



*Erciyes University Journal of the Institute of Science and Technology*

*Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*

ISSN 1012-2354

Cilt (Volume): 29, Sayı (Issue): 3, Haziran/June-2013

<http://fbe.erciyes.edu.tr/>



## Kuantum Hall rejiminde bir kuantum Hall çubuğuna uygulanan manyetik alanın ve kapı geriliminin etkisi

\*Teoman ÖZTÜRK, Ülfet ATAV

Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi, Fizik Bölümü, Konya

### Anahtar

### Kelimeler:

Kuantum Hall  
Çubuğu,  
Multigrid  
yöntemi,  
Thomas-Fermi  
yaklaşımı,  
Poisson  
denklemleri

### ÖZET

Kuantum Hall olayının keşfi, yarıiletkenler fiziğinde yeni bir çağır açmıştır. Kuantum Hall olayını açıklamak üzere ortaya atılan modeller, Landau seviyelerinin kısmi ve tam dolu olmasıyla şekillenen sıkıştırılabilir ve sıkıştırılmaz şeritlerin fiziği üzerine yoğunlaşmıştır. Bu çalışmada, sıkıştırılmaz şeritlerin, kuantum Hall çubuğuna uygulanan manyetik alana ve kuantum Hall çubuğunu sınırlayan kapılar üzerindeki gerilime olan bağımlılığı incelenmiştir. Sıkıştırılmaz şeritleri teorik olarak incelemek için, öz-uyumlu hesaplamalarda Thomas-Fermi yaklaşımları kullanılabilir. Öz-uyumlu hesaplamalar çok uzun hesaplama süresi gerektirdiğinden, bu çalışmada Poisson denkleminin çözümünde kullanılan hesaplamaları hızlandırmak için multigrid yöntemi kullanılmıştır.

## Effects of the magnetic field and gate voltage on a quantum Hall bar in quantum Hall regime

### Key Words:

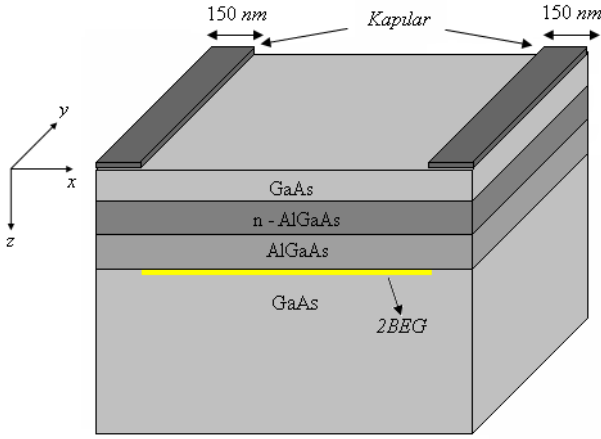
Quantum Hall  
Bar,  
Multigrid  
method,  
Thomas-Fermi  
approximation,  
Poisson  
equation

### ABSTRACT

Discovery of the quantum Hall effect has opened a new era in the semiconductor physics. The models which are put forward to explain the quantum Hall effect are focused on the physics of compressible and incompressible strips formed by partially and fully filled of Landau levels. In this study, the dependence of incompressible strips to the magnetic field applied to the quantum Hall bar and the gate voltages confined the quantum Hall bar are investigated. In order to investigate the incompressible strips theoretically, Thomas-Fermi approximations can be used in the self-consistent calculations. Self-consistent calculations require a very long computational time so that multigrid method is used to accelerate the calculations used in the solution of the Poisson equation in this study.

## 1. Giriş

Kuantum Hall Olayı (KHO), ilk olarak Silisyum katkılı Metal Oksit Yarıiletken Alan Etkili Transistör (Si-MOYAET) yapıda oluşturulan iki boyutlu elektron gazı (2BEG) üzerinde keşfedilmiştir [1]. Bu keşfe göre, düşük sıcaklık ve yüksek manyetik alan altında 2BEG’da gözlenen Hall direnç platoları  $h/e^2$  temel değerine göre analiz edilmiştir. Benzer sonuçlar AlGaAs/GaAs heteroyapısında Tsui ve Gossard [2] tarafından elde edilmiştir. Tüm bu ölçümler kuantum Hall çubuğu olarak adlandırılan kuantum telinde yapılmıştır. Günümüzde Si-MOYAET yapı yerine, daha düzgün sonuçlar elde edilebilen AlGaAs/GaAs heteroyapıları kullanılmaktadır. Bu kuantum telini oluşturabilmek için tabakalı bir yapı, AlGaAs/GaAs heteroekleminde 2BEG oluşturacak şekilde yerleştirilir. Böyle bir yapı şematik olarak Şek.1’de gösterilmiştir. Böyle bir yapıda, elektronları belirli bir bölgeye hapsedmek için üst yüzeye, kapı olarak ifade edilen elektrotlar yerleştirilir ve gerilimle beslenir.



