Erciyes University Journal of the Institute of Science and Technology
Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi
ISSN 1012-2354
Cilt (Volume): 30, Sayı (Issue): 4, Eylül/September-2014
http://fbe.erciyes.edu.tr/

Aynı boyutlu tutarlı sistemlerin sistem imzası ile karşılaştırılması

Yunus BULUT[1] ve Hikmet YAMAN[2]

[1]İnönü Üniversitesi, İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi, Ekonometri Bölümü, Malatya-Türkiye

[2]Çine Anadolu Öğretmen Lisesi, Çine-Aydın-Türkiye

Anahtar Kelimeler: Tutarlı sistemler, başarı yol kümesi, kesen küme, sistem imzası, sıralı istatistikler, stokastik sıralama, sağkalım hız sıralaması, olasılıksal oran sıralaması.

ÖZET

Bu çalışmada, bağımsız ve aynı dağılımlı n boyutlu tutarlı sistemlerin sistem imzası ile stokastik, sağkalım hız ve olasılıksal oran sıralaması anlamında nasıl karşılaştırıldıklarını inceledik.

Comparing coherent systems of same sizes via system signature

Key Words: Coherent systems, path set, cut set, system signature, order statistics, stochastic ordering, hazard rate ordering, likelihood ratio ordering.

ABSTRACT

In this study, we examined how to compare the coherent systems of same sizes n whose components have independent and identically distributed (i.i.d.) lifetimes through system signature in termsof stochastic ordering (st), hazard rate ordering (hr), likelihood ratio ordering (lr).

*Sorumlu Yazar (Corresponding author) e-posta: ybulut79@gmail.com

1. Giriş

20. yüzyılda teknolojinin gelişmesi ile birlikte ürünlerin ömürleri ve yaşam kaliteleri günlük hayatımızda önemli bir yer tutmaya başlamıştır. Belirli bir t zamanından sonra ürünün yaşam kalitesi veya t zamanda kalan ömrü istatistiksel olarak önem arz etmekte ve bu tür durumlar sistem güvenilirliği ile ölçülmektedir. Sistem güvenilirliği ile ilgili çalışmalar, 2. Dünya Savaşından sonra daha da önem kazanmıştır. Güvenilirlik Teorisi ile ilgili temel kavramlar için [1]-[3] incelenebilir.

Belli bir çalışma sahasındaki sistemlerden hangisinin daha kullanışlı olduğu, durumu daha iyi ifade edebildiği veya daha uzun ömürlü olduğunu belirleyebilmek için sistemlerin karşılaştırılması gerekir. Tutarlı sistemlerin karşılaştırılmasında sistem imzası önemli bir yer tutmaktadır. Sistem İmzası kavramı ilk kez Samaniego (1985) tarafından ortaya atılmıştır [4]. Sistem imzası ile ilgili daha detaylı bilgiler için [5] incelenebilir. Kochar vd. (1999), aynı boyutlu i.i.d. bileşenli tutarlı sistemlerin sistem imzası ile nasıl karşılaştırıldığını göstermiştir [6].

Navarro vd. (2005) ise sistem imzası yardımıyla aynı boyutlu bağımlı bileşenlere sahip tutarlı sistemlerin sıralamalarını incelemiştir [7]. Bunlara ilaveten, Navarro vd. (2008), farklı boyutlu tutarlı sistemlerin sistem imzası ile sıralamalarını araştırmıştır [8].

Bileşen sayısı az olan sistemlerin sistem imzasını hesaplamak kolay iken çok boyutlu tutarlı sistemlerin imzasını hesaplamak oldukça zordur. Bu problemi ortadan kaldırmak için Da vd. (2012), çok boyutlu sistemleri alt sistemlere ayırma prensibine dayanan ve bu tür sistemlerin imzasının hesaplanmasını kolaylaştıran iki formül geliştirmiştir [9].

Sistem imzası, sistemi oluşturan her bileşenin bilgisi ile hesaplanmaktadır. Bu durum, bazen sistem imzasının hesaplanmasını güçleştirmektedir. Bu tür durumlar için Marichal vd. (2013), sistem imzasının türev yardımıyla yapı fonksiyonundan direkt hesaplanabileceğini göstermiştir [10].

Bulut ve Yaman (2013), farklı boyutlu tutarlı sistemlerin Sistem İmzası ile nasıl karşılaştırıldıklarını incelemiştir [11]. Bu çalışmada, i.i.d. bileşenli ve aynı boyutlu tutarlı sistemlerin Sistem İmzası ile nasıl karşılaştırıldıklarını inceledik.

2. Tutarlı Sistemler

Güvenilirlik teorisinde çoğu uygulama tutarlı sistemlerin dizaynı ve performansı üzerine yapılmaktadır. Tutarlı sistemlerin tanımını vermeden önce bir sistemin bileşenlerinin ve yapı fonksiyonunun nasıl tanımlandığını vereceğiz.

Tanım 2.1. $i \in [n] = \{1,2,\ldots,n\}$ için i. bileşenin durumu

$$x_i = \begin{cases} 1, & i.\, bileşen\ t\ anında\ çalışıyorsa \\ 0, & i.\, bileşen\ t\ anında\ çalışmıyorsa \end{cases}$$

dönüşümü ile tanımlanır. Burada n, sistemdeki bileşenlerin sayısıdır. x_i dönüşümü bir Bernoulli değişkenidir ve $P(x_i = 1) = p_i$ ile gösterilir. Ayrıca, i. bileşenin T_i yaşam süresinin herhangi bir t anından büyük olma olasılığına *bileşen güvenilirliği* denir ve $i \in [n]$ için $P(T_i > t) = p_i$ dir.

