Erciyes University Journal of the Institute of Science and Technology
Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi
ISSN 1012-2354
Cilt (Volume): 31 , Sayı (Issue): 2, Mayıs/May -2015
http://fbe.erciyes.edu.tr/

Quasilineer uzaylarda alt ve üst yarı baz kavramları

*** Sümeyye ÇAKAN [1], Yılmaz YILMAZ [2]**

[1,2] İnönü Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 44280, Malatya, Türkiye.

Anahtar Kelimeler: Quasilineer uzay, alt (üst) quasilineer kombinasyon, alt (üst) geren, alt (üst) quasilineer bağımlılık-bağımsızlık, alt (üst) baz, alt (üst) boyut.

ÖZET

S. M. Aseev lineer uzayların daha genel bir formu olan quasilineer uzay kavramını tanımladı, [1]. Quasilineer uzaylar teorisindeki temel bir eksiklik, lineer bağımlılık-bağımsızlık ve baz kavramlarının yokluğudur. Belki de bu, quasilineer uzaylar teorisinin gelişiminin önündeki en büyük engeldir. Bu çalışmada, bu önemli kavramların elde ettiğimiz yeni tanımlarını sunacağız. Verdiğimiz tanımların, lineer uzaylara ilişkin benzeri sonuçlarla tutarlılık içinde verildiğini de göstereceğiz. Araştırmalarımız bu kavramların direkt olarak quasilineer uzaylardaki sıralama bağıntısına bağlı olduğunu ve bu konjonktür için, lineer bağımlılık-bağımsızlık tanımını alt ve üst quasilineer bağımlılık-bağımsızlık gibi iki parçada sunmamız gerektiğini göstermektedir. Bu nedenle çalışmanın son bölümünde, öncelikle bir quasilineer uzayda sonlu bir $\{x_k\}_{k=1}^{n}$ kümesinin alt ve üst quasilineer kombinasyonu ve alt ve üst quasilineer bağımsızlığı, daha sonra aynı kümenin alt ve üst gereni tanıtılmıştır. Bu temeller üzerine bir quasilineer uzayda alt ve üst yarı baz kavramları ve uzayın alt ve üst boyutu kavramları verilmiştir.

Lower and upper semi basis in quasilinear spaces

Key Words: Quasilinear spaces, lower (upper) quasilinear combination, lower (upper) span, lower (upper) quasilinear dependence-independence, lower (upper) semi basis, lower (upper) dimension.

ABSTRACT

Aseev introduced the notion of quasilinear spaces as a generalization of linear spaces, [1]. The fundamental deficiency in the theory of quasilinear spaces is the lack of a satisfactory definition of linear dependence-indepence and basis. Perhaps this is the most important obstacle on the improvement of theory of quasilinear spaces. In this study, we will present the definitions of these important concepts. Also we show that these new definitions are given consistent with counterparts of similar results in linear spaces. Our investigations show that these notions directly depend on the order relation on the quasilinear space and have to split into two ways as lower and upper quasilinear independence. Thus, firstly we introduce lower-upper quasilinear combination and lower-upper quasilinear independence of a finite set $\{x_k\}_{k=1}^{n}$ in a quasilinear space X. Finally we give lower and upper span of $\{x_k\}_{k=1}^{n}$. These concepts lead us to introduce the notions of lower-upper dimension and lower-upper semi base of a quasilinear space.

*Sorumlu Yazar (Corresponding author) e-posta: sumeyye.tay@inonu.edu.tr, sumeyye.tay@gmail.com

1. Giriş

Klasik analizde lineer uzay kavramı önemli bir yer tutmaktadır. Özellikle fonksiyonel analiz sahasında yer alan normlu uzaylar, Banach uzayları ve Hilbert uzaylar temel olarak lineer uzay kavramı üzerine inşa edilmiştir. Bu uzayların kendilerine has bir takım özellikleri sayesinde, klasik tek değerli fonksiyonlarla oluşturulan diferansiyel denklemler birçok bilimsel problemin modellenmesinde etkili araçlar olmuşlardır. Ancak bazı özel doğa problemlerinin tek değerli fonksiyonların ürettiği diferansiyel denklemler ile modellenemediği görülmüştür. Bu sorunu aşmak için yapılan araştırmalar, küme değerli fonksiyonlarla elde edilen küme diferansiyel denklemleri ortaya çıkarmıştır. [2] numaralı kaynak, bu tip denklemleri inceleyen önemli bir çalışmadır.

Tek değerli fonksiyonlarla elde edilen diferansiyel denklemlerin çözüm kümelerinin analizi ile denklemlerin modellediği fenomenleri açıklamada önemli mesafeler kat edilmiş olmasına rağmen, küme diferansiyel denklemler için benzer analizleri yapmak oldukça zordur ve henüz ciddi anlamda ilerletilememiştir. Bunun temel sebebi küme diferansiyel denklemleri meydana getiren fonksiyon uzaylarının lineer uzay yapısına sahip olmayışı ve klasik teorideki analiz araçlarının muadillerinin henüz geliştirilmemiş olmasıdır. Örneğin, bir E reel normlu lineer uzayının tüm boştan farklı kapalı-sınırlı, konveks alt kümelerinin ailesi olan $K_C(E)$ sınıfı Minkowski toplama ve skalerle çarpma işlemleriyle bir lineer uzay teşkil etmez, ancak quasilineer uzay yapısına sahiptir. Bu durum ℝ'nin bir $I=[a,b]$ kapalı aralığından $K_C(E)$'ye giden tüm sürekli fonksiyonların uzayı $C(I,K_C(E))$ için de geçerlidir. Bahsedilen bu eksiklik, klasik analizdeki tekniklerin küme diferansiyel denklemler için kullanılmasına engel olmaktadır. Bu ise, bu teknikleri quasilineer uzaylarda da geliştirme ihtiyacını doğurmaktadır.

Bu çalışmada ağırlıklı olarak, yukarıda adı geçen lineer yapıda olmayan uzayların ait olabildiği uzay tiplerinden quasilineer uzay kavramı, Aseev'in [1] numaralı çalışmasından yararlanılarak ele alınacaktır. Literatürde farklı quasilineer uzay tanımları yer almaktadır. Bunlardan biri Markow tarafından verilmiştir, ([3], [4]). Fakat Aseev'in yaklaşımı, verdiği sıralama ilişkisinin de avantajlarından dolayı, klasik teorideki benzer ve onlarla tutarlı bir analiz takip etmek için diğer yaklaşımlara nazaran daha avantajlıdır.