Şekil 1. Kuantum Hall Çubuğunun şematik gösterimi. Yapının boyutları x yönünde 2600 nm, y yönünde 2000 nm ve z yönünde de 1000 nm dir.

Hall direncinde gözlenen platoların varlığının, sıkıştırılabilir şeritler ve sıkıştırılmaz şeritlerin arka arkaya sıralanmasıyla oluştuğu fikri Beenakker [3] ve Chang [4] tarafından ortaya atılmıştır. Chklovskii ve ark. [5], geliştirdikleri elektrostatik modelde sıkıştırılabilir ve sıkıştırılmaz şeritlerin genişliğini ve konumunu nicel olarak elde etmişlerdir. Bu modelde Landau seviyelerinin doluluğu için yapılan öz uyumlu hesaplamalarda Landau seviyelerinin kısmi ve tam dolu olduğu şeritler vardır. Bu durumda yapı, tam ve kısmen dolu seviyelerin bir sırasına sahiptir. Tam dolu Landau seviyelerine sahip bölgelere yeni bir elektron eklenemez. Bu nedenle bu bölgeler, sıkıştırılmaz şerit olarak adlandırılır ve yalıtkan gibi davranır. Kısmi dolu Landau seviyelerine sahip bölgeler ise sıkıştırılabilir şerit olarak adlandırılır ve bu kısımlara elektron eklenebilir. Bu nedenle sıkıştırılabilir şeritler, perdeleme açısından bir metal gibi davranırken, sıkıştırılmaz şeritler bir yalıtkan gibi davranır. Chklovskii ve ark. [5], bu öncü çalışmalarında 2BEG’nin sadece tek bir kenardan sınırlandırıldığını, böylelikle yüzey yoğunluğu ile belirlenen iyi tanımlı bir kimyasal potansiyele sahip olduğunu

varsaymışlardır. Ayrıca düzlem yük yaklaşımını kullanarak, Hall çubuğu geometrisi için Poisson denkleminin analitik çözümlerini yapmışlardır. Düzlem yük yaklaşımında kapıların, donörlerin ve 2BEG’nin aynı düzlemde bulunduğu varsayılır. Ayrıca bu yaklaşımda, akım yönünde yük dağılımının ötelenmesi değişmez seçilmiş, böylelikle problem etkin olarak bir boyutlu elektrostatik probleme indirgenmiştir. Chklovskii ve arkadaşlarının modelinin öz-uyumlu genelleştirmeleri, düzlem yük varsayımı altında, Thomas-Fermi (TF) ve Hartree yaklaşımları kullanılarak Gerhardts ve arkadaşları tarafından yapılmıştır [6-10].

Gerhardts ve arkadaşlarının [6-10] geliştirdiği iteratif yöntem, Poisson denkleminin çözümü için Green fonksiyonlarını içerir. Bir veya iki boyutlu Poisson denkleminin çözümü, basit geometriler için Green fonksiyonları kullanılarak elde edilebilir. Ancak gerçek üç boyutlu sistemlerde ve daha karmaşık geometrilerde Green fonksiyonlarının elde edilmesi ve Poisson denkleminin sayısal çözümü için kullanımı, pratik olarak zordur ve Green fonksiyonlarının sayısal çözümünü yapmak çok uzun hesaplama süreleri gerektirir. Bu nedenle hesaplamamızda, daha önce Gerhardts ve arkadaşları [6-10] tarafından geliştirilmiş yöntem benzer ancak, Green fonksiyonlarını içermeyen modifiye bir yaklaşım [11] kullandık ve her iteratif adımda, sonlu fark yöntemi ile Poisson denklemini ve Thomas-Fermi denklemlerini öz-uyumlu olarak çözdük [12].

Bu çalışmada, bir kuantum Hall çubuğunda sıkıştırılmaz ve sıkıştırılabilir şeritlerin, kapı gerilimine ve manyetik alana olan bağlılığını teorik olarak inceledik.