Benzer şekilde, sistemin durumu

$$\phi = \begin{cases} 1, & sistem\ t\ anında\ çalışıyorsa \\ 0, & sistem\ t\ anında\ çalışmıyorsa \end{cases}$$

dönüşümü ile tanımlanır. $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^n$ olmak üzere, $\phi(\boldsymbol{x})$ fonksiyonu, *yapı fonksiyonu* olarak adlandırılır. Sistemdeki bileşen sayısı olan n, *sistemin boyutu* olarak adlandırılır [1]-[3].

Tanım 2.2. Sistemin t anında çalışıyor olma olasılığına, yani $\phi(\boldsymbol{x}) = 1$ olma olasılığına *sistem güvenilirliği* denir. n boyutlu bir sistemin güvenilirliği, $h(\boldsymbol{p}) = P(\phi(\boldsymbol{x}) = 1) = E\phi(\boldsymbol{x})$ eşitliği ile hesaplanır. Burada **p**=($p_1, p_2, \ldots, p_n$) dir [1]-[3].

Tanım 2.3. Bir sistem, a) $\phi(\boldsymbol{x})$ yapı fonksiyonu, her bir bileşen için monoton azalmayan ise ve b) sistem sadece ilişkili bileşenlerden oluşuyor ise *tutarlı sistem* adını alır. Tanımdan da anlaşılacağı gibi, tutarlı sistemlerde, başarısız bir bileşen yerine çalışan bir bileşen yerleştirildiğinde sistem performansı etkilenir. Ayrıca, her bir bileşen sistemin başarısını veya başarısızlığını etkiler. i. bileşenin ilişkili bileşen olması, her $i \in [n]$ için $\phi(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots x_n) \neq \phi(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots x_n)$ önermesi ile ifade edilir [1]-[3].

Bir sistemin yapı fonksiyonu belirlenirken, sistemin başarı yol kümeleri ve kesen kümelerinden faydalanılmaktadır.

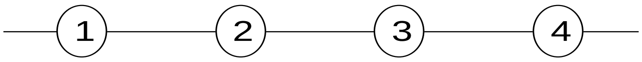
Tanım 2.4. P, sistemin bir kısım bileşenlerinden oluşan bir küme olsun. P kümesindeki bütün bileşenler çalıştığında sistem de çalışıyorsa, P'ye *başarı yol kümesi* denir.Başka bir başarı yol kümesini kapsamayan başarı yol kümesi, *minimal başarı yol kümesi* olarak adlandırılır [1]-[3].

Tanım 2.5. K, sistemin bir kısım bileşenlerinden oluşan bir küme olsun. K kümesindeki bütün bileşenler başarısız olduğunda sistem de başarısız oluyorsa, K'ya *kesen küme* denir. Başka bir kesen kümeyi kapsamayan kesen kümeye, *minimal kesen küme* denir [1]-[3].

P, bir minimal başarı yol kümesi ve A, P'nin özalt kümesi olsun. O zaman A^c kümesi, bir kesen kümedir. K, bir minimal kesen küme ve B, K'nin özalt kümesi olsun. O zaman B^c kümesi, bir başarı yol kümesidir. Burada, A^c ve B^c kümeleri minimal olmak zorunda değildir. Bir sistemin yapı fonksiyonu, Sistemin minimal başarı yol kümeleri veya minimal kesen kümeleri ile ifade edilebilir. $\{P_1, P_2, \ldots, P_r\}$ ve $\{K_1, K_2, \ldots, K_s\}$ kümeleri sırasıyla sistemin minimal başarı yol ve minimal kesen kümeleri kümesi olsun. O zaman,sistemin yapı fonksiyonu,

$\phi(\boldsymbol{x}) = \text{maksmin}_{\{1 \le i \le r\}\{j \in P_i\}}\{x_j\} = \coprod_{i=1}^{r} \prod_{j \in P_i} x_j$ veya
$\phi(\boldsymbol{x}) = \text{minmaks}_{\{1 \le i \le s\}\{j \in K_i\}}\{x_j\} = \prod_{i=1}^{s} \coprod_{j \in K_i} x_j$ operatörleri ile belirlenebilir [1]-[3]. (Burada A^c ve B^c kümeleri sırasıyla, A ve B kümelerinin tümleyen kümeleridir.)

Örnek 2.1.



Şekil 1. Seri Sistem

Şekil 1'de verilen sistem, seri sistem olarak adlandırılmaktadır ve *minmaks* operatörü yardımıyla,sistemin yapı fonksiyonu ve güvenilirliği, sırasıyla,

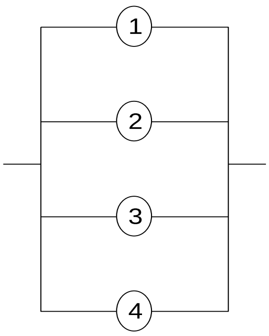
$\phi_s(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1.x_2.x_3.x_4$ ve

$h_s(p_1,p_2,p_3,p_4) = p_1.p_2.p_3.p_4$

olarak elde edilir. Eğer sistem bileşenleri özdeş ise (yani, $x = x_1 = x_2 = x_3 = x_4$ ve $P(x_i = x = 1) = p$ ise), $\boldsymbol{x} = (x,x,x,x)$ ve **p**=(p,p,p,p) olmak üzere sistemin yapı fonksiyonu ve güvenilirliği, sırasıyla,

$\phi_s(\boldsymbol{x}) = x_1.x_2.x_3.x_4 = x^4$ ve $h_s(\boldsymbol{p}) = p_1.p_2.p_3.p_4 = p^4$ ile ifade edilir.

Örnek 2.2.