Aseev'in verdiği quasilineer uzay tanımının diğer tanımlardan belki de en önemli farkı, tanımda kullanılan kısmi sıralama bağıntısıdır. Zira, Aseev quasilineer uzaylarda norm tanımı yaparken kısmi sıralama bağıntısını da kullanmış, bu sayede klasik fonksiyonel analizin oldukça önemli bazı teoremlerinin tutarlı karşılıklarını quasilineer uzaylar teorisinde de verebilmiştir.

Yukarıda bahsedilen lineer uzay teşkil etmeyen küme ailelerinin en önemlilerinden ikisi $\mathbb{R}^n$'in boştan farklı tüm kapalı-sınırlı (kompakt) alt kümelerinin sınıfı $K(\mathbb{R}^n)$ ve $\mathbb{R}^n$'in boştan farklı, kapalı-sınırlı (kompakt) ve konveks alt kümelerinin sınıfı olan ve $K_C(\mathbb{R}^n)$ 'dir. Zira, bir takım doğa problemlerini modelleyen küme diferansiyel denklemlerin oluşmasında $C(I,K_C(\mathbb{R}^n))$ uzayı önemli rol oynamaktadır. Bu yüzden, $K(\mathbb{R}^n)$ve $K_C(\mathbb{R}^n)$ sınıflarındaki quasilineer yapıyı daha iyi analiz etmek adına bu çalışmada [2] numaralı kaynaktan yararlanılacaktır.

"*Topolojik Quasilinear Spaces*" ve "*Quasilinear Inner Product Spaces and Hilbert Quasilinear Spaces*" başlıklı makaleler ise, quasilineer uzaylar teorisinde yapılan son çalışmalar arasında yer almaktadır, ([5], [6]).

Üç bölümden oluşan bu çalışmanın birinci bölümünde konuyla ilgili birtakım genel bilgilere yer verilmiş, quasilineer uzaylarlar tanıtılmış ve daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel kavramlar ve önemli bazı sonuçlar ele alınmıştır.

Quasilineer uzaylar teorisindeki temel bir eksiklik, lineer bağımlılık-bağımsızlık ve baz kavramlarının yokluğudur. Belki de bu, quasilineer uzaylar teorisinin gelişiminin önündeki en büyük engeldir. Araştırmalarımız bu kavramların direkt olarak quasilineer uzaydaki sıralama bağıntısına bağlı olduğunu ve bu konjonktür için, lineer bağımlılık-bağımsızlık tanımlarını alt ve üst quasilineer bağımlılık-bağımsızlık gibi iki parçada sunmamız gerektiğini göstermektedir. Bu nedenle çalışmanın ikinci bölümünde bir quasilineer uzayda sonlu bir $\{x_k\}_{k=1}^n$ kümesinin alt ve üst quasilineer kombinasyonu ve alt ve üst quasilineer bağımsızlığı, daha sonra aynı kümenin alt ve üst gereni tanıtılmıştır. Üçüncü ve son bölümde, ikinci bölümdeki temeller üzerine bir quasilineer uzayda alt ve üst yarı baz ile uzayın alt ve üst boyutu kavramları verilmiştir.

2. Temel kavramlar

Bu bölümde, en önemli küme değerli fonksiyon uzaylarını inşa etmeye olanak sağlayan $\mathbb{R}^n$'in kapalı-sınırlı (kompakt) ve konveks alt kümeleri ve bu kümelerin birtakım özellikleri ele alınacak, sonrasında quasilineer uzay tanımı verilecektir.

2.1 $\mathbb{R}^n$ 'in kapalı-sınırlı (kompakt) ve kapalı-sınırlı (kompakt), konveks alt kümelerinin ailesi

Küme değerli fonksiyonların en önemli uygulama alanı bu fonksiyonlarla oluşturulan küme diferansiyel denklemlerdir. Küme diferansiyel denklemleri içeren problemlerin çözümünde, ℝ'nin bir I kapalı aralığından $\mathbb{R}^n$ 'in kapalı-sınırlı (kompakt) ve konveks alt kümelerinin ailesine tanımlı ve sürekli fonksiyonların uzayı çok önemli yer tutmaktadır, [2]. Bundan dolayı $\mathbb{R}^n$ 'nin boştan farklı kapalı-sınırlı (kompakt) ve konveks alt kümelerinden ve bu kümelerin ailesinin oluşturduğu uzaylardan bahsetmek yararlı olacaktır.

$\mathbb{R}^n$ 'nin boştan farklı kapalı-sınırlı (kompakt) alt kümelerinin ailesini $K(\mathbb{R}^n)$, boştan farklı, kapalı-sınırlı (kompakt) ve konveks alt kümelerinin sınıfını ise $K_C(\mathbb{R}^n)$ ile göstereceğiz.

Tanım 2.1 *[2] A ve B kümeleri* $\mathbb{R}^n$ *'nin boştan farklı herhangi iki alt kümesi ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olsun. Bu kümeler arasında* ***Minkowski toplamı*** *ve* ***skalerle çarpma*** *işlemleri sırasıyla,*

$$A+B=\{a+b:a\in A,b\in B\}$$
$$\lambda A=\{\lambda a:a\in A\}$$
şekilde tanımlanır.

Önerme 2.1 *[2] $K(\mathbb{R}^n)$ ve $K_C(\mathbb{R}^n)$ küme aileleleri yukarıda tanımlanan işlemlere göre kapalıdr. Ayrıca her $\forall A,B,C\in K_C(\mathbb{R}^n)$ ve $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ için,*
$A+\theta=\theta+A=A$ olacak şekilde $\theta=\{0\}$ birim elemanı vardır,
$$A+(B+C)=(A+B)+C,$$
$$A+B=B+A,$$
$$A+B=A+C\Rightarrow B=C,$$
$$1A=A,$$
$$\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B,$$
$$(\lambda+\mu)A\subseteq\lambda A+\mu A$$
olur.