## 2. Sistemin Elektrostatiği ve Model Sistem

Thomas-Fermi-Poisson yaklaşımı içinde 2BEG’nin elektrostatiği, TF ve Poisson denklemlerinin eşzamanlı çözümünden ibarettir. Gerçekçi bir yaklaşımda Poisson denklemini, 3 boyutlu olarak çözülmelidir. 3 boyutta tam bir öz-uyumlu çözüm elde etmek için Poisson denklemini, kapıların, donörlerin ve 2BEG’nin katkıları hesaba katılarak her adımda elde edilebilir [11].

TF yaklaşımında 2BEG’nin elektron yoğunluğu

$$n_{el}(\vec{r}) = \int dE D(E) f[(E + V(\vec{r}) - \mu)/k_B T] \quad (1)$$

şeklinde verilir. Burada  $D(E)$  durum yoğunluğu,  $V(\vec{r})$  elektrostatik potansiyel ve  $f[(E + V(\vec{r}) - \mu)/k_B T]$  Fermi fonksiyonudur. Bu fonksiyon

$$f[(E + V(\vec{r}) - \mu)/k_B T] = \frac{1}{1 + \exp[(E + V(\vec{r}) - \mu)/k_B T]} \quad (2)$$

şeklinde ifade edilir. Burada  $\mu$  kimyasal potansiyel,  $k_B$  Boltzmann sabiti ve  $T$  de sıcaklıktır. Bir  $B$  manyetik alan şiddeti için durum yoğunluğu

$$D(E) = \frac{g_s}{2\pi\ell^2} \sum_{n=0}^{\infty} \delta(E - E_n) \quad (3)$$

şeklinde verilir. Burada  $g_s = 2$  spin dejenereliği ve  $\ell$  manyetik uzunluktur. Manyetik uzunlukla  $\nu$  doluluk çarpanı arasındaki ilişki

$$\nu = 2\pi\ell^2 n_{el} \quad (4)$$

şeklindedir. Denk. (3)'ün Denk.(1)'de yerine konulmasıyla

$$n_{el}(\vec{r}) = \frac{g_s}{2\pi\ell^2} \sum_{n=0}^{\infty} f[(E_n + V(\vec{r}) - \mu)/k_B T] \quad (5)$$

ifadesi elde edilir. Sistemdeki diğer yüklerle birleştirilen bu elektron yoğunluğu, Poisson denklemi yoluyla  $V(\vec{r})$  elektrostatik potansiyelini belirler:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_{dk} - n_{el}(V(\vec{r}))}{\epsilon} \quad (6)$$

Burada  $\rho_{dk}$ , donörlerden ve kapılardan kaynaklanan yük yoğunluğudur. Denk.(5) ve Denk.(6), toplam elektron sayısının korunumu şartı olan

$$N_0 = \int d^3r n_{el}(\vec{r}) \quad (7)$$

ile birlikte kapalı bir denklemler takımı oluşturur. Bu kapalı takımın öz-uyumlu çözülmesi sonucunda, kimyasal potansiyel,  $V(\vec{r})$  ve  $n_{el}(\vec{r})$  elektron yoğunluğu elde edilebilir.

Denk.(5),  $V(\vec{r})$  potansiyeline nonlineer olarak bağlı olduğundan Denk.(6) da nonlineer bir diferansiyel denklem olur ve bu denklemin sayısal çözümü oldukça zordur. Bu noktada sayısal problemde karşılaşılan kararsızlık ve ıraksama problemlerini aşmak için daha önce Gerhardtts ve arkadaşları [6-10] tarafından kullanılan yaklaşıma benzer bir yaklaşım kullanılmıştır.