Şekil 2. Paralel Sistem

Şekil 2'de verilen sistem, paralel sistem olarak adlandırılmaktadır ve *minmaks* operatörü yardımıyla, sistemin yapı fonksiyonu ve güvenilirliği, sırasıyla,

$\phi_p(x_1,x_2,x_3,x_4)$

$= 1-(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)(1-x_4)$

ve
$h_p(p_1,p_2,p_3,p_4)$

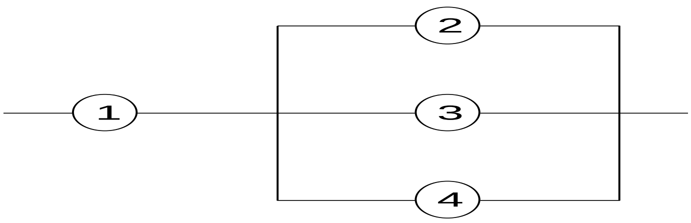
$= 1-(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)(1-p_4)$

olarak elde edilir. Eğer sistem bileşenleri özdeş ise sistemin yapı fonksiyonu ve güvenilirliği, sırasıyla,

$\phi_p(\boldsymbol{x}) = 1-(1-x)^4$ ve $h_p(\boldsymbol{p}) = 1-(1-p)^4$

ile ifade edilir.

Örnek 2.3.



Şekil 3

Şekil 3'de verilen sistem,seri-paralel sistem olarak adlandırılmaktadır ve *minmaks* operatörüne göre sistemin yapı fonksiyonu ve güvenilirliği, sırasıyla,

$\phi_1(x_1,x_2,x_3,x_4) =$

$x_1\{1-(1-x_2)(1-x_3)(1-x_4)\}$

ve
$h_1(p_1,p_2,p_3,p_4) =$

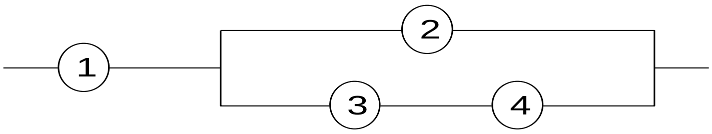
$p_1\{1-(1-p_2)(1-p_3)(1-p_4)\}$

olarak elde edilir. Eğer sistem bileşenleri özdeş ise sistemin yapı fonksiyonu ve güvenilirliği, sırasıyla,

$\phi_1(\boldsymbol{x}) = x.\{1-(1-x)^3\}$ ve

$h_1(\boldsymbol{p}) = p\{1-(1-p)^3\}$ ile ifade edilir.

Örnek 2.4.



Şekil 4

Şekil 4'de verilen sistem,seri-paralel sistem olarak adlandırılmaktadır ve *minmaks* operatörüne göre sistemin yapı fonksiyonu ve güvenilirliği, sırasıyla,

$\phi_2(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1\{1-(1-x_2)(1-x_3x_4)\}$

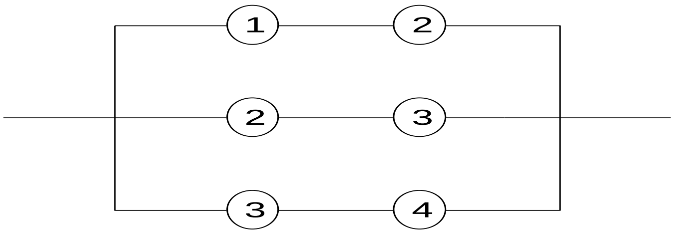
ve
$h_2(p_1,p_2,p_3,p_4) = p_1\{1-(1-p_2)(1-p_3p_4)\}$

olarak elde edilir. Eğer sistem bileşenleri özdeş ise yapı fonksiyonu ve güvenilirliği, sırasıyla,

$\phi_2(\boldsymbol{x}) = x\{1-(1-x)(1-x^2)\}$ ve
$h_2(\boldsymbol{p}) = p\{1-(1-p)(1-p^2)\}$

ile ifade edilir.

Örnek 2.5.



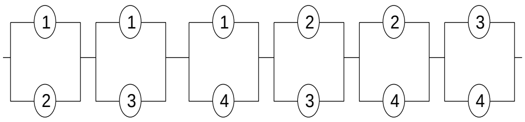
Şekil 5. 4’den ardıl 2 çıkışlı: G Sistem

Şekil 5’de verilen sistem, 4’den ardıl 2 çıkışlı:G Sistem olarak adlandırılmaktadır ve bu sistemin minimal başarı yol kümeleri {1,2},{2,3} ve {3,4} olduğundan, *maksmin* operatörüne göre sistemin yapı fonksiyonu ve güvenilirliği, sırasıyla,

$\phi_3(x_1,x_2,x_3,x_4) =$
$\{1-(1-x_1x_2)(1-x_2x_3)(1-x_3x_4)\}$
ve
$h_3(p_1,p_2,p_3,p_4) =$
$\{1-(1-p_1p_2)(1-p_2p_3)(1-p_3p_4)\}$
olarak elde edilir. Eğer sistem bileşenleri özdeş ise sistemin yapı fonksiyonu ve güvenilirliği, sırasıyla,

$\phi_3(\boldsymbol{x}) = \{1-(1-x^2)^3\}$
ve
$h_3(\boldsymbol{p}) = \{1-(1-p^2)^3\}$
ile ifade edilir.

Örnek 2.6.



Şekil 6. 4’den 2 çıkışlı: F Sistem

Şekil 6’de verilen sistem, 4’den 2 çıkışlı:F Sistem olarak adlandırılmaktadır ve *minmaks* operatörüne göre sistemin yapı fonksiyonu ve güvenilirliği, sırasıyla,

$\phi_4(x_1,x_2,x_3,x_4) =$

$\{1-(1-x_1)(1-x_2)\}\{1-(1-x_1)(1-x_3)\}$
$\{1-(1-x_1)(1-x_4)\}\{1-(1-x_2)(1-x_3)\}$
$\{1-(1-x_2)(1-x_4)\}\{1-(1-x_3)(1-x_4)\}$
ve

