Düzce Üniversitesi
Bilim ve Teknoloji Dergisi

Araştırma Makalesi

Durağan Olmayan Bir Kinetik Denklem İçin Bazı Düz ve Ters Problemler

Elif ÖZSOY [a], Fikret GÖLGELEYEN [b,*]

[a] *Matematik ABD, Fen Bilimleri Enstitüsü, Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Zonguldak, TÜRKİYE*
[b] *Matematik Bölümü, Fen Fakültesi, Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Zonguldak, TÜRKİYE*
** Sorumlu yazarın e-posta adresi: f.golgeleyen@beun.edu.tr*
DOI: 10.29130/dubited.1095809

Öz

Bu çalışmada saçılım terimi içeren durağan olmayan bir kinetik denklem için bazı düz ve ters problemler ele alınmıştır. Bu problemlerin çözümlerinin tekliği araştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: *Kinetik denklem, Düz problem, Ters kaynak problemi, Çözümün tekliği*

Some Direct and Inverse Problems for a Non-Stationary Kinetic Equation

Abstract

In this study, some direct and inverse problems for a non-stationary kinetic equation which includes a scattering term are considered. Uniqueness of solutions of these problems is investigated.

Keywords: *Kinetic equation, Direct problem, Inverse source problem, Uniqueness of solution*

Geliş: 30/03/2022, Düzeltme: 03/09/2022, Kabul: 04/09/2022

I. GİRİŞ

Kinetik denklemler, birinci mertebeden kısmi türevli denklemler olup gaz dinamiği ve plazma fiziğinden, biyoloji ve sosyoekonomiğe kadar birçok alanda karşımıza çıkmaktadır, [1-3]. Bu denklemler doğadaki çok parçacıklı sistemlerin zamansal evriminin istatistiksel bir modeli olarak kullanılmaktadır. Örneğin, sosyal bilimlerde bir etnik sistemin nitel ve nicel olarak matematik modelinin oluşturulması büyük önem taşımaktadır. Burada söz konusu model etnik kinetik denklemdir:

$$\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial H}{\partial p_j}*\frac{\partial W}{\partial x_j}-\frac{\partial H}{\partial x_j}*\frac{\partial W}{\partial p_j}\right]+\sigma*W=0. \tag{1}$$

(1) denkleminde $W(x,p,t,y)$ fonksiyonu, fiziksel (t,y) ve sosyal (x,p) değişkeninin faz uzayındaki bireylerin dağılımını, $H(x,p,y)$ biyokimyasal enerjiyi, x bireyin potansiyel imkanını, p bir işi yapmadaki isteğini, t zaman değişkenini, y uzay değişkenini, $*$ işareti ise (t,y) değişkenlerine göre konvolisyonu göstermektedir, [3].

Diğer taraftan tomografinin matematiksel temeli olarak kabul edilen integral geometri problemlerinin önemli bir kısmı kinetik denklemler için çeşitli ters problemlere indirgenebilmektedir, [4]. Bilgisayarlı tomografinin çalışma prensibi kısaca şöyle ifade edilebilir: incelenen nesne farklı açılardan radyasyona maruz bırakılır ve gözlem noktasında radyasyon parametreleri ölçülür. Elde edilen sonuçlar bilgisayarda işlenerek nesnenin nicel fiziksel parametrelerinin uzaysal dağılımı hesaplanır. Bilgisayarlı tomografinin matematiksel modelinin temel denklemi:

$$\int_{\mathfrak{M}(r)}\mu(x)d\sigma=J(r) \tag{2}$$

şeklinde verilir. Burada $\mathfrak{M}(r)$ radyasyon kaynağı ile gözlem noktasını bağlayan ışını, $\mu(x)$ ise ele alınan nesnenin karakterini ifade etmektedir. İntegral geometri problemi, (2) integrali verildiğinde $\mu(x)$ fonksiyonunun bulunması olarak ifade edilmektedir. Bu problem uygun türev alma işlemleri ve geodezik denklem yardımıyla bir kinetik denkleme dönüştürülebilir, [4-7]. Bu konudaki ilk çalışmalar Radon [8] ve John [9] tarafından yapılmıştır.