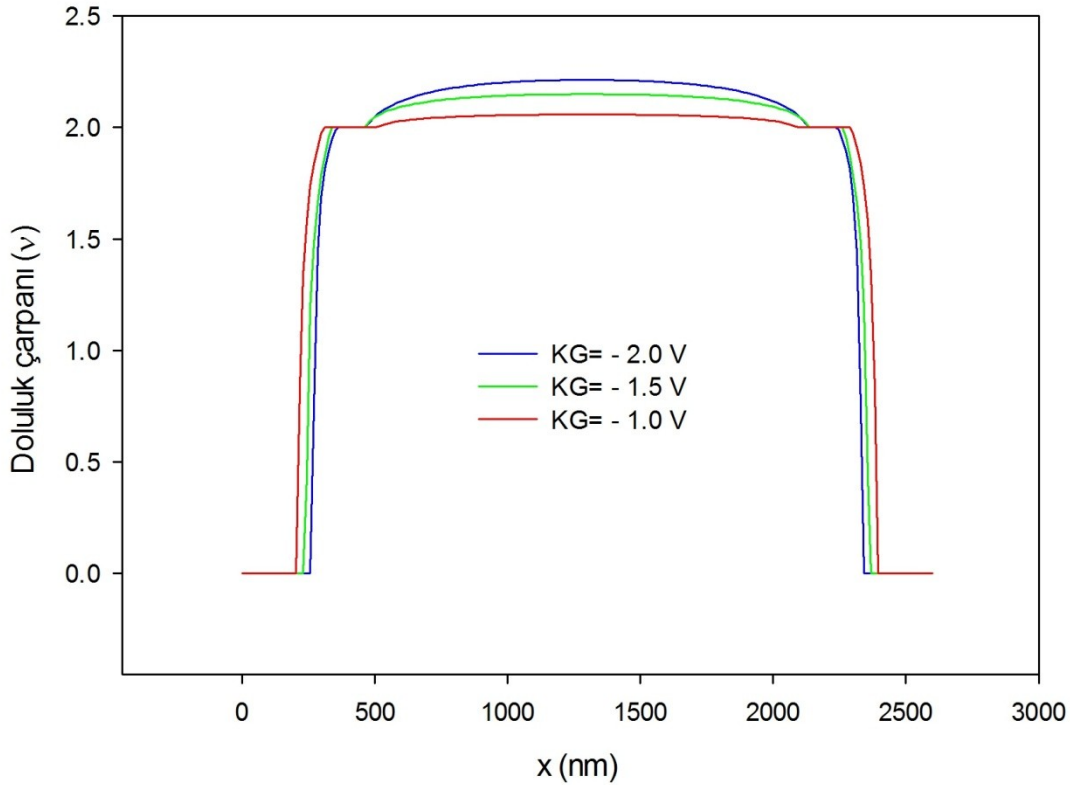
Bu denklem takımının öz uyumlu çözümlerinde hesaplama

süresi çok büyükmektedir. Hesaplamaları hızlandırmak için Poisson denkleminin çözümünde multigrid yöntemi uygulanmıştır. Multigrid yöntemi, kısaca sonlu-fark formülleriyle türetilen ardıl yaklaşımlara ve ayrıklaştırmaya dayanır. Bu yöntemin ayırt edici özelliği, farklı grid sayısının kabadan inceye doğru sıralanan bir sahada kullanılmasıdır. Kaba bir griddeki sayısal çözüm hızlı bir şekilde hesaplanabilir, ancak bu çözüm düşük duyarlılığa sahip olacaktır. Öte yandan bu hesap, daha ince bir gridin iteratif çözümü için bir başlangıç noktası olarak yararlı olabilir.