Uyarı 2.1 *[2] Genel olarak $K_C(\mathbb{R}^n)$' nin bir A elemanı için $A+(-1)A\neq\theta$ eşitsizliği doğrudur. Bunu aşağıdaki örnek üzerinde görebiliriz.*

Örnek 2.1 *$A=[-1,3]\in K_C(\mathbb{R})$ olsun.*
$$(-1)A=[-3,1]$$
olur. Buradan,
$$A+(-1)A=[-1,3]+[-3,1]=[-4,4]$$
elde edilir. Görüldüğü gibi $A+(-1)A=[-4,4]\neq\theta$ 'dır.
Yukarıdaki örnekten anlaşılacağı üzere $K_C(\mathbb{R})$ 'nin bir elemanının -1 katının kendisiyle toplamı birim eleman olan $\theta=\{0\}$ 'ı vermek zorunda değildir. Bu ise $K_C(\mathbb{R}^n)$ ve $K(\mathbb{R}^n)$ küme ailelerinin lineer uzay yapısına sahip olamayacaklarını gösterir. İşte bu kümeler ailesi, lineer uzay kavramının kapsamlı genelleştirmesi olan quasilineer uzay yapısına uymaktadırlar.

2.2 Quasilineer uzaylar

Aseev 1986 yılında klasik lineer uzayların bir genelleştirmesi olan quasilineer uzay kavramını ortaya atmıştır, [1]. Aseev'in yaklaşımı klasik lineer cebire geniş bir bakış açısı getirmiş, böylelikle bir tür quasilineer cebir teorisi başlatmıştır. Markow bu tip sınıfların cebirsel ve topolojik incelemesinde yine quasilineer uzay adını verdiği bir uzay çeşidi ile çalışmıştır, ([3],[4]). Ancak Markow'un verdiği tanıma göre Aseev'in verdiği tanım, söz konusu sınıfların incelemesinde daha avantajlı bir yapıya sahiptir.

Bu bölümde göreceğiz ki Aseev'in verdiği tanım bir kısmi sıralama bağıntısına dayanmaktadır. Bu sıralama vasıtasıyla quasilineer uzaylar üzerinde norm kavramı tanımlanmakta ve bağıntının özel olarak "$=$" bağıntısı olması durumunda quasilineer uzay, lineer uzay olmaktadır. Ayrıca verilen norm tanımı da bilinen norm tanımı ile çakışmaktadır. Bu ise tek değerli fonksiyonların analizinde bilinen fonksiyonel analiz prensiplerinin bazılarının benzerlerinin, tutarlı bir şekilde kümelerin ve küme değerli fonksiyonların quasilineer uzayları için de verilebileceği anlamına gelmektedir.

Tanım 2.2 *[1] $\forall x,y,z,u\in X$ ve $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ için, üzerinde aşağıdaki şartları sağlayan bir "$\leq$" kısmi sıralama bağıntısı, bir cebirsel toplama işlemi ve bir reel skalerle çarpma işlemi tanımlanan X kümesine* ***quasilineer uzay*** *denir:*

$$x\leq x \tag{1}$$
$$x\leq y,\ y\leq z\Rightarrow x\leq z \tag{2}$$
$$x\leq y,\ y\leq x\Rightarrow x=y \tag{3}$$
$$x+y=y+x \tag{4}$$
$$x+(y+z)=(x+y)+z \tag{5}$$
$$x+\theta=x \text{ olacak şekilde } \theta=\{0\}\in X \text{ vardır} \tag{6}$$
$$\alpha\cdot(\beta\cdot x)=(\alpha\cdot\beta)\cdot x \tag{7}$$
$$\alpha\cdot(x+y)=\alpha\cdot x+\alpha\cdot y \tag{8}$$
$$1\cdot x=x \tag{9}$$
$$0\cdot x=\theta \tag{10}$$
$$(\alpha+\beta)\cdot x\leq\alpha\cdot x+\beta\cdot x \tag{11}$$
$$x\leq y,\ z\leq u\Rightarrow x+z\leq y+u \tag{12}$$
$$x\leq y\Rightarrow\alpha\cdot x\leq\alpha\cdot y. \tag{13}$$

Uyarı 2.2 *[1] Bir lineer uzay*
$$x\leq y\Leftrightarrow x=y$$
kısmi sıralama bağıntısı ile bir quasilineer uzaydır.

Örnek 2.2 *[1] En popüler lineer olmayan quasilineer uzay örneği reel sayıların tüm kapalı aralıklarının ailesidir. Bu aile, kümeler arasındaki "$\subseteq$" kapsama bağıntısı,*
$$A+B=\{a+b:a\in A,b\in B\}$$
Minkowski toplamı ve
$$\lambda A=\{\lambda a:a\in A,\lambda\in\}$$
reel-skaler ile çarpma işlemiyle bir quasilineer uzay yapısı teşkil eder ve $K_C(\mathbb{R})$ ile gösterilir. Diğer bir örnek ise reel sayıların tüm kapalı-sınırlı altkümelerinin ailesi olan $K(\mathbb{R})$'dir. Genel olarak E herhangi bir lineer uzay olmak üzere, $K(E)$, E'nin boştan farklı tüm kapalı ve sınırlı alt kümelerinin ailesini, $K_C(E)$ ise E'nin boştan farklı tüm kapalı, sınırlı ve konveks alt kümelerinin ailesini simgeler. Her iki aile de kümelerde "$\subseteq$" kapsama bağıntısı, toplama işleminde yapılan
$$A+B=\overline{\{a+b:a\in A,b\in B\}}$$
şeklindeki küçük bir iyileştirme ile cebirsel toplama işlemi ve yukarıda verilmiş olan reel-skaler ile çarpma işlemi ile quasilineer uzaydır.

2.2.1 Quasilineer uzaylarda bazı temel sonuçlar

Lemma 2.1 *[1] Bir X quasilineer uzayında θ eleman minimaldir. Yani,*
$$x\leq\theta\Rightarrow x=\theta$$
olur.

Tanım 2.3 *[1] Bir X quasilineer uzayında $x+x'=\theta$ olacak şekilde bir $x'\in X$ var ise x' elemanına x 'in* ***tersi*** *denir.*
Bir elemanın tersi mevcut ise bu tektir.

