Bayazit ve Aksoy, Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 29(1):1-9

Erciyes University Journal of the Institute of Science and Technology
Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi
ISSN 1012-2354
Cilt (Volume): 29, Sayı (Issue): 1, Ocak/January-2013
http://fbe.erciyes.edu.tr/

Fonksiyon kavramı: epistemolojisi, algı türleri ve zihinsel gelişimi

İbrahim Bayazit, Yılmaz Aksoy
Erciyes Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Kayseri

Anahtar Kelimeler: Fonksiyon kavramı, epistemolojisi, zihinsel gelişimi, kavram yanılgıları, pedagojiksel öneriler.

ÖZET

Fonksiyon kavramı matematik ders programları içerisinde oldukça önemli bir yere sahiptir. İlköğretimden üniversiteye kadar matematik ders programlarında bu kavrama rastlamak mümkündür. İlköğretim düzeyinde toplama gibi temel aritmetiksel işlemlerin fonksiyon düşüncesini içerdiği söylenebilir; çünkü toplam operatörü IR'den aldığı iki elemanı işleme tabi tuttuktan sonra yine IR'de bir elemana eşlemektedir. Benzer şekilde simetri kavramı fonksiyon düşüncesini içermektedir; çünkü simetri ekseni bir fonksiyon gibi dönüştürme yapar ve bir bölgedeki nesneyi bir başka bölgeye transfer eder. Ortaöğretim düzeyinde fonksiyonlar özel bir konu olarak okutulmakta ve fonksiyon kavramı 'iki kümenin elemanları arasında eşleme yapan bir bağıntı', 'Kartezyen çarpımın bir alt kümesi', ve 'iki değişken arasındaki ilişki' biçiminde farklı şekillerde tanımlanmaktadır. İleri düzey matematik konuları olan integral ve türev kavramlarının öğretimi tamamen fonksiyonlar üzerinde bina edilmiş bulunmaktadır. Topolojik uzayların homeomorfik yapılarının incelenmesinde de fonksiyon düşüncesi aktif olarak kullanılmaktadır. Diğer birçok matematiksel düşünceyle olan yakın ilişkisi dolayısıyla fonksiyon kavramının matematik öğretiminde birleştirici bir düşünce tarzı olarak kullanılması önerilmektedir. Alan yazın taramasından oluşan bu makalenin amacı fonksiyon kavramının epistemolojisi, günümüz modern matematik ders kitaplarında yer aldığı şekliyle kavramın matematiksel doğası ve algı türlerinin incelenmesini içermektedir. Bunun yanı sıra, eldeki makalede fonksiyon kavramının zihinsel gelişimi ve bu süreçte öğrencilerin yaşadıkları zorluklar, kavram yanılgıları ve bunların bilişsel sebepleri öğrenme teorileri ışığında tartışılmaktadır. Son olarak ise, olayın öğretim boyutuna değinilmekte ve sınıf içi öğretimler için pedagojiksel öneriler getirilmektedir.

+69

Epistemology and cognitive development of the function concept

Key Words: The function concept, epistemology, cognitive development, misconceptions, teaching suggestions.

ABSTRACT

The concept of function is considered the most crucial idea in mathematics curricula. It appears in the mathematics curricula from elementary level to undergraduate studies. For instance, basic operations, such as addition, involve the idea of function because they transform elements from IR×IR to IR. The notion of symmetry captures the very essence of the concept; since symmetry line operates as a function transforming (reflecting) entities from one region to another. At the high school level functions are studied within a topic in its own right; it is introduced as a correspondence between the elements of two sets, as a sub-set of a Cartesian product, and as a dependence between two varying quantities. Within a calculus course the concept of derivative and integral takes a function as an argument. At the undergraduate level functions are used to compare abstract mathematical structures; for instance, to illustrate whether or not topologies are homeomorphic. Due to its crucial role and prevailing feature within the mathematics curricula educators suggest that the function concept should be used as a unifying theme in teaching and learning mathematics. This paper aims to provide an extensive literature reviews about the epistemology of the function concept and the cognitive development of this notion. The paper discusses with reference to contemporary learning theories the misconceptions and their sources that the students could develop while learning the functions. In addition, it provides pedagogical suggestion for classroom teachings.