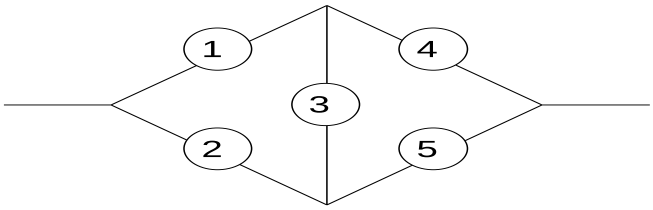
$h_4(p_1,p_2,p_3,p_4) =$
$\{1-(1-p_1)(1-p_2)\}\{1-(1-p_1)(1-p_3)\}$
$\{1-(1-p_1)(1-p_4)\}\{1-(1-p_2)(1-p_3)\}$
$\{1-(1-p_2)(1-p_4)\}\{1-(1-p_3)(1-p_4)\}$

olarak elde edilir. Eğer sistem bileşenleri özdeş ise sistemin yapı fonksiyonu ve güvenilirliği, sırasıyla,

$\phi_4(\boldsymbol{x}) = \{1-(1-x)^2\}^6$
ve
$h_4(\boldsymbol{p}) = \{1-(1-p)^2\}^6$

ile ifade edilir.

Örnek 2.7.



Şekil 7. Köprü Sistemi

Şekil 7’de verilen sistem, Köprü Sistemi olarak adlandırılmaktadır. Bu sistemin minimal başarı kümeleri {1,4},{2,5},{1,3,5} ve {2,3,4} olduğundan *maksmin* operatörü yardımıyla sistemin yapı fonksiyonu ve güvenilirliği, sırasıyla,

$\phi_5(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = 1-(1-x_1x_4)$

$(1-x_2x_5)(1-x_1x_3x_5)(1-x_2x_3x_4)$

ve
$h_5(p_1,p_2,p_3,p_4,p_5) = 1-(1-p_1p_4)$

$(1-p_2p_5)(1-p_1p_3p_5)(1-p_2p_3p_4)$

olarak elde edilir. Eğer sistem bileşenleri özdeş ise sistemin yapı fonksiyonu ve güvenilirliği, sırasıyla,

$\phi_5(\boldsymbol{x}) = 1-(1-x^2)^2(1-x^3)^2$

ve
$h_5(\boldsymbol{p}) = 1-(1-p^2)^2(1-p^3)^2$

ile ifade edilir.

3. Sistem imzası ve özellikleri

n bileşenli bir sistemin bileşen yaşam süreleri $X_1, X_2, \dots, X_n$, bu yaşam sürelerinin sıralı istatistikleri $X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{n:n}$ ve sistemin yaşam süresi T olsun. O zaman sistemin başarısızlık zamanı (veya T yaşam süresi), $X_{i:n}$ sıralı istatistiği ile ilişkili olacaktır. Samaniego (1985), bu ilişkiyi temel alarak sistem imzasını tanımlamıştır. Aynı makalede, sistem imzası bilinen sistemlerin, sistem imzaları ile sistemlerin ömürleri arasındaki ilişkiyi vermiştir [4]. Bu çalışma, tutarlı sistemlerin sistem imzası üzerine kurulmuştur.

Tanım 3.1. F, $(0,\infty)$ aralığında sürekli bir fonksiyon olsun. Aynı F dağılımlı ve bağımsız bileşenden oluşan n boyutlu tutarlı bir sistemin bileşenleri $X_1, X_2, \dots, X_n$ olmak üzere i. bileşeni $s_i = P(T = X_{i:n})$ olan $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in [0,1]^n$ vektörüne *sistem imzası* denir. Burada $\sum_{i=1}^{n} s_i = 1$ dir [4],[5].

Bulut ve Yaman, Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 30(4):300-307

Sistem imzası vektörü, sisteme özgüdür ve dağılımdan bağımsızdır (yalnızca sistemin dizaynına bağlıdır ve sistemin bileşenlerinin yaşam sürelerinin davranışından bağımsızdır), bu yüzden, sistemlerin karşılaştırılmasında önemli bir ölçümdür. Sistem imzası, bileşen sayısı az olan sistemlerde *minmaks* operatörü yardımıyla kolaylıkla hesaplanabilir. Da vd. (2012), bileşen sayısı fazla olan sistemlerin imzasını, sistemleri alt sistemlere ayırarak hesaplamıştır [9].

Örnek 3.1. Şekil 3'de 4 bileşenden oluşan ϕ_1 sistemini göz önüne alalım. Bu sistemin, kesme kümeleri kümesi $\mathcal{K} = \{\{1\},\{2,3,4\}\}$ olduğundan yapı fonksiyonu

$$\phi_1(x_1,x_2,x_3,x_4) = \underset{1\leq i\leq 2, K_i\in\mathcal{K}}{\mathrm{minmaks}}\, K_i$$
$$= min\{x_1, maks\{x_2,x_3,x_4\}\}$$
$$= min\{x_1, 1-(1-x_2)(1-x_3)(1-x_4)\}$$
$$= x_1\{1-(1-x_2)(1-x_3)(1-x_4)\}$$

olarak elde edilir. *minmaks* operatörü yardımıyla T'nin hangi sıralı istatistiğe eşit olduğu, Tablo 1'de elde edilmiştir.