Lemma 2.2 *[1] Bir X quasilineer uzayının her x elemanının bir x' tersi mevcut olsun. Bu durumda X üzerindeki kısmi sıralama eşitlik ile belirlenir. Dağılma özellikleri sağlanır ve sonuç olarak X bir lineer uzaydır.*

Sonuç 2.1 *[1] Bir reel lineer uzayda "$=$" eşitlik bağıntısı (1)-(13) şartlarını sağlayacak şekildeki tek kısmi sıralama bağıntısıdır.*

Uyarı 2.3 *[1] Her reel lineer uzay bir quasilineer uzaydır. Ancak bunun karşıtı her zaman doğru değildir.*

Tanım 2.4 *[5] Bir x elemanının tersi mevcut ise x'e* ***regüler****, aksi taktirde* ***singüler****dir denir. X 'in tüm regüler ve singüler elemanlarının kümesi sırası ile X_r ve X_s ile gösterilir.*

Tanım 2.5 *[5] X bir quasilineer uzay olsun. $Y \subseteq X$ verilsin. Eğer Y kümesi de X üzerindeki aynı işlemler ve ayn kısmi sıralama bağıntısı ile bir quasilineer uzay teşkil ediyorsa, Y 'ye X* ***'in bir altuzayı (alt quasilineer uzayı)*** *denir.*

Teorem 2.1 *[5] X bir quasilineer uzay ve $Y \subseteq X$ olsun. Bu durumda Y altuzaydır $\Leftrightarrow$ $\forall\, x, y \in Y$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için $\alpha x + \beta y \in Y$ dir.*

Örnek 2.3 *E bir reel normlu lineer uzay olsun. Bu durumda $K_C(E)$, $K(E)$'nin bir altuzayıdır.*

X bir quasilineer uzay ve Y de X 'in bir altuzayı olsun. Her $x \in Y$ elemanının bir $x' \in Y$ tersinin olduğunu kabul edelim. Bu durumda Lemma 2.2'den Y 'deki kısmi sıralama bağıntısı eşitlik ile belirlenir dağılma şartları sağlanır ve Y, X 'in bir lineer altuzayı olur.

Tanım 2.6 *[5] X bir quasilineer uzay olsun. $x \in X$ olmak üzere, eğer*

$$-x = x$$

ise x'e **simetrik eleman** denir ve X 'in tüm simetrik elemanlarının kümesi X_d ile gösterilir. (Burada $-x = (-1)x$ olarak düşünülmektedir.)

Teorem 2.2 *[5] X_r, X_d ve $X_s \cup \{0\}$ cümleleri X 'in altuzaylarıdırlar.*

X_r, X_d ve $X_s \cup \{0\}$ uzaylarına sırasıyla X 'in **regüler, simetrik** ve **singüler altuzayları** denir.

Uyarı 2.4 *X_r, X 'in lineer altuzayı iken, $X_s \cup \{0\}$ lineer olmayan altuzayıdır.*

Örnek 2.4 *$X = K_C(\mathbb{R})$ alalım*

$$Z = \{0\} \cup \{[a,b] : a, b \in \mathbb{R} \text{ ve } a \neq b\}$$

kümesi verilsin. Bu durumda Z, X 'in singüler altuzayıdır. Öte yandan, $\{\{a\} : a \in \mathbb{R}\}$ tek nokta kümelerinin oluşturduğu aile X_r 'yi teşkil eder ve X 'in bir lineer altuzayıdır. Aslında herhangi bir E normlu lineer uzay için, E, $K_C(E)$ ve $K(E)$'nin regüler altuzayı olarak düşünülebilir.

Önerme 2.2 *[5] Bir X quasilineer uzayında her regüler eleman minimaldir.*

Örnek 2.5 *Önceki örnekteki $K_C(\mathbb{R})$'nin Z altuzayını tekrar düşünelim. $\{0\}$, Z 'nin tek minimal elemanıdır. Z 'de bundan başka minimal eleman yoktur.*

3. Quasilineer Bağımsızlık ve Germe Kavramları

Tanım 3.1 *X bir quasilineer uzay olsun. Bir $\{x_k\}_{k=1}^n \subset X$ alt kümesi verilsin. Bazı $\{a_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{R}$ sabitleri için $x \leq \sum_{k=1}^n a_k x_k$ oluyorsa $x \in X$ 'e, $\{x_k\}_{k=1}^n$ elemanlarının bir* ***alt quasilineer kombinasyonu*** *(kısaca,* ***lql-birleşimi****) denir.*

Yine, bazı $\{a_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{R}$ sabitleri için

$\sum_{k=1}^n a_k x_k \leq x$ oluyorsa $x \in X$ 'e, $\{x_k\}_{k=1}^n$ elemanlarının bir ***üst quasilineer kombinasyonu*** *(kısaca,* ***uql-birleşimi****) denir.*

Burada, bazı $\{a_k\}_{k=1}^n$ reel sayıları için $\sum_{k=1}^n a_k x_k$ 'nin, $\{x_k\}_{k=1}^n$ 'nin hem lql hem de uql-birleşimi olduğuna dikkat edilmelidir. Ayrıca $\sum_{k=1}^n a_k x_k$ bu özelliğe sahip tek elemandır.

Örneğin, $\{[0,1]\}$ kümesi $K_C(\mathbb{R})$'de bir tek nokta kümesidir ve $\mathbb{R}$'deki her $\{a\}$ tek nokta kümesi $\{[0,1]\}$'in bir lql-birleşimidir. Gerçekten de, $\{a\} \subseteq \lambda[0,1]$ olacak şekilde uygun $\lambda \in \mathbb{R}$ vardır ($\lambda = 2a$ alınabilir).

Öte yandan, $\{a\}$, $\{[0,1]\}$'in bir uql-birleşimi olamaz. Çünkü her $\lambda \in \mathbb{R}$ için, $\lambda[0,1] \not\subset \{a\}$ yazılır.

Bununla birlikte, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ için $\lambda[0,1]$, $\{[0,1]\}$'in hem lql hem de uql-birleşimidir.