Bu makalede bir

$$Q=\{(x,v,t): x\in D\subset\mathbb{R}^n, v\in G\subset\mathbb{R}^n, t\in(0,T)\ \}$$

bölgesinde

$$lu\equiv u_t+<\nabla_v H,\nabla_x u>-<\nabla_x H,\nabla_v u> \tag{3}$$

olmak üzere

$$lu + \int_G K(x, v, v', t)u(x, v', t)dv' = F(x, v, t) \tag{4}$$

kinetik denklemi ele alınmaktadır. (4) denkleminde $u(x, v, t)$ fonksiyonu (x, v, t) noktasının komşuluğundaki faz uzayında birim hacimdeki parçacıkların sayısını göstermektedir. Ayrıca $H(x, v)$ Hamilton fonksiyonu, $K(x, v, v', t)$ saçılım çekirdeği ve onu içeren integralli terim de saçılım terimi olarak adlandırılır. Bu terim, ilgilenilen fiziksel modeldeki parçacıkların birbiriyle veya ortamla etkileşimi sonucu ortaya çıkan saçılım olaylarını ifade eder. Burada $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sembolü $\mathbb{R}^n$ de skalar çarpım için kullanılmaktadır.

Kinetik denklemler için düz problem, bir büyüklüğün verilen başlangıç ve sınır koşullarına göre bir t anındaki dağılım fonksiyonunun bulunması olarak ifade edilir. Ters problem ise verilen bir ek bilgiden, dağılım fonksiyonuna ilaveten denklemdeki bazı fonksiyonların da eş zamanlı olarak belirlenmesini içerir. Kinetik denklemler için çeşitli ters problemlerin çözülebilirliği [3-5, 10] da, sayısal çözümleri ise [10-13] de çalışılmıştır. Hiperbolik, parabolik ve eliptik denklemler için değişik tipte ters problemler [14-16] tarafından ele alınmıştır.

Bu çalışmada (4) denklemi için iki düz problem, yani Problem 1 ve Problem 2, ve bir de ters problem ele alınacaktır. Bu problemlerin çözümlerinin tekliği için gerekli şartlar araştırılacaktır. Makale boyunca ∂Q, Q bölgesinin sınırını, $\bar{n}$ vektörü ise ∂Q nun birim dış normal vektörünü ifade etmektedir ve $\bar{n} = (n_x, n_v, n_t), n_x = \left(n_{x_1}, \dots, n_{x_n}\right), n_v = (n_{v_1}, \dots, n_{v_n})$ olarak tanımlıdır. Kolaylık açısından $(x, v) \equiv p \in \Omega = D \times G$ gösterimi kullanılmış olup Ω sınırlı bir bölge ve $\partial\Omega \in C^1$ olarak kabul edilmektedir. Ayrıca

$$\Gamma = \partial\Omega \times (0, \mathrm{T}),$$

$$\Gamma_- = \{(p, t) \in \Gamma : \langle\nabla_v H, n_x\rangle - \langle\nabla_x H, n_v\rangle < 0\}$$

gösterimleri kullanılmıştır.

II. KİNETİK DENKLEM İÇİN BAZI DÜZ PROBLEMLER

Problem 1

(4) denkleminin Q bölgesinde tanımlı ve

$$u = \varphi_1(p, t), (p, t) \in \Gamma_-, \tag{5}$$

$$u(p, 0) = \varphi_2(p) \tag{6}$$

koşullarını sağlayan bir $u(p, t)$ çözümünün bulunması problemini ele alalım.

Teorem 1

$H \in C^2(\overline{\Omega})$ ve $K \in C(\bar{Q})$ olmak üzere Problem 1'in $C^1(Q)$ sınıfında en çok bir çözümü vardır.