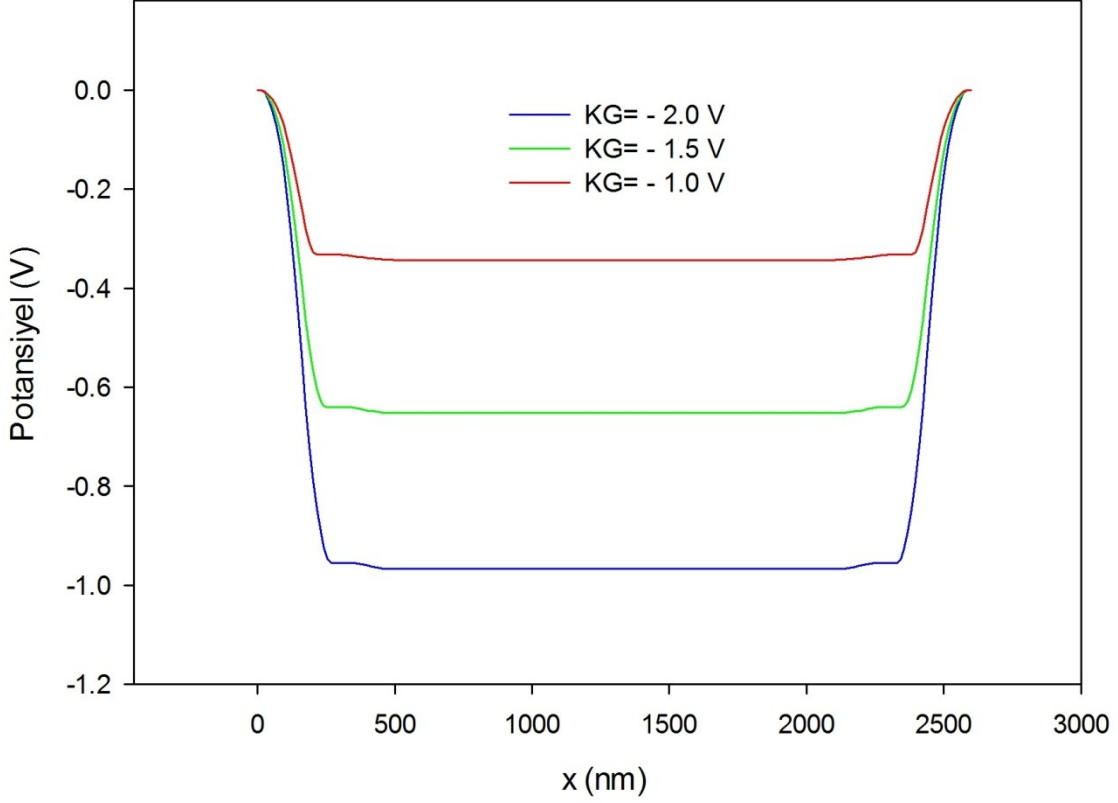
### 3. Sonuçlar ve Tartışma

Hesaplamalarımızda ele aldığımız model yapı, Şek.1'de görülen kuantum Hall çubuğudur. Hesaplamalarımızda bu çubuğun boyutlarını x yönünde 2600 nm, y yönünde 2000 nm ve z yönünde de 1000 nm aldık. Çubuğun her iki yanında sınır koşulları için 150 nm'lik iki kapı yerleştirilmiştir. 2BEG yüzeyden 90 nm, donör tabakası ise 50 nm derinde kabul edilmiştir.

Şek.1'deki yapıda 1.4 K sıcaklıkta ve 7.4 T manyetik alan altında kapı gerilimlerini -1.0 V, -1.5 V ve -2.0 V şeklinde değiştirdiğimizde Şek. 2'de görülen konuma bağlı elektron dağılımı grafiği ile Şek. 3'de görülen konuma bağlı potansiyel grafikleri elde edilmiştir. Ortalama elektron yoğunluğu  $\bar{n}_e$  ve donör yoğunluğu  $n_d$  çubuk boyunca  $\bar{n}_e = n_d = 3.0 \times 10^{11} \text{cm}^{-2}$  olacak şekilde eşit alınmıştır. Yani nötrallik sağlanmıştır.



Şekil 2. Şek.1'de görülen yapıda 1.4 K sıcaklıkta ve 7.4 T manyetik alan altında kapı gerilimlerinin -1.0 V, -1.5 V ve -2.0 V değerleri için elde edilen konuma bağlı elektron dağılımının doluluk çarpanı cinsinden gösterimi



Şekil 3. Şek.1’de görülen yapıda 1.4 K sıcaklıkta ve 7.4 T manyetik alan altında kapı gerilimlerini - 1.0 V, - 1.5 V ve - 2.0 V olarak değiştirilmesi sonucu elde edilen konuma bağlı potansiyelinin gösterimi