Tanım 3.2 *$\{x_k\}_{k=1}^n$ 'nin tüm lql-birleşimlerinin (uql-birleşimlerinin) ailesine $\{x_k\}_{k=1}^n$ 'nin* ***alt (üst) gereni*** *denir ve $Lspan\{x_k\}_{k=1}^n$ ($Uspan\{x_k\}_{k=1}^n$) ile gösterilir.*

Uyarı 3.1 *Bir lineer uzay ya da bir quasilineer uzayın lineer bir altuzayında kısmi sıralama bağıntısı eşitlik ile belirleneceğinden alt (üst) quasilineer kombinasyon ve alt (üst) germe kavramları çakışır ve tanımlar "lineer kombinasyon" ve "germe" olarak verilir.*

Önerme 3.1 *X bir quasilineer uzay ve $\{x_k\}_{k=1}^n$ X 'de bir cümle olsun. Bu durumda $Uspan\{x_k\}_{k=1}^n$ X 'in bir altuzayıdır.*

İspat. $x, y \in Uspan\{x_k\}_{k=1}^n$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ alalım. Bu durumda bazı $\{a_k\}_{k=1}^n$, $\{b_k\}_{k=1}^n$ için

$$\sum_{k=1}^n a_k x_k \leq x \text{ ve } \sum_{k=1}^n b_k x_k \leq y$$

yazılır. Quasilineer uzay aksiyomlarından (11)-(13) kullanılırsa

$$\sum_{k=1}^n (a_k + \lambda b_k) x_k \leq \sum_{k=1}^n a_k x_k + \lambda \sum_{k=1}^n b_k x_k \leq x + \lambda y$$

elde edilir. Buna göre $x + \lambda y \in Uspan\{x_k\}_{k=1}^n$ olur.

O halde $Uspan\{x_k\}_{k=1}^n$ X 'in bir altuzayıdır.

Uyarı 3.2 *X bir quasilineer uzay ve $\{x_k\}_{k=1}^n$ X 'de bir cümle olsun. $Lspan\{x_k\}_{k=1}^n$ bir altuzay olmayabilir. Örneğin, $X = K_C(\mathbb{R})$ ve $x = [0,1]$ alalım.*

$$Lspan\{x\} = \{[a,b] : [a,b] \subseteq \lambda[0,1], bazı\ \lambda \in \mathbb{R}\}$$

'dir. $x \in Lspan\ \{x\}$ olmasına rağmen, $x - x \notin Lspan\ \{x\}$ olmaktadır. Zira

$$x - x = x + (-1)x = [-1,1] \subseteq \lambda[0,1]$$

olacak şekilde hiçbir λ reel sayısı yoktur. Bu $x - x \notin Lspan\ \{x\}$ anlamına gelir. Buna göre $Lspan\ \{x\}$ $K_C(\mathbb{R})$'nin altuzayı değildir.

Tanım 3.3 *X bir quasilineer uzay olsun. $S \subset X$ alalım. Eğer $X = LspanS$ ($X = UspanS$) ise X, S tarafından **alttan (üstten) gerilir** denir.*

Örnek 3.1 *$K_C(\mathbb{R})$ uzayı $\{[-1,1]\}$ tarafından alttan, $\{\{1\}\}$ tarafından üstten gerilir. Gerçekten de her $A \in K_C(\mathbb{R})$ elemanı ve uygun bir $\lambda \in \mathbb{R}$ katsayısı için*

$$A \subseteq \lambda[-1,1]$$

olduğundan $A \in Lspan([-1,1])$ *olup,*

$$K_C(\mathbb{R}) = Lspan([-1,1])$$

'dir. Dolayısıyla $\{[-1,1]\}$, $K_C(\mathbb{R})$ 'yi alttan gerer. Ayrıca

$$\lambda\{1\} \subseteq A$$

olduğundan $A \in Uspan(\{1\})$ olup,

$$K_C(\mathbb{R}) = Uspan(\{1\})$$

'dir. Dolayısıyla $\{\{1\}\}$, $K_C(\mathbb{R})$ 'yi üstten gerer.

Sonuç 3.1 *$K_C(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\{[-a,a]\}$ tarafından alttan, $\{\{a\}\}$ tarafından üstten gerilir.*

Tanım 3.4 *X bir quasilineer uzay ve $\{x_k\}_{k=1}^n \subset X$ olsun. $1 \leq i \leq n$ olmak üzere en az bir x_i elemanı diğer elemanların bir lql (uql)-birleşimi ise $\{x_k\}_{k=1}^n$ kümesine **alt (üst) quasilineer bağımlı**, aksi halde **alt (üst) quasilineer bağımsız** denir. Kısaca lql (uql)-bağımlı (-bağımsız) olarak yazılır.*

X 'in herhangi bir A alt kümesinin her sonlu alt kümesi lql (uql)-bağımsız ise A 'ya lql (uql)-bağımsız denir.

Uyarı 3.3 *Bir lineer uzay ya da bir quasilineer uzayın lineer bir altuzayında kısmi sıralama bağıntısı eşitlik ile belirleneceğinden, lql ve uql (-bağımlılık) –bağımsızlık kavramları çakışır ve sadece lineer (bağımlılık) bağımsızlık olarak verilir.*

Örnek 3.2 *Bir quasilineer uzayda herhangi bir tek nokta kümesinin oluşturduğu küme lql ve uql-bağımsızdır.*

Örnek 3.3 *$K_C(\mathbb{R}^2)$ 'de*

$$v_1 = \{(x,y) : y = 0, 0 \leq x \leq 1\}$$
$$v_2 = \{(x,y) : x = 0, 0 \leq y \leq 1\}$$

olmak üzere, $\{v_1, v_2\}$ kümesi lql bağımsızdır. Gerçekten de

$$v_1 \subseteq \lambda v_2 \text{ ve } v_2 \subseteq \beta v_1$$

olacak ekilde λ, β skalerleri bulunamaz. Ancak bu küme uql-bağımlıdır. Çünkü örneğin $\lambda = 0$ veya $\beta = 0$ olmak üzere

$$\lambda v_1 \subseteq v_2 \text{ veya } \beta v_2 \subseteq v_1$$

yazılabilir.

Örnek 3.4 *$K_C(\mathbb{R}^2)$ 'de*

$$w_1 = \{(x,y) : y = 0, 1 \leq x \leq 2\}$$
$$w_2 = \{(x,y) : x = 0, 1 \leq y \leq 2\}$$

olmak üzere, $\{w_1, w_2\}$ kümesi hem lql hem de uql-bağımsızdır. Ancak,

$$w_3 = \{(x,y) : x = y, 1 \leq y \leq 2\}$$

olarak tanımlanırsa, $\{w_1, w_2, w_3\}$ kümesi lql-bağımlıdır, çünkü $w_3 \subseteq w_1 + w_2$ kapsaması vardır. Fakat bu küme uql-bağımsızdır.