İspat:

Kabul edelim ki $F = \varphi_1 = \varphi_2 = 0$ olsun. İlk olarak $z = uexp(-\lambda t)$ şeklinde yeni bir bilinmeyen fonksiyon tanımlayalım. Burada $C = \max_{(p,t)\in\bar{Q}}\{K^2\}$ olmak üzere λ sayısı

$$\lambda > \frac{CmesG + 1}{2} \tag{7}$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda z fonksiyonu

$$(lz)e^{\lambda t} + \lambda z e^{\lambda t} + \left(\int_G Kzdv'\right)e^{\lambda t} = 0, \tag{8}$$

$$z = 0, (p,t) \in \Gamma_-, \tag{9}$$

$$z(p,0) = 0 \tag{10}$$

bağıntılarını sağlar. (8) denklemi $2z$ ile çarpılırsa

$$(z^2)_t + \sum_{i=1}^{n} H_{v_i}(z^2)_{x_i} - \sum_{i=1}^{n} H_{x_i}(z^2)_{v_i} + 2\lambda z^2 + 2z\int_G Kzdv' = 0 \tag{11}$$

elde edilir. Bu eşitliğin Q bölgesi üzerinde integrali alınır ve (9)-(10) şartları kullanılırsa

$$\int_Q 2\lambda z^2\, dQ + \int_Q 2z\int_G Kzdv'\, dQ \le 0 \tag{12}$$

bulunur. Bu eşitsizliğin solundaki ikinci terim için $2ab \le a^2 + b^2$ ve Cauchy-Schwartz eşitsizlikleri yardımıyla aşağıdaki değerlendirme yapılabilir:

$$\int_Q 2z\int_G Kzdv'\, dQ \le \int_Q \left(z^2 + \left(\int_G Kzdv'\right)^2\right)dQ \le \int_Q \left(z^2 + C\int_G z^2dv'\right)dQ. \tag{13}$$

Diğer taraftan

$$\int_Q \int_G z^2(x,v')dv'\,dQ = \int_0^T \int_D \int_G z^2 dv' \int_G dvdxdt$$

$$= mesG \int_0^T \int_D \int_G z^2 dv'\,dxdt = mesG \int_Q z^2 dQ$$

olduğundan (13) eşitsizliği

$$\int_Q 2z \int_G Kzdv'\,dQ \leq \int_Q z^2 dQ + CmesG \int_Q z^2 dQ \tag{14}$$

olarak yazılabilir. Bu durumda (12) bağıntısı

$$\int_Q (2\lambda - 1 - CmesG) z^2\,dQ \leq 0 \tag{15}$$

halini alır. Son olarak (7) eşitsizliğinden $z = 0$ elde edilir ve böylece $u = 0$ olup ispat tamamlanır.

Problem 2

(4) denkleminin Q bölgesinde tanımlı ve (5) sınır şartı ile

$$u_t(p,0) = \varphi_3(p), \tag{16}$$

başlangıç şartını sağlayan bir $u(p,t)$ çözümünün bulunması problemini ele alalım.

Teorem 2

Kabul edelim ki $H \in C^2(\overline{\Omega})$, $K \in C(\overline{\Omega})$ olsun. Ayrıca K fonksiyonu t değişkeninden bağımsız ve Ω bölgesinde $H_{v_1} > 0$ olsun. Bu durumda Problem 2, $C^2(Q)$ uzayında en çok bir çözüme sahiptir.

İspat: İlk olarak $F = \varphi_1 = \varphi_3 = 0$ olsun. Eğer (4) denkleminin ve (5) şartının t ye göre türevini alırsak, $z = u_t$ olmak üzere

$$lz + \int_G K(p,v')z(x,v',t)dv' = 0, \tag{17}$$

$$z = 0, (p,t) \in \Gamma_-, \tag{18}$$

$$z(p,0) = 0 \tag{19}$$

bağıntıları sağlanır. O halde Teorem 1 kullanılarak Q bölgesinde $z = u_t = 0$ olduğu görülür. Diğer bir ifade ile (4) denklemi durağan denkleme, Problem 1 ise homojen bir probleme indirgenmiş olur. Daha açık olarak