Tablo 1

$X_{i_1} < X_{i_2} < X_{i_3} < X_{i_4}$	$T = X_{i:4}$
$X_1 < X_2 < X_3 < X_4$	$X_1 = X_{1:4}$
$X_1 < X_2 < X_4 < X_3$	$X_1 = X_{1:4}$
$X_1 < X_3 < X_2 < X_4$	$X_1 = X_{1:4}$
$X_1 < X_3 < X_4 < X_2$	$X_1 = X_{1:4}$
$X_1 < X_4 < X_2 < X_3$	$X_1 = X_{1:4}$
$X_1 < X_4 < X_3 < X_2$	$X_1 = X_{1:4}$
$X_2 < X_1 < X_3 < X_4$	$X_1 = X_{2:4}$
$X_2 < X_1 < X_4 < X_3$	$X_1 = X_{2:4}$
$X_2 < X_3 < X_1 < X_4$	$X_1 = X_{3:4}$
$X_2 < X_3 < X_4 < X_1$	$X_4 = X_{3:4}$
$X_2 < X_4 < X_1 < X_3$	$X_1 = X_{3:4}$
$X_2 < X_4 < X_3 < X_1$	$X_3 = X_{3:4}$
$X_3 < X_1 < X_2 < X_4$	$X_1 = X_{2:4}$
$X_3 < X_1 < X_4 < X_2$	$X_1 = X_{2:4}$
$X_3 < X_2 < X_1 < X_4$	$X_1 = X_{3:4}$
$X_3 < X_2 < X_4 < X_1$	$X_4 = X_{3:4}$
$X_3 < X_4 < X_1 < X_2$	$X_1 = X_{3:4}$
$X_3 < X_4 < X_2 < X_1$	$X_2 = X_{3:4}$
$X_4 < X_1 < X_2 < X_3$	$X_1 = X_{2:4}$
$X_4 < X_1 < X_3 < X_2$	$X_1 = X_{2:4}$
$X_4 < X_2 < X_1 < X_3$	$X_1 = X_{3:4}$
$X_4 < X_2 < X_3 < X_1$	$X_3 = X_{3:4}$
$X_4 < X_3 < X_1 < X_2$	$X_1 = X_{3:4}$
$X_4 < X_3 < X_2 < X_1$	$X_2 = X_{3:4}$

Tablo 1'den $P(T = X_{1:4}) = \frac{n(T=X_{1:4})}{4!} = \frac{6}{24}$, $P(T = X_{2:4}) = \frac{n(T=X_{2:4})}{4!} = \frac{6}{24}$, $P(T = X_{3:4}) = \frac{n(T=X_{3:4})}{4!} = \frac{12}{24}$ ve $P(T = X_{4:4}) = \frac{n(T=X_{4:4})}{4!} = \frac{0}{24}$ elde edilir. Dolayısıyla, ϕ_1 sisteminin imzası, $\boldsymbol{s}_1 = (\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{2},0)$ olarak elde edilir.

Örnek 3.2. Örnek 3.1'de $\boldsymbol{s}_1$'in elde edilişi gibi,

ϕ_s sisteminin imzası, $\boldsymbol{s}_s = (1,0,0,0)$,
ϕ_p sisteminin imzası, $\boldsymbol{s}_p = (0,0,0,1)$,
ϕ_2 sisteminin imzası, $\boldsymbol{s}_2 = (\frac{1}{4},\frac{7}{12},\frac{1}{6},0)$,
ϕ_3 sisteminin imzası, $\boldsymbol{s}_3 = (0,\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$,
ϕ_4 sisteminin imzası, $\boldsymbol{s}_4 = (0,1,0,0)$ ve
ϕ_5 sisteminin imzası, $\boldsymbol{s}_5 = (0,\frac{1}{5},\frac{3}{5},\frac{1}{5},0)$

elde edilir. Genel olarak, n boyutlu bir seri sistemin imzası (1,0,…,0), bir paralel sistemin imzası (0,0,…,1) ve k çıkışlı:F sistemin imzası $(0,\ldots,1_k,\ldots,0)$ vektörleridir.

Teorem 3.1. $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n boyutlu tutarlı bir sistemin aynı F dağılımlı ve bağımsız bileşen yaşam süreleri olsunlar. T sistem yaşam süresi ve $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_n) \in [0,1]^n$ sistem imzasıolmak üzere, sistemin t anındaki güvenilirliği

$$\bar{F}_T(t) = P(T > t) = \sum_{i=1}^{n} s_i \sum_{j=0}^{i-1} \binom{n}{j} \{F(t)\}^j \{\bar{F}(t)\}^{n-j}$$

eşitliği ile verilebilir [4]-[6].

Sonuç 3.1.
Teorem 3.1'den $P(T > t) = \sum_{i=1}^{n} s_i P(X_{i:n} > t)$ ve $E(T) = \sum_{i=1}^{n} s_i E(X_{i:n})$ eşitlikleri elde edilebilir [8].

Örnek 3.3. Teorem 3.1'den seri sistemler için
$E\phi_s(\boldsymbol{x}) = P(T_s > t) = \{\bar{F}(t)\}^n$
elde edilir. Burada, n=4 alınırsa, *minmaks* operatörü ile elde ettiğimiz 4 özdeş bileşenden oluşan seri sistemin $h_s(\boldsymbol{p}) = p^4$ güvenilirliği elde edilir.
Paralel sistemler için
$E\phi_p(\boldsymbol{x}) = P(T_p > t) = 1 - \{F(t)\}^n$
elde edilir. Burada, n=4 alınırsa, *minmaks* operatörü ile elde ettiğimiz 4 özdeş bileşenden oluşan paralel sistemin güvenilirliği elde edilir.
$i \in [4]$ olmak üzere $\phi_i$sistemlerinin s_i sistem imzaları, Teorem 3.1'e uygulanırsa; aşağıdaki sonuçlara ulaşılır.

ϕ_1 sistemi için
$E\phi_1(\boldsymbol{x}) = P(T_1 > t) = \bar{F}(t)\{1 - (F(t))^3\}$
elde edilir ki bu, Örnek 2.3'de elde ettiğimiz $h_1(\boldsymbol{p})$ ile aynıdır.

ϕ_2 sistemi için
$E\phi_2(\boldsymbol{x}) = P(T_2 > t)$
$= \bar{F}(t)\{1 - F(t)(1 - (\bar{F}(t))^2)\}$
elde edilir ki bu, Örnek 2.4'de elde ettiğimiz $h_2(\boldsymbol{p})$ ile aynıdır.

ϕ_3 sistemi için
$E\phi_3(\boldsymbol{x}) = P(T_3 > t) = 1 - (1 - (\bar{F}(t))^2)^2$
elde edilir ki bu, Örnek 2.5'de elde ettiğimiz $h_3(\boldsymbol{p})$ ile aynıdır.

