4
$\boldsymbol{n}$		**500**			**1000**	
$\boldsymbol{\theta_1}$	**1**	2	4	**1**	2	4
$\boldsymbol{\theta_2}$		**1**			**1**	
$\tilde{\theta}_1$	1.0236	2.0573	4.4754	1.0112	2.0727	4.1723
$\tilde{\theta}_2$	0.9452	0.9577	0.8759	0.9910	0.9831	0.9604
$HKO(\tilde{\theta}_1)$	1.114e-6	6.57e-6	4.52e-4	1.254e-7	5.29e-6	2.969e-5
$HKO(\tilde{\theta}_2)$	6.006e-6	3.579e-6	3.0802e-5	8.1e-8	2.86e-7	1.568e-6

IV. SONUÇLAR

Parametre tahmincilerinin öncüsü olarak kabul edilen MME yöntemi, hesaplanmasının kolaylığı ve dağılımların çarpıklık ve basıklık gibi karakterizasyonlarının yorumu için sıklıkla tercih edilmektedir. MME ile elde edilen tahminciler için yansızlık çoğu zaman sağlanmaz ama asimptotik olarak yansız olan tahminciler üretir. Genel olarak iki veya daha çok bilinmeyen parametreye sahip dağılımlar için elde edilen MME tahmincileri karmaşık bir yapıya sahiptir. Birkaç dezavantajına rağmen diğer tahmin etme metodları ile elde edilen tahminciler, MME tahmincileri ile karşılaştırıldıktan sonra hangi tahmincinin kullanılacağına karar verilir. Dağılım teorisinin büyük bir bölümünde momentlerin sonlu olması şartı altında çoğu zaman MME ile bir tahminci elde edilebilmesi nedeniyle günümüzde halen güncelliğini korumaktadır.

Bu çalışma ile MME algoritması tanıtılarak, özel dağılımlar için nasıl bulunacağı aşamalı olarak açıklanmıştır. Ayrıca incelenen dağılımların bilinmeyen parametrelerinin MME ile elde edilen tahmincileri R programı ile tesadüfi verilere uygulanarak elde edilmiştir. MME, küçük örneklemler için yanlı değerler vermesine rağmen asimptotik olarak yansız ve tutarlı tahminciler üretir. Her bir dağılım için elde edilen MME değerlerinin

BSEU Journal of Science
https://doi.org/10.35193/bseufbd.1091550

e-ISSN:2458-7575 (https://dergipark.org.tr/tr/pub/bseufbd)

performaslarını değerlendirmek için HKO değerleri hesaplanmıştır. Tablolar incelendiğinde n değeri büyüdükçe HKO değerlerinin sıfıra yaklaştığı görülmektedir.

KAYNAKLAR

[1] Öztürk, F., Akdi, Y., Aydoğdu, H., & Karabulut, İ. (2015). Parametre Tahmini ve Hipotez Testi. Gazi Kitapevi, Ankara, 299.

[2] Accrachi, E. O., Dabye, A. S., & Gounoung, A. A. (2018). On the Parameter Estimation by Method of Moments and Wald Type Test for Poisson Processes. *In A Collection of Papers in Mathematics and Related Sciences*, 1, 57-74). Statistics and Probability African Society.

[3] Bickel, P. J., Chen, A., & Levina, E. (2011). The method of moments and degree distributions for network models. *The Annals of Statistics*, 39(5), 2280-2301.

[4] Bücher, A., & Jennessen, T. (2020). Method of moments estimators for the extremal index of a stationary time series. *Electronic Journal of Statistics*, 14(2), 3103-3156.

[5] Wang, X., & Peng, Z. (2014). Method of moments for estimating uncertainty distributions. *Journal of Uncertainty Analysis and Applications*, 2(1), 1-10.

[6] Wikström, D. (2015). Consistent method of moments estimation of the true fixed effects model. *Economics Letters*, 137, 62-69.

[7] Wang, L., & Hsiao, C. (2011). Method of moments estimation and identifiability of semiparametric nonlinear errors-in-variables models. *Journal of Econometrics*, 165(1), 30-44.

[8] Chen, R., Zhou, H., Yu, L., Jin, C., & Zhang, S. (2021). An efficient method for pricing foreign currency options. *Journal of International Financial Markets, Institutions and Money*, 74, 101295.

[9] Negri, I., & Nishiyama, Y. (2020). Change point detection based on method of moment estimators. *arXiv preprint arXiv:2010.03334*.

[10] Aoki, R., Bolfarine, H., & Singer, J. M. (2002). Asymptotic efficiency of method of moments estimators under null intercept measurement error regression models. *Brazilian Journal of Probability and Statistics*, 157-167.

[11] Carpenter, M., & Mishra, S. N. (2001). Bootstrap Bias Adjusted Estimators of Beta Distribution Parameters. *Calcutta Statistical Association Bulletin*, 51(1-2), 119-124.

[12] Abarin, T., Li, H., Wang, L., & Briollais, L. (2014). On method of moments estimation in linear mixed effects models with measurement error on covariates and response with application to a longitudinal study of gene-environment interaction. *Statistics in Biosciences*, 6(1), 1-18.

[13] Al Hayek, N. (2021). Parameter Estimation for Discrete Laplace Distribution. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 42(2), 368-373.

[14] Lee, R. S. (2019). Improving Standard Moment Estimators of Beta Random Variables. *Academia Economic Papers*, 47(4), 547-570.

[15] Jangphanish, K., & Budsaba, K. (2013). Parameter Estimation for Re-Parametrized Inverse Gaussian Distribution. *Science & Technology Asia*, 43-53.

[16] Dabye, A. S., Gounoung, A. A., & Kutoyants, Y. A. (2018). Method of Moments Estimators and Multi–step MLE for Poisson Processes. *Journal of Contemporary Mathematical Analysis (Armenian Academy of Sciences)*, 53(4), 237-246.

[17] Gu, M., & Abraham, D. A. (1999, September). Parameter estimation for McDaniel's non-Rayleigh reverberation model. In *Oceans' 99. MTS/IEEE. Riding the Crest into the 21st Century. Conference and Exhibition. Conference Proceedings (IEEE Cat. No. 99CH37008)*, 1, 279-283.