$$< \nabla_v H, \nabla_x u > - < \nabla_x H, \nabla_v u > + \int_G K(p,v')u(x,v')dv' = 0, \tag{20}$$

$$u = 0, \qquad p \in \Gamma_- \tag{21}$$

yazılabilir. Şimdi $\tilde{z} = u exp(-\lambda x_1)$ şekinde yeni bilinmeyen fonksiyon tanımlayalım. Burada $C = \max_{(x,v)\in\bar{\Omega}}\{K^2\}$ olmak üzere $\lambda > \frac{1+CmesG}{2H_{v_1}}$ eşitsizliği sağlanmaktadır. Bu durumda

$$< \nabla_v H, \nabla_x \tilde{z} > + H_{v_1}\tilde{z}\lambda - < \nabla_x H, \nabla_v \tilde{z} > + \int_G K(p,v')\tilde{z}(x,v')dv' = 0, \tag{22}$$

$$\tilde{z} = 0, \; p \in \Gamma_-, \tag{23}$$

elde edilir. (22) denklemini $2\tilde{z}$ ile çarparsak

$$< \nabla_v H, \nabla_x(\tilde{z}^2) > + H_{v_1} 2\tilde{z}^2\lambda - < \nabla_x H, \nabla_v(\tilde{z}^2) > + 2\tilde{z}\int_G K(p,v')\tilde{z}(x,v')dv' = 0 \tag{24}$$

bulunur. Bu eşitliğin Ω bölgesi üzerinde integrali alınırsa

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \left(\left(H_{v_i}\tilde{z}^2\right)_{x_i} - H_{v_i x_i}\tilde{z}^2\right)dp - \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \left(\left(H_{x_i}\tilde{z}^2\right)_{v_i} - H_{x_i v_i}\tilde{z}^2\right)dp \\ + 2\int_\Omega H_{v_1}\tilde{z}^2\lambda\, dp + 2\int_\Omega \tilde{z}\int_G K\tilde{z}dv'\, dp = 0\end{aligned} \tag{25}$$

yazılabilir. Son eşitlikte Gauss-Green formülü kullanılırsa

$$\int_{\Omega} (H_{v_i}\tilde{z}^2)_{x_i}\, dp = \int_{\partial\Omega} H_{v_i}\tilde{z}^2\, n_{x_i} dS, \tag{26}$$

$$\int_{\Omega} \left(H_{x_i}\tilde{z}^2\right)_{v_i} dp = \int_{\partial\Omega} H_{x_i}\tilde{z}^2\, n_{v_i} dS, \tag{27}$$

olacağından

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega} \left(H_{v_i}\tilde{z}^2\right)_{x_i} dp - \sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega} \left(H_{x_i}\tilde{z}^2\right)_{v_i} dp = \int_{\partial\Omega} \tilde{z}^2(\langle\nabla_v H, n_x\rangle - \langle\nabla_x H, n_v\rangle)\, dS \tag{28}$$

yazılabilir. Burada (23) şartı dikkate alındığında

$$2\int_{\Omega} H_{v_1}\tilde{z}^2\lambda\, d\Omega + 2\int_{\Omega} \tilde{z}\int_{G} K\tilde{z}dv'\, d\Omega \leq 0 \tag{29}$$

ve (14) değerlendirmesinden

$$\int_{\Omega} (2\lambda H_{v_1} - 1 - CmesG)\tilde{z}^2\, d\Omega \leq 0 \tag{30}$$

olur ki buradan da $\tilde{z} = 0$ ve sonuç olarak $u = 0$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

III. KİNETİK DENKLEM İÇİN BİR TERS PROBLEM

Bu bölümde, $g(p,t)$ bilinen bir fonksiyon olmak üzere aşağıdaki ters problem incelenecektir.

Problem 3

(4) denkleminde $F(p,t) = g(p,t)\mu(p)$ olarak verilsin. Bu durumda (4) denkleminin (5) ve (16) koşullarını sağlayan bir (u,μ) fonksiyonlar çiftinin

$$u(p,T) = \varphi_4(p) \tag{31}$$

ek bilgisi yardımıyla bulunması problemini ele alalım.