ϕ_4 sistemi için
$E\phi_4(\boldsymbol{x}) = P(T_4 > t) = \{1 - (F(t))^2\}^6$
elde edilir ki bu, Örnek 2.6'da elde ettiğimiz $h_4(\boldsymbol{p})$ ile aynıdır.
ϕ_5 sistemi için
$E\phi_5(\boldsymbol{x}) = P(T_5 > t)$
$= 1 - (1 - (\bar{F}(t))^2)^2(1 - (\bar{F}(t))^3)^2$
elde edilir ki bu, Örnek 2.7'de elde ettiğimiz $h_5(\boldsymbol{p})$ ile aynıdır.

4. Sistem imzası ile tutarlı sistemlerin karşılaştırılması

Sistemler genel olarak, stokastik sıralama [12]-[13], sağkalım hız sıralaması [14]-[16] ve olasılıksal oran sıralaması [17]-[19] ile karşılaştırılabilir. Kochar vd. (1999), aynı boyutlu i.i.d. bileşenli tutarlı sistemlerin, sistem imzası ile nasıl karşılaştırıldığını göstermiştir [6]. i.i.d. varsayımı, sistemlerin aynı çalışma sahasına indirgenmesinde önemli bir rol oynamaktadır [8]. Bu yüzden çalışmamızda, sistemi oluşturan bileşenlerin i.i.d. olduğunu kabul edeceğiz.

Tanım 4.1. X ve Y tesadüfi değişkenlerinin kümülatif dağılım fonksiyonları sırasıyla, F ve G olsun. Eğer tüm t değerleri için $P(X > t) \leq P(Y > t)$ eşitsizliği sağlanıyorsa, X tesadüfi değişkeni, Y tesadüfi değişkeninden *stokastiksel olarak küçüktür* denir ve $X \leq_{st} Y$ ile ifade edilir [12]-[13]. Stokastik sıralama, iki sistem imzası arasında aşağıdaki şekilde tanımlanabilir;
$\boldsymbol{s}_1 = (s_1, s_2, \dots, s_n)$, $\boldsymbol{s}_2 = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in [0,1]^n$ ve j$\in [n]$ olmak üzere, $\boldsymbol{s}_1 \leq_{st} \boldsymbol{s}_2$ olması için gerek veyeter şart her j$\in [n]$ için

$$\sum_{i=j}^{n} s_{1i} \leq \sum_{i=j}^{n} s_{2i}$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır [6].

Tanım 4.2. X sürekli tesadüfi değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(t)$ ve kümülatif fonksiyonu $F(t)$ olsun. Eğer $r_X(t) = f(t)/\bar{F}(t)$ fonksiyonu, azalmayan ise X tesadüfi değişkeni, *artan başarısızlık hızı*na sahiptir denir. Eğer $r_X(t)$ fonksiyonu, azalmayan ise X tesadüfi değişkeni, *azalan başarısızlık hızı*na sahiptir denir. $r_X(t)$ fonksiyonu, X'in (veya F'nin) tehlike hızı olarak da adlandırılır [12].

Tanım 4.3. $r_X(t) \geq r_Y(t)$ eşitsizliği sağlanıyorsa, X tesadüfi değişkeni, Y tesadüfi değişkeninden *sağkalım hızı anlamında küçüktür* denir ve $X \leq_{hr} Y$ ile ifade edilir [12]. Sağkalım hız sıralaması, iki sistem imzası arasında aşağıdaki şekilde tanımlanabilir;
$\boldsymbol{s}_1 = (s_{11}, s_{12}, \dots, s_{1n})$, $\boldsymbol{s}_2 = (s_{21}, s_{22}, \dots, s_{2n}) \in [0,1]^n$ ve j$\in [n]$ olmak üzere, $\boldsymbol{s}_1 \leq_{hr} \boldsymbol{s}_2$ olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{\sum_{i=j}^{n} s_{2i}}{\sum_{i=j}^{n} s_{1i}}$$

oranının $j \in [n]$ üzerinde azalmayan olmasıdır [6].

Lemma 4.1. $X \leq_{hr} Y \Rightarrow X \leq_{st} Y$ önermesi sağlanır [12].

Tanım 4.4. X ve Y tesadüfi değişkenlerinin olasılık yoğunluk fonksiyonları, sırasıyla, $f(t)$ ve $g(t)$ olsun.
X ve Y tesadüfi değişkenlerinin tanım bölgelerinin birleşimi üzerinde, $f(t)/g(t)$ oranı azalmıyorsa, X tesadüfi değişkeni, Y tesadüfi değişkeninden *olasılıksal oran anlamında küçüktür* denir ve $X \leq_{lr} Y$ ile ifade edilir [12],[17]-[19]. Olasılıksal oran sıralaması, iki sistem imzası arasında aşağıdaki şekilde tanımlanabilir;
$\boldsymbol{s}_1 = (s_1, s_2, \dots, s_n)$, $\boldsymbol{s}_2 = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in [0,1]^n$ ve i$\in [n]$ olmak üzere, $\boldsymbol{s}_1 \leq_{lr} \boldsymbol{s}_2$ olması için gerek veyeter şart

$$\frac{s_{2i}}{s_{1i}}$$

oranının i$\in [n]$ üzerinde azalmayan olmasıdır [6].

Kochar vd. (1999), sistem imzası yardımıyla sistemlerin ömürleri arasındaki stokastik, sağkalım hız ve olasılıksal oran sıralamasının nasıl yapıldığını göstermiştir.