*Sorumlu Yazar (Corresponding author) e-posta: ibayazit@erciyes.edu.tr

1. Giriş

Fonksiyon kavramı matematik ders programları içerisinde oldukça geniş ve önemli bir yere sahiptir. Fonksiyon kavramının matematik öğretiminde birleştirici ve bütünleştirici bir düşünce tarzı olarak kullanılmasının gerektiği belirtilmektedir (NCTM, 1989; Selden ve Selden, 1992). Bu tezin dayandığı temel gerekçe fonksiyon kavramının diğer birçok matematiksel düşünceyle olan yakın ilişkisi ve fonksiyonel düşüncenin – ki fonksiyonel düşünce en genel manasıyla nicel veya nitel çokluklar arasındaki ilişkilerin incelenmesi sürecinde kullanılan bir akıl yürütme tarzı olarak ifade edilebilir – çok farklı alanlara ilişkin problemlerin çözümünde aktif olarak kullanılıyor olmasıdır.

Öğrenciler ilköğretimden üniversiteye kadar eğitimin her aşamasında bir şekilde fonksiyon düşüncesiyle karşılaşmakta ve bu kavramı kullanarak problem çözümleri yapmaktadırlar. Bir sonraki kısımda detaylı olarak açıklanacağı üzere fonksiyon kavramının matematiksel manalarından bir tanesi çokluklar arasında yapılan eşleştirme düşüncesini içermektedir. Bu açıdan bakıldığında bireylerin çok erken yaşlardan itibaren fonksiyon düşüncesini tecrübe etmeye başladıklarını söyleyebiliriz. Örneğin, sayı kavramının öğrenim-öğretim sürecinde somut nesneler ile rakamların eşleştirilmesi (bir kalemin 1 rakamı ile iki kalemden oluşan bir kümenin ise 2 rakamıyla eşleştirilmesi, vs.) veya kişiler ile doğum tarihleri arasında yapılan bire-bir eşleştirmeler fonksiyon düşüncesini içermektedir.

Fonksiyon kavramı iki veya daha fazla değişken arasındaki ilişki olarak da açıklanabilir. Yine bu düşüncenin de gerek güncel yaşamda, gerekse matematik ve fen bilimlerinde yaygın bir şekilde kullanıldığı bilinmektedir. Bir seyahat olayı *yol*, *zaman* ve *hız* gibi üç temel değişken içermektedir ve bunlar arasında karşılıklı bir ilişki söz konusudur. Hız arttıkça birim zamanda alınan yol da artmaktadır; bu durumda *yol*, *hız*'ın bir fonksiyonu olmaktadır. En genel manasıyla fonksiyon girdileri çıktılara dönüştüren dinamik bir süreçtir. Bu açıdan bakıldığında ise doğal sayılar kümesinde dört işlem konusunu öğrenen öğrencilerin farkında olmadan fonksiyon kavramıyla uygulamalar yaptıklarını söyleyebiliriz (Eisenberg, 1991). Çünkü 3+1=4 işlemini düşünecek olursak bu işlemde toplam (+) operatörü IR'den iki elemanı (girdiler) almakta, bunlar arasında bir işlem yürüttükten sonra 4 gibi yeni bir elemana (çıktıya) dönüştürmektedir.

Lise yıllarında fonksiyon kavramı bağımsız bir konu olarak okutulmakta ve kavram matematiksel manası itibariyle derinlemesine incelenmektedir. Lise eğitiminin ilk yılında fonksiyon kavramının esası ve temel özellikleri farklı temsiller üzerinden izah edilirken ilerleyen yıllarda konu kendi içerisinde çeşitlenmekte ve ikinci dereceden fonksiyonlar, trigonometrik fonksiyonlar, üstel ve logaritmik fonksiyonlar, özel değerli fonksiyonlar ve determinant fonksiyonu gibi farklı başlıklar altında incelenmeye devam edilmektedir. Üniversite seviyesinde ise matematik, fizik ve mühendisliğin farklı alanlarında öğrenim gören öğrenciler lise yıllarında edinmiş oldukları fonksiyon bilgilerini geliştirme fırsatı bulmakta ve kavramı ileri düzey matematik konularının öğreniminde bir araç olarak kullanmaktadırlar. Örneğin, analiz dersi kapsamında okutulan limit, süreklilik, türev ve integral kavramları tamamen fonksiyon düşüncesi üzerine bina edilmektedir.