Bu çalışmada Problem 3 ün çözümünün tekliği araştırılacaktır.

Teorem 3

Kabul edelim ki $H(x,v) \in C^1(\bar{\Omega})$, $\bar{Q}$ bölgesinde $H_{v_1} > 0$ ve $g \neq 0$ olsun. Bu durumda Problem 3, en çok bir $(u,\mu) \in C^2(\bar{Q}) \times C^1(\bar{\Omega})$ çözümüne sahiptir.

İspat: İlk olarak $\varphi_1 = \varphi_3 = \varphi_4 = 0$ alalım. Daha sonra $u = gz$ bağıntısı yardımıyla yeni bir bilinmeyen fonksiyon tanımlayalım. Bu durumda z fonksiyonu aşağıdaki denklemi sağlar:

$$lz + g^{-1}lgz + \int_G K(p,v',t)z(x,v',t)dv' = \mu(p). \tag{32}$$

(32) denkleminin t ye göre türevi alınırsa, $a = g^{-1}lg$ olmak üzere

$$\frac{\partial}{\partial t}(lz) = -(az_t + a_t z) - \int_G K_t z dv' - \int_G K z_t dv' \tag{33}$$

elde edilir. Şimdi $\lambda > 1$ olmak üzere $w = ze^{-\lambda x_1}$ ve $s > max\left(\frac{g_t}{g}\right)^2$ olmak üzere $\psi = -s(t+1)$ şeklinde iki yeni fonksiyon tanımlayalım. O halde

$$z = we^{\lambda x_1}, z_t = w_t e^{\lambda x_1}, z_{x_1} = w_{x_1}e^{\lambda x_1} + \lambda we^{\lambda x_1},$$

$$z_{x_i} = w_{x_i}e^{\lambda x_1}\ (i > 1), z_{v_i} = w_{v_i}e^{\lambda x_1}$$

bağıntıları yardımıyla

$$\frac{\partial}{\partial t}(lw) + \lambda H_{v_1}w_t + \psi w = \big((\psi - a_t)z - az_t\big)e^{-\lambda x_1} - \int_G K_t ze^{-\lambda x_1}dv' - \int_G Kz_t e^{-\lambda x_1}dv' \tag{34}$$

denklemi bulunur. Son eşitliğin her iki tarafının karesi alınır, sol taraftaki $(\frac{\partial}{\partial t}(lw) + \psi w)^2$ pozitif terimi ihmal edilirse

$$\lambda^2 H_{v_1}^2 w_t^2 + 2\lambda H_{v_1} w_t \left(\frac{\partial}{\partial t}(lw) + \psi w\right)$$
$$\leq 4\left((\psi - a_t)^2 z^2 + a^2 z_t^2 + \left(\int_G K_t z dv'\right)^2 + \left(\int_G K z_t dv'\right)^2\right) e^{-2\lambda x_1} \tag{35}$$

eşitsizliği elde edilir. Diğer yandan

$$2\lambda H_{v_1} w_t \left(\frac{\partial}{\partial t}(lw) + \psi w\right) = \lambda H_{v_1}(w_t^2)_t + \lambda H_{v_1} \sum_{i=1}^{n} H_{v_i}(w_t^2)_{x_i} + \lambda H_{v_1} \sum_{i=1}^{n} H_{x_i}(w_t^2)_{v_i} + \lambda H_{v_1} \psi (w^2)_t$$

$$= \lambda H_{v_1}(w_t^2 + \psi w^2)_t - \lambda H_{v_1} \psi_t w^2 + \lambda \sum_{i=1}^{n} \left(\left(H_{v_i} H_{v_1} w_t^2\right)_{x_i} + \left(H_{x_i} H_{v_1} w_t^2\right)_{v_i} \right)$$
$$- \lambda w_t^2 \sum_{i=1}^{n} \left(\left(H_{v_i} H_{v_1}\right)_{x_i} + \left(H_{x_i} H_{v_1}\right)_{v_i} \right) \tag{36}$$