Teorem 4.1. n boyutlu i.i.d. bileşenli iki tutarlı sistemin sistem imzası sırasıyla, $\boldsymbol{s}_1 = (s_{11}, s_{12}, \dots, s_{1n})$ ve $\boldsymbol{s}_2 = (s_{21}, s_{22}, \dots, s_{2n})$ olsun. Bu sistemlerin yaşam süreleri sırasıyla, T_1 ve T_2 olmak üzere,

i) $\boldsymbol{s}_1 \leq_{st} \boldsymbol{s}_2 \Rightarrow T_1 \leq_{st} T_2$
ii) $\boldsymbol{s}_1 \leq_{hr} \boldsymbol{s}_2 \Rightarrow T_1 \leq_{hr} T_2$
iii) $\boldsymbol{s}_1 \leq_{lr} \boldsymbol{s}_2 \Rightarrow T_1 \leq_{lr} T_2$

önermeleri sağlanır [6].

Sistem imzalarının, stokastik ve sağkalım hız sıralamalarını incelemek için kuyruk olasılık vektörünü tanımlayacağız.

Tanım 4.5. Bir $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in [0,1]^n$ olasılık vektörünün *kuyruk olasılık vektörü*, j$\in [n]$ için $v_j = \sum_{i=j}^{n} a_i$ olmak üzere $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in [0,1]^n$ vektörüdür. Burada, $v_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ dir [20].

Örnek 4.1. Çalışmamızda yer alan sistemlerin imzalarına karşılık gelen kuyruk olasılık vektörleri aşağıda verilmiştir;
$\boldsymbol{s}_s = (1,0,0,0)$ imzası için $\boldsymbol{v}_s = (1,0,0,0)$,
$\boldsymbol{s}_p = (0,0,0,1)$ imzası için $\boldsymbol{v}_p = (1,1,1,1)$,
$\boldsymbol{s}_1 = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 0)$ imzası için $\boldsymbol{v}_1 = (1, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, 0)$
$\boldsymbol{s}_2 = (\frac{1}{4}, \frac{7}{12}, \frac{1}{6}, 0)$ imzası için $\boldsymbol{v}_2 = (1, \frac{3}{4}, \frac{1}{6}, 0)$
$\boldsymbol{s}_3 = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ imzası için $\boldsymbol{v}_3 = (1, 1, \frac{1}{2}, 0)$ ve
$\boldsymbol{s}_4 = (0,1,0,0)$ imzası için $\boldsymbol{v}_4 = (1,1,0,0)$ elde edilir.

ϕ_5 sistemi 5 boyutlu olduğu için kuyruk olasılık vektörünü bulmayacağız. Buradan, iki vektör arasındaki adi sıralamadan, (yani, $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ve $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ herhangi iki vektör olmak üzere, her $i \in [n]$ için $a_i \leq b_i$ ise $\boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{b}$ dir [20].)

Tablo 2

$\leq$	v_s	v_1	v_2	v_3	v_4	v_p
v_s		v_1	v_2	v_3	v_4	v_p
v_1			v_1	v_3	Yok	v_p
v_2				v_3	Yok	v_p
v_3					v_3	v_p
v_4						v_p
v_p						

Tablo 2 kolaylıkla elde edilir. Tablonun içi $\leq$'ya göre büyük olan vektörlerden oluşmaktadır. Tablo 2 ve Teorem 4.1 kullanılarak stokastik sıralama için aşağıdaki sonuçlara ulaşılır;

i) her $i \in [4]$ için $v_s \leq v_i \leq v_p \Rightarrow s_s \leq_{st} s_i \leq_{st} s_p \Rightarrow T_s \leq_{st} T_i \leq_{st} T_p$,

ii) $v_2 \leq v_1 \Rightarrow s_2 \leq_{st} s_1 \Rightarrow T_2 \leq_{st} T_1$,

iii) $v_1 \leq v_3 \Rightarrow s_1 \leq_{st} s_3 \Rightarrow T_1 \leq_{st} T_3$,

iv) $v_2 \leq v_3 \Rightarrow s_2 \leq_{st} s_3 \Rightarrow T_2 \leq_{st} T_3$ ve

v) $v_4 \leq v_3 \Rightarrow s_4 \leq_{st} s_3 \Rightarrow T_4 \leq_{st} T_3$

elde edilir.

Ayrıca, Tablo 2'den $\{\phi_4(x), \phi_1(x)\}$ ve $\{\phi_4(x), \phi_2(x)\}$ sistem ikililerinin stokastik sıralamaya göre karşılaştırılamadığı görülür.

$a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ve $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ vektörlerinin *oran vektörü* $\frac{a}{b} = (\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n})$ olmak üzere, Teorem 4.1'den her $i \in [4]$ için

$\frac{v_i}{v_s}, \frac{v_p}{v_i}, \frac{v_p}{v_s}, \frac{v_1}{v_2}, \frac{v_3}{v_2}$ ve $\frac{v_3}{v_4}$

oran vektörleri bileşen anlamında azalmayan olduğundan sağkalım hız sıralama için aşağıdaki sonuçlara ulaşılır;

i) her $i \in [4]$ için $s_s \leq_{hr} s_i \leq_{hr} s_p \Rightarrow T_s \leq_{hr} T_i \leq_{hr} T_p$,

ii) $s_2 \leq_{hr} s_1 \Rightarrow T_2 \leq_{hr} T_1$,

iii) $s_2 \leq_{hr} s_3 \Rightarrow T_2 \leq_{hr} T_3$ ve

iv) $s_4 \leq_{hr} s_3 \Rightarrow T_4 \leq_{hr} T_3$ elde edilir.

Ayrıca, $\{\phi_4(x), \phi_1(x)\}$, $\{\phi_4(x), \phi_2(x)\}$ ve $\{\phi_3(x), \phi_1(x)\}$ sistem ikilileri sağkalım hız sıralamasına göre karşılaştırılamazlar. Öte yandan, $s_1 \leq_{st} s_3$ olmasına rağmen $s_1 \nleq_{hr} s_3$ (veya $s_3 \nleq_{hr} s_1$) dir. Yani; Lemma 4.1'in tersi sağlanmaz.