Örnek 3.5

$$u_\lambda = \{(x,y) : y = \lambda x, 1 \leq x \leq 2, \lambda \in \mathbb{R}^+\}$$

olsun. Sayılamaz $\{u_\lambda : \lambda > 0\}$ kümesi $K_C(\mathbb{R}^2)$ 'de uql-bağımsızdır.

Ayrıca belirtelim ki, bu küme $K_C(\mathbb{R}^2)$ 'yi üstten geremez.

Teorem 3.1 *$K_C(\mathbb{R})$ 'de herhangi iki elemanlı küme hem lql-bağımlı hem de uql-bağımlı olmak zorundadır.*

İspat. $\{u_1, u_2\} \subseteq K_C(\mathbb{R})$ olsun. Bu durumda $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ olmak üzere $u_1 = [a,b]$, $u_2 = [c,d]$ olarak yazılabilir. Burada $a = b$ ve $c = d$ durumları mümkündür ve iki muhtemel durum vardır:

1. Durum: u_1 ya da u_2 'nin simetrik bir $[-t,t]$ aralığını içeriyor olması durumu:
Sözgelimi u_1'in $[-t,t]$ simetrik aralığını (elemanını) içerdiğini kabul edelim. Bu durumda,

$$[c,d]\subseteq\alpha[-t,t]\subseteq\alpha[a,b]$$

ve dolayısıyla

$$\frac{1}{\alpha}[c,d]\subseteq[-t,t]\subseteq[a,b]$$

olacak şekilde 0'dan farklı $\alpha\in\mathbb{R}$ vardır.
u_2'nin bir simetrik aralık içermesi durumu için de benzer bir bağıntı yazılabilir. Bu bağıntılar $\{u_1,u_2\}$'nin hem lql hem de uql-bağımlı olduğu anlamına gelir.

2. Durum: u_1 ve u_2 'den ikisinin de simetrik bir aralık içermemesi durumu:
Bu durumda a ile b ve c ile d aynı işaretlidir. Dört muhtemel durum vardır:

1. $a,b,c,d>0$ olsun.

(i) $ad\geq bc$ ise;

$$[a,b]\subseteq\frac{a}{c}[c,d] \text{ ve } \frac{c}{a}[a,b]\subseteq[c,d]$$

bağıntıları yazılabilir.

(ii) $ad<bc$ ise;

$$[c,d]\subseteq\frac{c}{a}[a,b] \text{ ve } \frac{a}{c}[c,d]\subseteq[a,b]$$

olur. Böylece $\{u_1,u_2\}$ hem lql hem de uql-bağımlıdır.

2. $a,b,c,d<0$ olsun.

(i) $ad\geq bc$ ise;

$$[c,d]\subseteq\frac{c}{a}[a,b] \text{ ve } \frac{a}{c}[c,d]\subseteq[a,b]$$

yazılır.

(ii) $ad<bc$ ise;

$$[a,b]\subseteq\frac{a}{c}[c,d] \text{ ve } \frac{c}{a}[a,b]\subseteq[c,d]$$

olur. Böylece $\{u_1,u_2\}$ yine hem lql hem de uql-bağımlıdır.

3. $a,b<0$ ve $c,d>0$ olsun.

(i) $ac\geq bd$ ise;

$$[a,b]\subseteq\frac{a}{d}[c,d] \text{ ve } \frac{d}{a}[a,b]\subseteq[c,d]$$

bulunur.

(ii) $ac<bd$ ise;

$$[c,d]\subseteq\frac{c}{b}[a,b] \text{ ve } \frac{b}{c}[c,d]\subseteq[a,b]$$

yazılabilir. Böylece $\{u_1,u_2\}$ hem lql hem de uql-bağımlıdır.
(3. duruma denk bir durum daha vardır: $a,b>0$ ve $c,d<0$ olması durumu. 3. Durumla aynı olduğundan bu durum ispata tekrar dahil edilmemiştir.)

Böylece tüm olası durumlar ele alınarak $K_C(\mathbb{R})$'de herhangi iki elemanlı kümenin hem lql hem de uql-bağımlı olduğu gösterilmiş olur.

4. Quasilineer uzaylarda alt ve üst yarı baz kavramları

Tanım 4.1 *X bir quasilineer uzay olsun. X 'i alttan (üstten) geren lql (uql)-bağımsız bir $B\subset X$ kümesine, X 'in bir **alt (üst) yarı bazı** denir.*

Böylece tanım gereğince, bir $\{x_k\}_{k=1}^{n}\subset X$ alt yarı bazına sahip bir sonlu alt boyutlu X quasilineer uzayında, her x elemanı, $\{a_k\}_{k=1}^{n}\subseteq\mathbb{R}$ olmak üzere,

$$x\leq\sum_{k=1}^{n}a_kx_k$$

şeklinde bir temsile sahiptir. Bu temsile x **'in üst yarı temsili** denir.
Yine, sonlu üst boyutlu bir X quasilineer uzayı bir $\{x_k\}_{k=1}^{n}\subset X$ üst yarı bazına sahip ise, $\{b_k\}_{k=1}^{n}\subset\mathbb{R}$ olmak üzere her x elemanı

$$\sum_{k=1}^{n}b_kx_k\leq x$$

şeklinde bir temsile sahiptir. Bu temsile x **'in alt yarı temsili** denir.
Lineer olmayan bir quasilineer uzayda bu temsiller tek değildir.

Örnek 4.1 *Örnek 3.1, $\{[-1,1]\}$ ve $\{\{1\}\}$ kümelerinin $K_C(\mathbb{R})$ için sırasıyla alt yarı baz ve üst yarı baz olduğunu söyler.*
Böylece, her $x=[a,b]\in K_C(\mathbb{R})$,

$$x\subseteq\lambda.[-1,1],\ \lambda=\max\{|a|,|b|\}$$

üst yarı temsiline sahiptir. Ayrıca x elemanı $\beta>\lambda$ olmak üzere

$$x\subseteq\beta.[-1,1]$$

temsiline de sahiptir.
Yine $x=[a,b]\in K_C(\mathbb{R})$ için,

$$a.\{1\}\subseteq x \text{ ve } b.\{1\}\subseteq x \text{ ve yine } \frac{a+b}{2}.\{1\}\subseteq x$$

x 'in farklı alt yarı temsilleridir.