Diferansiyel denklemlerin çözümünde bilinmeyen yerine fonksiyonlar kullanılırken fonksiyonel analiz dersi kapsamında incelenen farklı aksiyomatik uzayların temel yapı taşlarını yine fonksiyonlar oluşturmaktadır. Bu makalede matematik ve diğer fen bilimleri ders programların yansıra güncel yaşamda da sıkça karşımıza çıkan fonksiyon kavramının incelenmesi amaçlanmaktadır. Makale üç ana kısımdan oluşmaktadır. İlk olarak kavramın epistemolojisi ve matematiksel manası açıklanmakta; ikinci kısımda ise fonksiyon kavramına ilişkin algı türleri ve kavramın zihindeki gelişim süreçleri incelenmektedir. Son kısımda ise içeriksel açıdan zengin ve yanılgılardan arınmış fonksiyon bilgisi geliştirebilmeleri için öğrencilere verilebilecek pedagojiksel destekler ve uygulanabilecek öğretim yaklaşımlarından kısaca bahsedilmektedir.

2. Fonksiyon Kavramının Epistemolojisi ve Matematiksel Manası

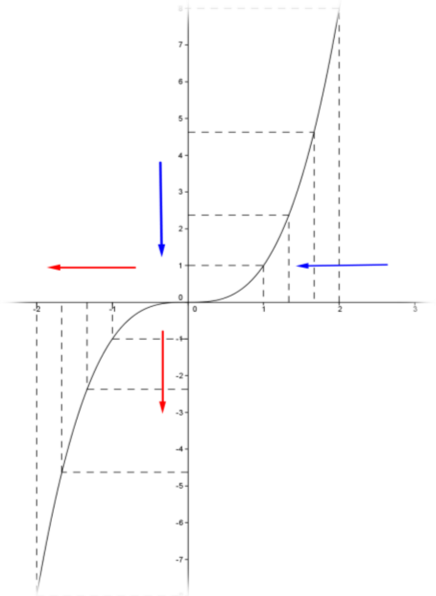
Tarihi süreç içerisindeki gelişimine baktığımızda değişkenler arasındaki ilişkilerin incelenmesini konu edinen çalışmaların fonksiyon kavramının doğuşuna öncülük ettiğini görmekteyiz. Fonksiyon düşüncesi ilk olarak 16. yüzyılda Galileo'nun öncülük ettiği ve devinim ve hareketin (motion) incelenmesini konu edinen bilimsel bir program çerçevesinde yürütülen çalışmalar esnasında fark edilmiştir (Kline, 1976, aktaran Malik, 1980). Bu aşamada değişkenler arasındaki ilişkilerin daha çok eğri grafiklerinden oluşan geometrik ortamlarda ve sınırlı aralıklarda incelenmesi söz konusu idi. Takip eden yıllarda Euler, Bernoulli, Leibniz ve Fourier gibi birçok bilim insanı tarafından yapılmış olan çalışmalar fonksiyon kavramının gelişimine önemli katkılar sunmuştur (geniş bilgi için bakınız Malik, 1980; Mrkovits, v.d., 1986; Kleiner, 1989; Boyer, 1968). Matematiksel bir terim olarak '*fonksiyon*' ifadesi ilk olarak 1673 yılında Leibniz tarafından kullanılmıştır (Ponte, 1992).

Fonksiyon kavramıyla ilişkili olarak *sabit terim*, *değişken* ve *parametre* kavramları da yine Leibniz tarafından literatüre kazandırılmıştır. Bu süreçte kavram hem genişlemiş – değişkenler arasındaki ilişkiler sadece grafiksel değil aynı zamanda analitik (cebirsel) ortamlarda da incelenmeye başlanmış ve bu incelemeler sonsuz sayıdaki değerler için yapılmıştır – hem de matematiksel manası itibariyle netlik kazanmaya başlamıştır.