eşitliği yazılabilir. O halde (36) eşitliği de göz önünde bulundurularak (35) eşitsizliğinin sol tarafında tekrar z fonksiyonuna geçilir ve integralli terimler için Cauchy-Schwartz eşitsizliği kullanılırsa:

$$\lambda H_{v_1}(z_t^2 + \psi z^2)_t e^{-2\lambda x_1} + \left(\lambda^2 H_{v_1}^2 - \lambda \sum_{i=1}^{n} \left(\left(H_{v_i} H_{v_1}\right)_{x_i} + \left(H_{x_i} H_{v_1}\right)_{v_i} \right) - 4a^2 \right) z_t^2 e^{-2\lambda x_1}$$
$$+\lambda \sum_{i=1}^{n} \left(\left(H_{v_i} H_{v_1} z_t^2 e^{-2\lambda x_1}\right)_{x_i} + \left(H_{x_i} H_{v_1} z_t^2 e^{-2\lambda x_1}\right)_{v_i} \right) - \left(\lambda H_{v_1} \psi_t + 4(\psi - a_t)^2\right) z^2 e^{-2\lambda x_1}$$
$$-4M\left(\int_G z^2 dv' + \int_G z_t^2 dv'\right) e^{-2\lambda x_1} \leq 0 \tag{37}$$

olduğu görülür. Burada $M = \max\limits_{(p,t)\in\overline{Q}} \{K^2, K_t^2\}$ olarak tanımlıdır. Ayrıca $u = gz$ olduğundan

$$z_t^2 + \psi z^2 = g^{-2}(u_t^2 - 2uu_t g^{-1} g_t + (\psi + g^{-2} g_t^2) u^2) \tag{38}$$

yazılabilir. O halde (37) eşitsizliğinin Q bölgesi üzerinde integrali alınır ve (16), (31) şartları kullanılırsa

$$(z_t^2 + \psi z^2)|_{t=0} = g^{-2}(\psi + g^{-2} g_t^2) u^2 \leq 0, \tag{39}$$

$$(z_t^2 + \psi z^2)|_{t=T} = g^{-2} u_t^2 \geq 0 \tag{40}$$

eşitsizlikleri bulunur. Ayrıca Γ_- sınır parçası üzerinde $z_t = 0$ olması dikkate alınarak

$$\int_Q \left(\lambda^2 H_{v_1}^2 - \lambda \sum_{i=1}^{n} \left(\left(H_{v_i} H_{v_1}\right)_{x_i} + \left(H_{x_i} H_{v_1}\right)_{v_i} \right) - 4a^2 - 4MmesG \right) z_t^2 e^{-2\lambda x_1} dQ$$

$$- \int_Q \left(\lambda H_{v_1} \psi_t + 4(\psi - a_t)^2 - 4MmesG\right) z^2 e^{-2\lambda x_1}\, dQ \leq 0 \tag{41}$$

elde edilir. Burada $\psi = -s$ olduğu göz önünde bulundurulursa

$$\lambda_1 = \max_{(p,t)\in\bar{Q}} \frac{1}{H_{v_1}^2} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\left| \left(H_{v_i} H_{v_1}\right)_{x_i} \right| + \left| \left(H_{x_i} H_{v_1}\right)_{v_i} \right| \right) + 4a^2 + 4MmesG \right),$$

$$\lambda_2 = \max_{(p,t)\in\bar{Q}} \frac{1 + 4(\psi - a_t)^2 + 4MmesG}{H_{v_1} s} > \max_{(p,t)\in\bar{Q}} \frac{1 - 4(\psi - a_t)^2 + 4MmesG}{-H_{v_1} \psi_t}$$

olmak üzere $\lambda > max\{\lambda_1, \lambda_2\}$ seçimi yapılarak

$$\int_Q z^2 e^{-2\lambda x_1}\, dQ \leq 0 \tag{42}$$

bulunur. O halde Q bölgesinde $z = 0$ ve buna bağlı olarak $u = 0$ olduğu görülür. Son olarak (32) eşitliğinden $\mu = 0$ elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