Örnek 4.2 *$\{[0,1]\}$, $K_C(\mathbb{R})$ için ne alt yarı baz ne de üst yarı bazdır.*

Örnek 4.3

$$v_1=\{(x,y):y=0,-1\leq x\leq1\}$$
$$v_2=\{(x,y):x=0,-1\leq y\leq1\}$$

alalım. $\{v_1,v_2\}$, $K_C(\mathbb{R}^2)$ için bir alt yarı bazdır. Çünkü bu küme lql-bağımsızdır. Gerçekten de, her $\lambda,\beta\in\mathbb{R}$ için,

$$v_1\not\subset\lambda v_2 \text{ ve } v_2\not\subset\beta v_1$$

dir. Ayrıca $\{v_1,v_2\}$, $K_C(\mathbb{R}^2)$ 'yi alttan gerer. Çünkü, $\lambda,\beta\in\mathbb{R}$ olmak üzere her $A\in K_C(\mathbb{R}^2)$ için

$$A\subseteq\lambda v_1+\beta v_2$$

olur. Böylece $A\in Lspan(\{v_1,v_2\})$ 'dir.

Öte yandan,

$$v_3 = \{(x,y): x^2 + y^2 \le 1\}$$

olarak tanımlanmak üzere, $\{v_3\}$ *kümesi* $K_C(\mathbb{R}^2)$ *'yi alttan gerer ve* $\{v_3\}$ *lql-bağımsızdır. Böylece* $\{v_3\}$ *kümesi de* $K_C(\mathbb{R}^2)$ *için bir alt yarı bazdır.*

Bu beklenmedik durum lineer olmayan quasilineer uzaylarda görülebilir. Bu durum Uyarı 4.1 'de ele alınacaktır.

Örnek 4.4 $\{(1,0),(0,1)\}$ *kümesinin* $\mathbb{R}^2$ *lineer uzayı için bir baz olduğunu hatırlayalım. Şimdi*

$$z_1 = \{(1,0)\},\quad z_2 = \{(0,1)\}$$

olmak üzere $\{z_1, z_2\}$ *kümesi* $K_C(\mathbb{R}^2)$ *için bir üst yarı bazdır. Çünkü*

$$\{\{(1,0)\},\{(0,1)\}\}$$

kümesi uql- bağımsızdır. Gerçekten de, her $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$ *için*

$$\lambda\{(1,0)\} \not\subset \{(0,1)\}$$

ve

$$\beta\{(0,1)\} \not\subset \{(1,0)\}$$

olur. Ayrıca bu küme uzayı üstten gerer. Çünkü her $A \in K_C(\mathbb{R}^2)$ *için*

$$\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 \subseteq A$$

olacak şekilde $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ *vardır. Böylece*

$$A \in Uspan\{z_1, z_2\}$$

'dir.

Sonuç 4.1 *$K_C(\mathbb{R}^2)$ için herhangi bir üst yarı baz, $\mathbb{R}^2$ 'nin tek nokta kümelerinden oluşturulmak zorundadır.*

Teorem 4.1 *Her quasilineer uzay bir alt yarı baza ve bir üst yarı baza sahiptir.*

İspat. X bir quasilineer uzay olmak üzere; L, X 'in tüm lql-bağımsız alt kümelerinin bir ailesi ve U, X 'in tüm uql-bağımsız alt kümelerinin bir ailesi olsun. Bu aileleri "$\subseteq$" kısmi sıralama bağıntısı ile düşünelim ve C_L ve C_U sırasıyla L ve U 'da herhangi zincirler olsun.

$$H_L = \bigcup_{A \in C_L} A$$

ve

$$H_U = \bigcup_{B \in C_U} B$$

olarak tanımlayalım.

H_L 'nin C_L zinciri için bir üst sınır ve H_U 'nun C_U zinciri için bir üst sınır olduğunu iddia ediyoruz. Öncelikle H_L 'nin X 'in lql-bağımsız bir alt kümesi ve H_U 'nun X 'in uql-bağımsız bir alt kümesi olduğunu görelim.

İlk olarak $H_L \in L$ olduğunu gösterelim. Bunun için, H_L 'nin lql-bağımlı olduğunu kabul edelim. Bu durumda H_L 'nin lql-bağımlı bir $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ alt kümesini bulabiliriz. Burada $k = 1,2,...,n$ olmak üzere $v_k \in H_L$ dir. H_L 'nin tanım gereğince, her $k = 1,2,...,n$ için, $v_k \in A_k$ olmak üzere bir $A_k \in C_L$ vardır. C_L bir zincir olduğundan, $k = 1,2,...,n$ olmak üzere $A_k \subset A_{k_0}$ olacak şekilde bir $k_0 = \{1,2,...,n\}$ vardır. Böylece, $\{v_1, v_2, ..., v_n\} \subseteq A_{k_0}$ olur. A_{k_0} lql-bağımsız olduğundan, bu, $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ kümesinin lql-bağımlı olması ile çelişir. Bu çelişki, H_L 'nin lql-bağımsız olduğunu gösterir ve böylece $H_L \in L$ dir.

H_L 'nin C_L için bir üst sınır olduğu açıktır. Çünkü H_L C_L 'nin tüm elemanlarının birleşimi olarak tanımlanmış olup; H_L, C_L için bir üst sınır olduğundan Zorn lemması gereğince, L'nin bir maksimal B_L eleman vardır. Geriye sadece $LspanB_L = X$ olduğunu göstermek kalır.

$v_0 \in X \setminus B_L$ alalım. Bu durumda $B_L \cup \{v_0\}$ lql-bağımsız değildir. Gerçekten de, B_L, L'nin maximal elemanı olduğundan, B_L 'ye bir v_0 elemanı daha eklenirse lql-bağımlı olacaktır. Böylece,

$$v_0 \le \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n$$

olacak şekilde $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \ne (0,0,...,0)$ olmak üzere $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ skalerleri ve belirli $v_1, v_2, ..., v_n \in B_L$ elemanları vardır. Böylece $v_0 \in LspanB_L$ olur. Bu ise X 'in B_L tarafından alttan gerildiği anlamına gelir. Özetle, yukarıdaki şekilde oluşturulan H_L, L'nin C_L zinciri için bir üst sınır olup, bu; Zorn lemması gereğince, L'nin enaz bir B_L gibi maximal elemana sahip olduğunu söyler ve B_L, X 'i alttan gerer. Ayrıca B_L lql-bağımsızdır. Dolayısıyla B_L kümesi, X için bir alt yarı bazdır.