Neticede, 1837 yılında Drichlet tarafından bugünkü matematik kitaplarında gizli bir şekilde varlığını sürdüren ve değişkenler arası ilişki mantığı üzerine bina edilmiş olan fonksiyon tanımı sunulmuştur. Drichlet tarafından yapılan fonksiyon tanımı şu şekilde ifade edilebilir:

x ve y belli bir kural çerçevesinde birbirlerine bağlı iki değişken olsun. Eğer, x değişkenindeki her değişime karşın (x'e verilen her değere karşın) y değişkeninde de bir değişim söz konusu oluyorsa (bir ve yalnız bir y değeri elde ediliyorsa) y'ye x'in bir fonksiyonu denir (Boyer, 1968, s. 600).

Tanımdan anlaşıldığı üzere fonksiyon kavramının matematiksel manalarından bir tanesi iki veya daha çok değişken arasında var olan bir ilişki olduğu düşüncesini içermektedir. Bu mananın anlaşılması için $y=x^3$ ifadesini göz önüne alalım. Bu ifade de x bağımsız, y ise bağımlı değişkendir ve x'e atanan her bir değere karşın y yeni bir değer alır. Diğer bir ifadeyle, y deki değişim x deki değişime bağlıdır. Örneğin, $x=-2$ için $y=-8$, $x=1$ için $y=1$ ve $x=2$ için $y=8$ değerlerini almaktadır ve bu durum x'e verilecek her reel sayı değeri için benzer şekilde devam etmektedir. Bu iki değişken arasındaki ilişkinin gelişimi grafiksel ortamda çok daha genel bir açıdan görülebilir (bakınız Şekil 1).



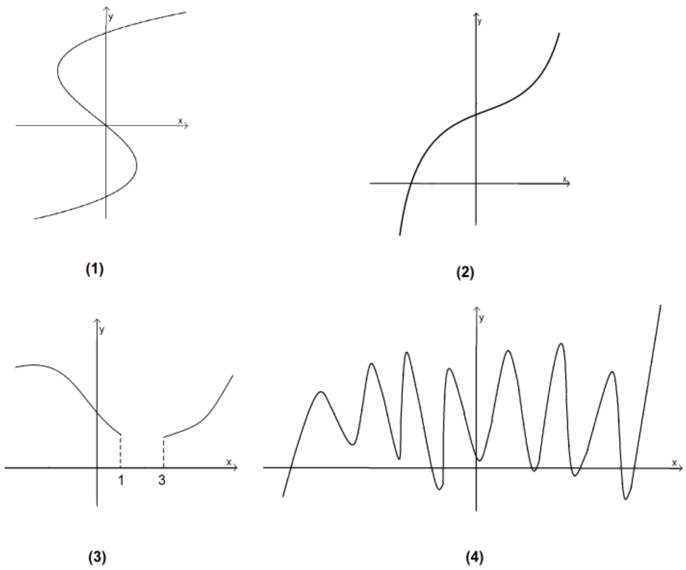
Şekil 1. *y=x*^{3} fonksiyonun grafiğinde x ve y değişkenlerinin değişimi

Cantor tarafından kümeler teorisinin ortaya atılmasıyla birlikte fonksiyon kavramının gelişim süreci yeni bir boyut kazanmış ve fonksiyon iki kümenin elemanları arasında yapılan eşlemeler olarak algılanmaya başlanmıştır (Ponte, 1992). Bu yeni anlayışla birlikte küme kavramı işin içerisine girmiş ve değişkenler arasındaki ilişkilerin incelenmesinin ancak bir fonksiyonun tanımlı olduğu kümeler için mümkün olabileceği düşüncesi kabul edilmiştir. 1939 yılında ise Baurbaki fonksiyon kavramını iki kümenin elemanları arasında eşlemeler yapan özel bir bağıntı olarak tanımlamıştır (Markovits, v.d., 1986). Yapılan bu son tanımlama günümüz modern matematik kitaplarında okutulmakta olan fonksiyon düşüncesini içermektedir. Bu bağlamda örnek bir tanım şu şekilde verilebilir:

> *A ve B boş olmayan iki küme ve f, A'dan B'ye bir bağıntı olsun. Eğer f bağıntısı A kümesindeki her elemanı B kümesinde bir ve yalnız bir elemana eşliyorsa bu bağıntıya A'dan B'ye bir fonksiyon denir.*

Bu tanım bir yandan fonksiyon kavramını sınırlandırıp belli bir kuramsal çerçeveye oturturken diğer yandan anlamsal olarak genişletmekte ve kavrama yeni boyutlar kazandırmaktadır. Sınırlandırma kavramın esasının ve temel özelliklerinin belirlenmesiyle alakalı bir durumdur. Verilen tanımdan fonksiyonun esası itibariyle tanım ve değer kümelerinin elemanları arasında eşlemeler yapan bir bağıntı, dolayısıyla tek bir matematiksel nesne olduğu açıkça anlaşılmaktadır. Ancak bu matematiksel nesnenin anlam kazanabilmesi için kümelere ihtiyaç vardır; bu nedenle tanım ve değer kümeleri fonksiyon kavramının ayrılmaz birer parçası olarak kabul edilmektedir. Tanımda bir bağıntının fonksiyon olabilmesi için sağlaması gereken iki temel özellik vurgulanmaktadır. Birincisi ve açıkça vurgulanan özellik tanım kümesindeki ***her elemanın*** değer kümesinde ***bir ve yalnız bir elemana*** eşlenmesi şartını içermektedir. Bu özellik bir bağıntının fonksiyon olabilmesi için sağlaması gereken en temel özelliktir. Genişletme ise tanım ve değer kümelerinin elemanları arasındaki ilişkilerin sayısal bir ilişkiden ibaret olmadığı, bu nedenle bir fonksiyonun eşlemeleri cebirsel veya aritmetiksel bir kural aracılığıyla yapmak zorunda olmadığı, bu eşlemeleri tamamen gelişigüzel bir şekilde yapabileceği düşüncelerini içermektedir. Bu durum kısaca *gelişigüzel eşleme yapabilme özelliği* olarak adlandırılmaktadır. Bu özellik aynı zamanda tanım ve değer kümesindeki elemanların reel sayıların dışında her türlü nesneleri içerebileceği düşüncesini de içermektedir. Gelişigüzel eşleme yapabilme özelliği cebirsel ifadeler ve düzgün artan veya azalan grafiklerin dışında çok farklı şekillerde tanımlanmış olan bağıntılarında fonksiyon olarak kabul edilmesinin önünü açmıştır. Örneğin, tanım kümesinin alt aralıklarında farklı şekillerde tanımlanan bağıntıların fonksiyon olarak kabul edilebilmeleri bu özellik sayesinde mümkün olmaktadır.

Fonksiyon kavramının matematiksel manasının daha iyi anlaşılabilmesi için birkaç örnek üzerinde çalışalım. Aşağıda verilen grafikler (Şekil 2) incelendiğinde birinci bağıntının fonksiyon belirtmediği açıkça görülmektedir, çünkü bu bağıntı tanım kümesindeki bir elemanı değer kümesinde birden fazla elemana eşlemekte ve dolayısıyla tanımda verilen koşulları sağlamamaktadır. İkinci bağıntı tanım kümesindeki her elemanı değer kümesinde bir ve yalnız bir elemana eşlediği için bir fonksiyon belirmektedir. Üçüncü bağıntı hakkında karar verebilmek için tanım kümesinin netleştirilmesi gerekmektedir. Eğer IR'de tanımlanmış ise fonksiyon belirtmez; çünkü bu durumda tanım kümesinde açıkta eleman kalmaktadır. Ancak, tanım kümesi IR-[1,3] biçiminde yeniden belirlenmesi durumunda verilen bağıntı fonksiyon olma şartlarını sağladığı görülecektir. İlk üç grafiğe kıyasla dördüncü grafiğin yapısında bir düzensizliğin var olduğu açıktır. Bu grafikle temsil edilen bağıntının cebirsel yazılımla ifade edilmesi mümkün değildir, ancak bu durum söz konusu bağıntının fonksiyon olmadığı manasına gelmez. Grafiğin yapısındaki düzensizlik elemanlar arasındaki eşlemelerin gelişigüzel bir şekilde yapılmış olmasından kaynaklanmaktadır ki bu özellik fonksiyon olmasına mani değildir. Dikkatlice incelendiğinde tanım kümesindeki her elemanın değer kümesinde bir ve yalnız bir elemana eşlendiği, dolayısıyla da bu bağıntının bir fonksiyon olduğu anlaşılmaktadır.