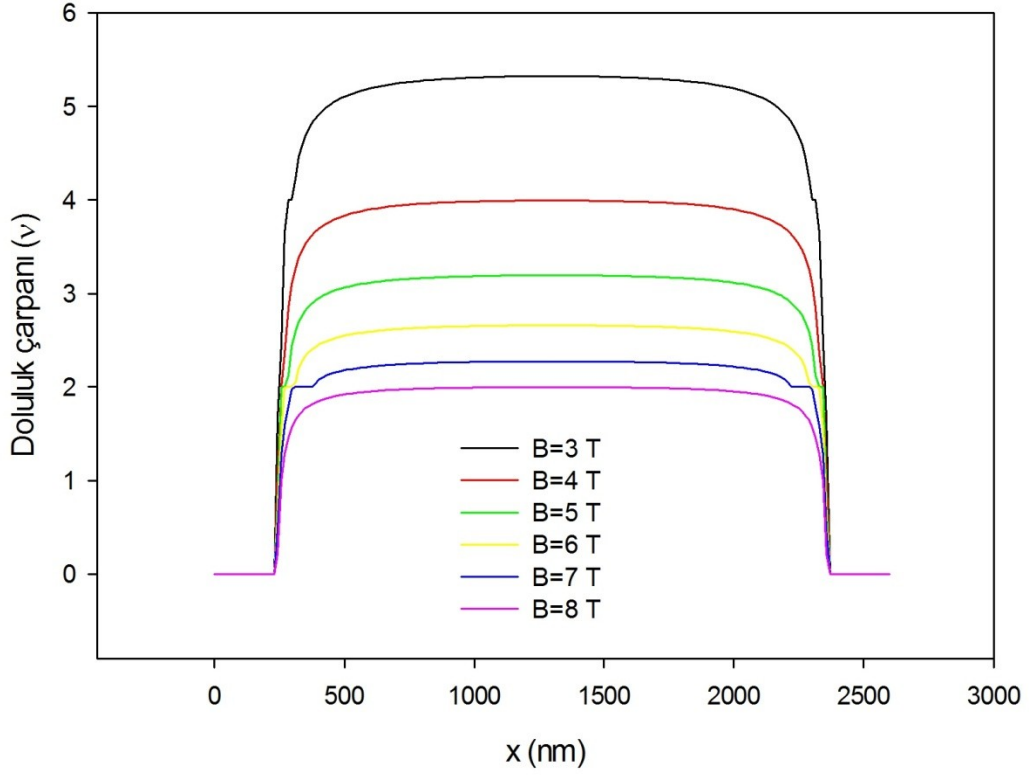
Şek.2’de -1.0 V kırmızı renk, -1.5 V yeşil renk ve -2.0 V mavi renk ile belirtilmiştir. Şek.2’de kapılara uygulanan tüm gerilimlerde elektron yoğunluğu,  $\nu = 2$  civarında platolu bir yapı göstermektedir. Kenardan içeriye doğru giderken elektronlar 1. Landau seviyesine karşılık gelen durumları doldurmaya başlar. Kısmen dolmaya başlayan 1. Landau seviyesinde elektronların rahat hareket etmelerine olanak sağlayan boş yerler olduğu için bu bölge, tıpkı bir metal gibi davranacaktır ve sıkıştırılabilir şerit olarak adlandırılır. Bu esnada hareketli elektronlar, birbirleriyle etkileşerek bir perdeleme potansiyeli oluştururlar. Elektronlar daha sonra Landau seviyesini tam olarak doldurmaya başlarlar. Tam dolu kısma yeni bir elektron eklenemez ve perdeleme potansiyeli oluşmaz. Bu nedenle bu bölgeler sıkıştırılmaz şerit olarak adlandırılır ve yalıtkan gibi davranır. Şek.2’de  $\nu = 2$  civarında gözlenen platolar sıkıştırılmaz şeritlere karşılık gelmektedir. Bu sonuç Chklovskii ve arkadaşlarının [5] geliştirdiği modelle uyum göstermektedir.

Şek.3 Poisson denkleminin çözümünden elde edilen potansiyelleri göstermektedir. Potansiyellerde gözlenen platolar, sıkıştırılabilir şeritlere denk gelen potansiyellerdir. Kapı geriliminin artması, elektronların merkeze doğru toplanmasına sebep olmakta ve kenarlardaki elektronların bulunmadığı bölgede perdeleme olmadığından, potansiyel çok hızlı düşmektedir. Elektronların bulunmadığı bölgenin genişlemesi, potansiyelin daha derinleşmesine sebep olmaktadır. Aynı etki, Şek.2’den de görüldüğü gibi kapı