Benzer şekilde B_U Zorn lemması gereğince garanti edilen U'nun maksimal elemanı olmak üzere, $H_U \in U$ ve $UspanB_U = X$ olduğu da gösterilebilir.

Tanım 4.2 *Bir X quasilineer uzayını alttan (üstten) geren maksimum sayıdaki lql (uql)-bağımsız eleman sayısına X 'in* ***alt (üst) boyutu*** *denir ve $\underline{boy}(\overline{boy})X$ ile gösterilir. Bu sayı sonlu ise X 'e* ***sonlu-alt (üst) boyutludur****, aksi taktirde* ***sonsuz-alt (üst) boyutludur*** *denir.*

Örnek 4.5 *X lineer bir uzay olmak üzere*

$$\overline{boy}X = \underline{boy}X = boyX$$

olduğu tanımdan aşikardır.

Örnek 4.6 $K_C(\mathbb{R})$ *'nin 1-alt ve 1-üst boyutlu bir quasilineer uzaydır.*

Uyarı 4.1 *Bir X quasilineer uzayının alt (üst) boyutu tanımını onun herhangi bir alt (üst) yarı bazının eleman sayısı olarak veremeyeceğimize dikkat edelim. Bu, X 'i alttan (üstten) geren maksimum sayıdaki lql (uql)-bağımsız eleman sayısından daha az sayıda lql (uql)-bağımsız elemanın (Örnek 4.3 'de görüldüğü gibi) X 'i alttan (üstten) gerebileceğinden kaynaklanır. Böyle bir durum lineer uzaylarda gerçekleşmez. Bir lineer uzayda lql ve uql bağımsızlıklar çakışır ve X 'in içerdiği maksimum sayıdaki lineer bağımsız eleman X 'i gerebilir. Fakat, bu sayıdan daha az sayıdaki lineer bağımsız eleman uzayı geremez.*
Aşağıdaki önerme klasik lineer cebirdeki benzerinin açık bir genellemesidir.

Önerme 4.1 *Bir X quasilineer uzayın herhangi bir altuzayının alt (üst) boyutu X 'in alt (üst) boyutundan küçük yada ona eşit olmak zorundadır.*

Sonuç 4.2 *Bir X quasilineer uzayın altboyutu X 'in X_r regüler altuzayının boyutundan büyük yada ona eşittir.*
Gerçekten de X_r, X 'in lineer alt uzayı olup yukarıdaki önerme ve Örnek 3.5 gereğince

$$boyX_r \leq \underline{boy}X$$

sonucuna ulaşılır.

Önerme 4.2 *Bir X quasilineer uzayın üstboyutu X 'in X_r regüler altuzayının boyutuna eşittir.*

İspat. $\overline{boy}X = n$ olsun. O halde $X = Uspan\{x_k\}_{k=1}^n$ olacak şekilde bir uql-bağımsız $\{x_k\}_{k=1}^n \subset X$ ailesi vardır. Keyfi $x \in X_r$ için,

$$x \in X_r \subseteq X = Uspan\{x_k\}_{k=1}^n$$

olduğundan

$$\sum_{k=1}^n a_k x_k \leq x$$

olacak şekilde $\{a_k\}_{k=1}^n \subseteq \mathbb{R}$ vardır. Her regüler eleman minimal olduğundan

$$\sum_{k=1}^n a_k x_k = x \tag{14}$$

'dir.
X_r, X 'in lineer alt uzayı olup Uyarı 3.3 gereğince $\{x_k\}_{k=1}^n$, X_r 'de lineer bağımsızdır ve X_r 'yi gerer. Bunun yanısıra (14) eşitliği de sağlandığından $\{x_k\}_{k=1}^n$ X_r için bir bazdır. X_r lineer alt uzay olduğundan $boyX_r = n$ olur.

Örnek 4.7 *Yukarıdaki önermenin bir sonucu olarak, herhangi bir normlu lineer E uzayı için,*

$$\overline{boy}K(E) = \overline{boy}K_C(E) = boyE$$

'dir.

Uyarı 4.2 *Bir quasilineer uzayda, uzayın alt boyutunun üst boyutundan küçük olması gerekmez.*
Örneğin; Örnek 3.4 de geçen $K_C(\mathbb{R})$' nin singüler altuzayı olan $Z = \{0\} \cup \{[a,b]: a,b \in \mathbb{R}\ ve\ a \neq b\}$ kümesini tekrar düşünürsek, $Z_r = \{\{0\}\}$ olduğundan Önerme 4.2 gereğince $\overline{boy}Z = 0$ dır. Fakat $\underline{boy}Z = 1$ 'dir.

Kaynaklar

1. Aseev, S. M., *Quasilinear operators and their application in the theory of multivalued mappings*, Proc. Steklov Inst. Math., 2, 1986, 23-52.
2. Lakshmikantham, V., Bhaskar, G. T., Devi, J. V., *Theory of set differential equations in metric spaces*, Cambridge Sci. Pub., 2006.
3. Markow, S., *On the algebraic properties of convex bodies and some applications*, J. Convex Anal., 7(1), 2000, 129-166.
4. Markow, S., *On quasilinear spaces of convex bodies and intervals*, J. Comput. Appl. Math., 162(1), 2004, 93-112.
5. Yılmaz, Y., Çakan, S., Aytekin, Ş., *Topological Quasilinear Spaces*, Abstr. Appl. Anal., doi:10.1155/2012/951374, 2012.
6. Bozkurt, H., Çakan, S., Yılmaz, Y., *Quasilinear Inner Product Spaces and Hilbert Quasilinear Spaces*, International Journal of Analysis, doi:10.1155/2014/258389, 2014.
7. Çakan, S., Yılmaz, Y., *On the Quasimodules and Normed Quasimodules*, Nonlinear Functional
8. Analysis and Applications, (Accepted, 2015).