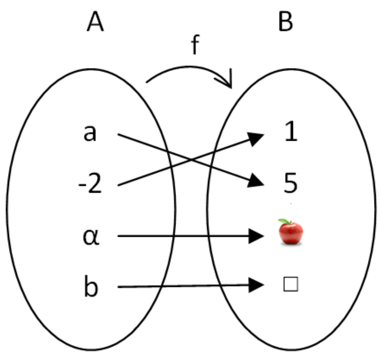
Şekil 2. Grafik örnekleri

Cebirsel olarak verilen <u>ve IR'de tanımlı</u> aşağıdaki bağıntılara bakacak olursak ilk iki bağıntının her şart ve koşul altında fonksiyon belirttiğini söyleyebiliriz. Birinci bağıntı IR deki her elemanı yine IR'de bir elemana eşlemekte ve tanım kümesinde ise hiçbir eleman açıkta kalmamaktadır. İkinci bağıntı ise bütün reel sayıları tek bir elemana (3) eşlediği için sabit bir fonksiyondur. Üçüncü ve dördüncü bağıntıların reel sayılar kümesinde bir fonksiyon belirtmedikleri açıktır; ancak tanım kümeleri IR-{-3,3} ve [-1,1] şeklinde yeniden belirlenecek olursa yine bu bağıntılarında birer fonksiyon olduğunu söyleyebiliriz. Beşinci bağıntının ise parçalı bir fonksiyon olduğu, [0, ∞) alt aralığında üstel fonksiyon ve (-∞, 0) alt aralığında ise birim fonksiyon olarak eşleştirme ve dönüştürmeler yaptığı anlaşılmaktadır.

1. $f(x)=3x+2$ **2.** $f(x)=3$ **3.** $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-9}$

4. $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ **5.** $f(x)=\begin{cases} 2^x, \ x \geq 0 \ ise, \\ x, \ x < 0 \ ise \end{cases}$

Venn şeması biçimindeki yazılımlar fonksiyon düşüncesinin esasını ve özelliklerini açıklamak için pedagojiksel açıdan oldukça güçlü temsillerdir. Bu temsillerin kullanıldığı ortamlarda fonksiyon tek bir nesne olarak dikkatlere sunulurken yaptığı eşlemeler ise oklarla gösterilmektedir. Bu tür temsillerde görsellik ön plandadır; dolayısıyla yapılan eşleme işlemlerinin takibi ve bu eşlemelerin fonksiyon olma şartlarını sağlayıp sağlamadığı kolayca anlaşılabilmektedir. Bunların yanı sıra *gelişigüzel eşleme yapabilme özelliği* de bu tür gösterimsel ortamlarda çok daha iyi anlaşılmaktadır. Örneğin, aşağıdaki *f* fonksiyonu *a* elemanını 5 sayısına α elemanını ise elmaya eşlemektedir ki bu eşlemenin ne aritmetiksel nede cebirsel hiçbir mantığı yoktur; tamamen gelişigüzel bir şekilde yapılmıştır.