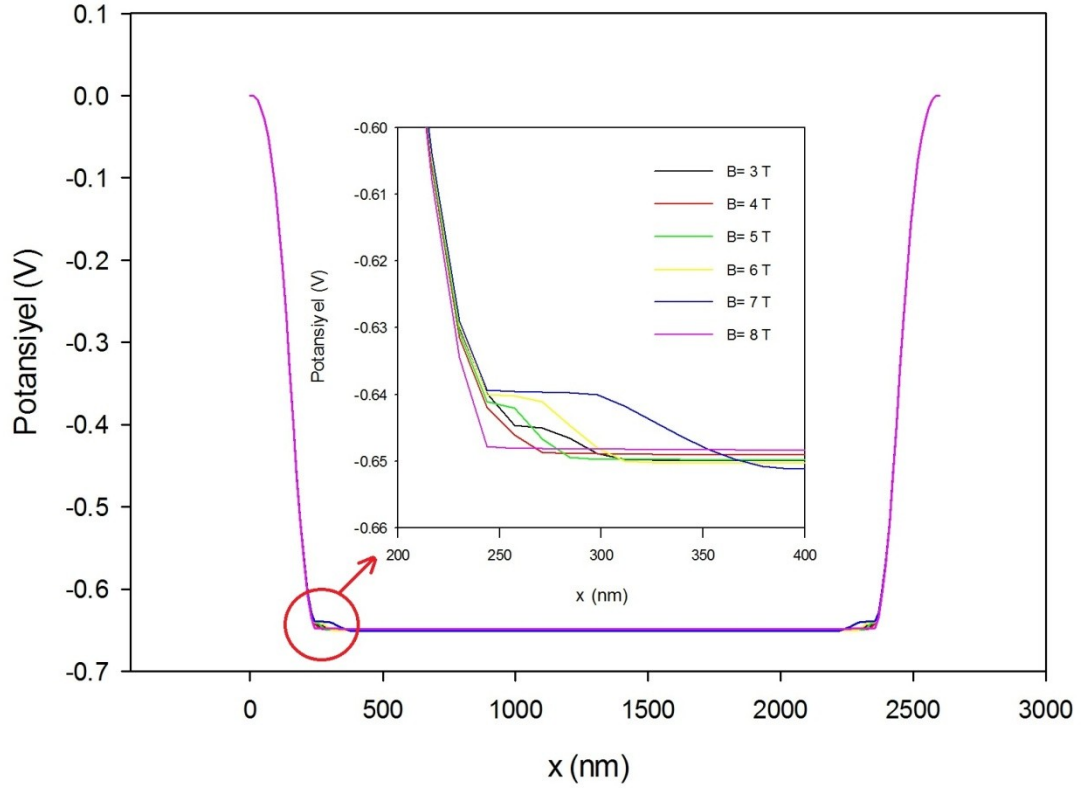
gerilimlerinin artması, sıkıştırılmaz şeritlerin genişliğinin azalmasına neden olmaktadır.

Şek.1’deki yapıda sıcaklığı 1.4 K’de, kapı gerilimini -1.5 V’da ve donör yoğunluğunu  $\bar{n}_e = n_d = 3.0 \times 10^{11} \text{cm}^{-2}$  değerlerinde sabit tutup manyetik alanı 3 T’den 8 T’ya kadar değiştirirsek Şek.4’de görülen konuma bağlı elektron dağılımı grafiği ile Şek.5’de görülen konuma bağlı potansiyel grafiklerini elde ederiz.

Şek.4’de doluluk çarpanının tam sayı olduğu yerlerde yani  $\nu = 2$  ve  $\nu = 4$ ’de sıkıştırılmaz şeritler gözlenmektedir. Denk.(4)’e göre doluluk çarpanının değerinin manyetik alanla ters orantılı olması, Şek.4’de açıkça görülür. Sıkıştırılmaz şeritler, önce yapının orta bölgelerinde ortaya çıkıp manyetik alan şiddetinin azalışıyla birlikte kenarlara doğru ilerler ve bu sırada genişlikleri de daralır. B=4 T civarında  $\nu = 2$  ye karşılık gelen sıkıştırılmaz şerit hemen hemen kaybolur. Manyetik alan şiddeti daha da düşürüldüğünde  $\nu = 4$  deki sıkıştırılmaz şerit ortaya çıkar. B=3 T da bu sıkıştırılmaz şerit oldukça belirgindir. Buna karşın B=7 T’daki sonuçta  $\nu = 2$ ’deki sıkıştırılmaz şeridin kalınlığı oldukça geniş ve  $\nu = 4$ ’deki sıkıştırılmaz şerit gözlenmez. Çünkü manyetik alan arttıkça Landau seviyelerinin dejenereliği yani bir Landau seviyesinin alabileceği elektron sayısı artar. Bu durumda yüksek manyetik alanda mevcut elektron sayısı, ilk Landau seviyesini doldurur ve bir sonrakine gerek kalmaz. Bu durumda B= 8 T’da bir plato gözlenmemesi normaldir.