IV. SONUÇ

Bu makalede matematiksel fiziğin önemli denklemlerinden olan ve kuantum mekaniğinden sosyolojiye kadar geniş bir sahada uygulamaları bulunan kinetik denklemler ele alınmıştır. Durağan olmayan formda alınan yani zamana bağlı bir dağılımın ve saçılımın modellendiği bu denklemler için bazı düz ve ters problemlerin çözümlerinin tekliği, Hamilton fonksiyonu ve saçılım çekirdeği ile ilgili verilen bazı koşullar altında ispatlanmıştır.

V. KAYNAKLAR

[1] R. L. Liboff, "*Kinetic Theory: Classical, Quantum, and Relativistic Descriptions*," Springer-Verlag, New York, Inc., 2003.

[2] C. Cercignani and E. Gabetta (eds.), "*Transport Phenomena and Kinetic Theory. Applications to Gases, Semiconductors, Photons, and Biological Systems*," Modeling and Simulation in Science, Engineering and Technology," Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2007.

[3] Yu. E. Anikonov, "*Inverse Problems for Kinetic and other Evolution Equations,*" De Gruyter, 2001.

[4] A. Kh. Amirov, “*Integral Geometry and Inverse Problems for Kinetic Equations*,” VSP, Utrecht The Netherlands, 2001.

[5] A. Kh. Amirov, “Uniqueness of the solution of an inverse problem for kinetic equation,” *Sibirsk. Mat. Zh.*, vol. 28, no. 5, pp. 3-5, 1987.

[6] M. M. Lavrentiev, V. G. Romanov and S. P. Shishatskii, “*Ill-Posed Problems of Mathematical Physics and Analysis*,” American Mathematical Society, Providence, 1986.

[7] V. G. Romanov, “*Integral Geometry and Inverse Problems for Hyperbolic Equations*,” Springer-Verlag, Berlin, 1974.

[8] J. Radon, “Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integral-werte längs gewisser Mannigfaltigkeiten,” *Berichte Sächsische Akademie der Wissenschaften, Leipzig, Math Nat kl.* vol. 69, pp. 262–277, 1917.

[9] F. John, “Bestimmung einer Funktion aus ihren Integralen über gewisse Mannigfaltigkeiten,” *Mathematische Annalen,* vol. 109, no. 1, pp. 488-520, 1934.

[10] F. Gölgeleyen and A. Amirov, “On the approximate solution of a coefficient inverse problem for the kinetic equation,” *Mathematical Communications,* vol. 16, no. 1, pp. 283-298, 2011.

[11] M. Yidiz, I. Gölgeleyen and B. Heydarov, “Approximate solution of an inverse problem for a non-stationary general kinetic equation,” *CMES-Computer Modeling in Engineering and Sciences*, vol. 62, no. 3, pp. 255-264, 2010.

[12] A. Amirov, Z. Ustaoğlu and B. Heydarov, “Solvability of a two dimensional coefficient inverse problem for transport equation and numerical method,” *Transport Theory and Statistical Physics,* vol. 40, no. 1, pp. 1-22, 2011.

[13] İ. Gölgeleyen and N. Albuz, “Saçılım terimi içeren durağan kinetik denklem için bir ters problemin yaklaşık çözümünün araştırılması,” *Karaelmas Fen ve Mühendislik Dergisi*, vol. 10, no. 1, pp. 113-120, 2020.

[14] M. V. Klibanov and A. A. Timonov, “*Carleman Estimates for Coefficient Inverse Problems and Numerical Applications,*” VSP, Utrecht, 2004.

[15] M. Bellassoued and M. Yamamoto, “*Carleman Estimates and Applications to Inverse Problems for Hyperbolic Systems*,” Springer-Japan, Tokyo, 2017.

[16] V. Isakov, “*Inverse Problems for Partial Differential Equations,*” Springer, vol. 127, New York, 1998.