Teorem 4.1'den, her $i \in [4]$ için

$\frac{s_i}{s_s}, \frac{s_3}{s_2}, \frac{s_p}{s_s}, \frac{s_p}{s_1}$ ve $\frac{s_p}{s_2}$

oran vektörleri bileşen anlamında azalmayan olduğundan olasılıksal oran sıralama için aşağıdaki sonuçlara ulaşılır;

i) her $i \in [4]$ için $s_s \leq_{hr} s_i \Rightarrow T_s \leq_{hr} T_i$,

ii) $s_2 \leq_{hr} s_3 \Rightarrow T_2 \leq_{hr} T_3$,

iii) $s_s \leq_{hr} s_p \Rightarrow T_s \leq_{hr} T_p$,

iv) $s_1 \leq_{hr} s_p \Rightarrow T_1 \leq_{hr} T_p$ ve

v) $s_2 \leq_{hr} s_p \Rightarrow T_2 \leq_{hr} T_p$ elde edilir.

Ayrıca, $\{\phi_1(x), \phi_2(x)\}$, $\{\phi_1(x), \phi_3(x)\}$, $\{\phi_1(x), \phi_4(x)\}$, $\{\phi_2(x), \phi_4(x)\}$, $\{\phi_3(x), \phi_4(x)\}$, $\{\phi_3(x), \phi_p(x)\}$ ve $\{\phi_4(x), \phi_p(x)\}$ sistem ikilileri olasılıksal oran sıralamasına göre karşılaştırılamazlar.

5. Sonuç

Çalışmamızda, bağımsız ve aynı boyutlu tutarlı sistemlerin sistem imzası ile stokastik, sağkalım ve olasılıksal oran sıralamaları anlamında nasıl karşılaştırıldığını gösterdik. 4 boyutlu 20 tane tutarlı sistem olmasına rağmen biz bunlardan yalnızca 6 tanesini inceledik. Ele alınan sistem ikililerinden bazılarının söz konusu sıralama çeşitleri ile karşılaştırılamadıklarını gördük. İncelediğimiz tüm sıralama çeşitlerinde seri sistemlerin en küçük yaşam süresine, stokastik ve sağkalım hız sıralamalarında paralel sistemlerin en büyük yaşam süresine sahip olduklarını fakat, olasılıksal oran sıralamada, paralel sistemlerin bazı sistemlerle karşılaştırılamadığını, diğerleri arasında ise en büyük yaşam süresine sahip olduklarını gördük.

Kaynaklar

1. Barlow, R.E., Proschan, F., Statistical Theory of Reliability and Life Testing: Probability Models, s.1-25, Holt, Rinehart and Winston, Inc. New York, 1975.

2. Rausand, M., Hoyland, A., System Reliability Theory: Models, Statistical Methods, and Applications, s.118-133, John Wiley&Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2004.

3. Kuo, W., Zuo, M., Optimal Reliability Modeling: Principles and Applications, s.85-95, John Wiley&Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2003.

4. Samaniego, F.J., On Closure the IFR Class Under Formation of Coherent Systems, IEEE Trans. Reliab. Theory, 34, 69-72, 1985.

5. Samaniego, F.J., System Signatures and Their Applications in Engineering Reliability, s.20-27, Springer Science+Business Media, LLC, 2007.

6. Kochar, S., Mukerjee, H., Samaniego, F.J., The "Signature" of a Coherent System and Its Application to Comparisons Among Systems, Naval Research Logistic, 46, 507-523, 1999.

7. Navarro, J., Ruiz, J.M., Sandoval, C.J., A Note on Comparisons among Coherent Systems with Dependent Components Using Signatures, Statistics and Probability Letters, 72, 179-185, 2005.

8. Navarro., J., et al., On the Application and Extension of System Signatures in Engineering Reliability, Naval Research Logistic, 55, 313-326, 2008.

9. Da, G., Zheng, B., Hu, T., On Computing Signatures of Coherent Systems, Journal of Multivariate Analysis, 103, 142-150, 2012.

10. Marichal, J.L., Mathonet, P., Computing System Signatures through Reliability Functions, Statistics and Probability Letters, 83, 710-717, 2013.

11. Bulut, Y., Yaman, H., Farklı Boyutlu Tutarlı Sistemlerin Sistem İmzası ile Karşılaştırılması, Gaziosmanpaşa Bilimsel Araştırma Dergisi, 6, 85-102, 2013.

12. David, H.A., Nagaraja, H.N., Order Statistics, s.74-76, John Wiley&Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2003.

13. Barbour, A.D., Lindvall, T., Rogers, L.C.G., Stochastic Ordering of Order Statistics, Journal of Applied Probability, 28, 278-286, 1991.

14. Navarro, J., Shaked, M., Hazard Rate Ordering of Order Statistics and Systems, Journal of Applied Probability, 43, 391-408, 2006.

15. Boland, P.J., El-Neweihi, E., Proschan, F., Applications of the Hazard Rate Ordering in Reliability and Order Statistics, Journal of Applied Probability, 31, 180-192, 1994.

16. Navarro, J., Tail Hazard Rate Ordering Properties of Order Statistics and Coherent Systems, Naval Research Logistic, 54, 820-828, 2007.

17. Bapat, R.B., Kochar, S.C., On Likelihood-Ratio Ordering of Order Statistics, Linear Algebra and Its Applications, 199, 281-291, 1994.

18. Ma, C., Likelihood Ratio Ordering of Order Statistics, Journal of Statistical Planning and Inference, 70, 255-261, 1998.

19. Navarro, J., Likelihood Ratio Ordering of Order Statistics, Mixtures and Systems, Journal of Statistical Planning and Inference, 138, 1242-1257, 2008.

20. Roychowdhury, S.,Reliability Comparison Of Systems Of Different OrdersUsing Pseudo-Signatures, Electron. J. App. Stat. Anal., 5(2), 199 – 212, 2012.