Şekil 4. Şek.1’de görülen yapıda manyetik alanın 3 T’den 8 T’ya kadar değiştirilmesiyle elde edilen konuma bağlı elektron dağılımının doluluk çarpanı cinsinden gösterimi



Şekil 5. Şekil 1’de görülen yapıda manyetik alanın 3 T’den 8 T’ya kadar değiştirilmesiyle elde edilen konuma bağlı potansiyelin gösterimi



Şekil 5'deki potansiyel grafiğinde, potansiyelde değişimin gözlemlendiği küçük bölge içerdeki küçük ayrıntılı grafik ile gösterilmiştir. Bu ayrıntılı grafikte potansiyelin sabit gibi davrandığı plato bölgeleri, sıkıştırılabilir şeritlere karşılık gelen bölgelerdir. Potansiyelin hızlı değiştiği bölgeler ise sıkıştırılmaz şeritlere ya da elektron bulunmayan bölgelere karşılık gelir.  $B=8 T$ 'da manyetik alan çok büyük olduğundan sıkıştırılmaz şeritler gözlenmez ve potansiyelde ortada geniş bir plato oluşur.  $3 T$ 'dan  $7 T$ 'ya kadar sıkıştırılabilir şeritleri temsil eden platoların genişliği bariz artmaktadır. Sıkıştırılmaz şeritlerin dışında kalan bölgedeki kısımlar, sıkıştırılabilir bölgeleri temsil eder.

Sonuç olarak bu çalışmada, kuantum Hall çubuğunda sıkıştırılmaz şeritlerin oluşumu ve oluşan şeritlerin konum ve kalınlıkları uygulanan manyetik alanın şiddetine ve kapılar üzerindeki gerilime bağlı olarak incelemek üzere Thomas-Fermi-Poisson yaklaşımı ve multigrad yöntemi kullanılmıştır. Hesaplama sonuçlarında hem uygulanan manyetik alanın hem de kapı gerilimlerinin bu şeritlerin ortaya çıkması ve konumları üzerinde çok etkili olduğu gözlenmiştir. Multigrad yönteminin kullanılması ise hesaplamaların hızlandırılmasını sağlamıştır.

Bu çalışma Selçuk Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü tarafından 07101037 numaralı proje ile desteklenmiştir.

## Kaynaklar

1. von Klitzing, K., et al., 1980. New Method for High-Accuracy Determination of The Fine-Structure Constant Based on Quantized Hall Resistance, Phys. Rev. Lett., 45, 494-497.
2. Tsui, D. C. and Gossard, A. C., 1981. Resistance Standard Using Quantization of The Hall Resistance of GaAs-Al<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As Heterostructures, Appl. Phys. Lett., 38, 550.
3. Beenakker C. W. J., 1990. Edge Channels for the Fractional Quantum Hall Effect, Phys. Rev. Lett., 64, 216-219.
4. Chang, A. M., 1990. A Unified Transport Theory for The Integral and Fractional Quantum Hall Effects: Phase Boundaries, Edge Currents, and Transmission/Reflection Probabilities, Solid State Commun., 74, 871-876.
5. Chklovskii, D. B., et al., 1992. Electrostatics of Edge Channels, Phys. Rev. B, 46, 4026-4034.
6. Lier, K. and Gerhardts, R. R., 1994. Self-consistent Calculations of Edge Channels in Laterally Confined Two-dimensional Electron Systems, Phys. Rev. B, 50, 7757-7767.
7. Oh, J. H. and Gerhardts, R. R., 1997. Self-Consistent Thomas-Fermi Calculation of Potential and Current Distributions in a Two-Dimensional Hall Bar Geometry, Phys. Rev. B, 56, 13519-13528.
8. Güven, K. and Gerhardts, R. R., 2003. Self-Consistent Local Equilibrium Model for Density Profile and Distribution of Dissipative Currents in a Hall Bar under Strong Magnetic Fields, Phys. Rev. B, 67, 115327.

9. Siddiki, A. and Gerhardts, R. R., 2003. Thomas-Fermi-Poisson Theory of Screening for Laterally Confined and Unconfined Two-dimensional Electron Systems in Strong Magnetic Fields, Phys. Rev. B, 68, 125315.
10. Siddiki, A. and Gerhardts, R. R., 2004. Incompressible Strips in Dissipative Hall Bars as Origin of Quantized Hall Plateaus, Phys. Rev. B, 70, 195335.
11. Kavruk, A. E., 2010. Kuantum Hall Olayının Nano Ölçekli Yapılarda İncelenmesi, Doktora tezi, Selçuk Üniversitesi, Konya.
12. Öztürk, T., 2012. Kuantum Hall Olayı Tabanlı Araçların Öz-Uyumlu Simülasyonu, Doktora tezi, Selçuk Üniversitesi, Konya.