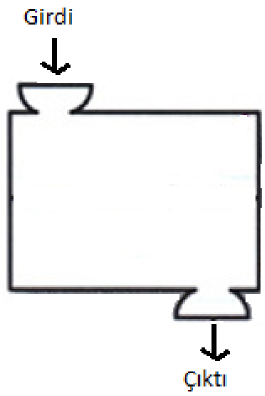


Şekil 3. *f* fonksiyonunun Venn şeması ile gösterimi

Venn şemasına kıyasla sıralı ikililerden oluşan liste biçimindeki yazılımların daha soyut temsiller olduğunu söyleyebiliriz. Bu tür ortamlarda fonksiyon gizli bir şekilde bulunmaktadır; dolayısıyla fonksiyonun anlaşılması ve yaptığı eşlemelerin tanımda belirtilen şartları sağlayıp sağlamadığının tespiti zorlaşmaktadır. Liste biçimindeki yazılımlar '*fonksiyon özel bir bağıntıdır; bağıntı kartezyen çarpımın bir alt kümesidir; dolayısıyla her fonksiyon, kartezyen çarpımın bir alt kümesidir*' türünden kavramlar arası ilişkilerin kurulmasına olanak sağlamaktadır. Ancak, bu ilişkiler zinciri bir küme üzerinde tanımlanmış olan kartezyen çarpımın her bir alt kümesinin bir fonksiyon olabileceği düşüncesinden hareketle her fonksiyonu tek bir nesne (zihinsel bir obje) olarak algılayabilme yeteneği gerektirir ki bu oldukça ileri düzey ve bir o kadar da soyut bir düşünce tarzıdır.

Son olarak, en genel manasıyla fonksiyon girdileri çıktılara dönüştüren dinamik bir süreç (bir mekanizma) olarak ifade edilebilir. Fonksiyon kavramının bu şekilde anlaşılması bir önceki tanımda vurgulanan fonksiyonun elemanlar arasında eşleme yapan bir bağıntı olduğu düşüncesini içermektedir, çünkü girdilerin çıktılara dönüştürülmesi aynı zamanda elemanlar arasında eşlemelerin yapıldığı manasına gelir. Ancak burada kavramın temel özelliklerine vurgu yapılmamaktadır.

Fonksiyon kavramının bilişsel temelini (cognitive root) (DeMarois ve Tall, 1999) oluşturduğu belirtilen bu düşünce tarzı güncel yaşamda ve matematikle alakalı kaynaklarda karşılaşılan birçok olgu ve düşüncenin anlaşılması noktasında kolaylık sağlamaktadır. Bu bakış açısından matematiksel bir kavram olan yansıma simetrisi bir bölgedeki şekli veya cismi diğer bir bölgeye yansıttığı için fonksiyon işlevi görürken ham maddeleri alıp belli bir süreçten geçirdikten sonra işlenmiş ürünler veren bir fabrika veya makine de (bakınız Şekil 4) bir fonksiyon olarak kabul edilebilir.



Şekil 4. Fonksiyon makinesi

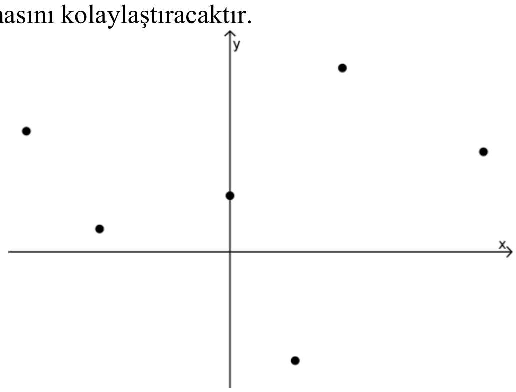
3. Algı Türleri ve Kavramın Zihindeki Gelişimi

Bir önceki kısımda açıklandığı üzere epistemolojik gelişimine paralel olarak fonksiyon kavramı farklı şekillerde tanımlanmış bulunmaktadır. Yapılan tanımlamalar içeriksel açıdan oldukça benzer düşünceleri ifade etmekle birlikte aralarında bir takım farklılıkların bulunduğu da bir gerçektir. Bu farklılıklar gerek matematikte gerekse diğer disiplinlerde fonksiyon kavramını kullanarak farklı uygulamaların yapılmasına olanak sağlamaktadır. Kısaca tekrar etmek gerekirse fonksiyon kavramına ilişkin algı türlerinden birincisi fonksiyonun '*iki değişken arasındaki ilişki olduğu, dolayısıyla bağımsız değişkendeki değişime karşın bağımlı değişkende de bir değişimin*' olacağı düşüncesini içermektedir. Kavramın ilk keşfi sırasında ortaya çıkan bu düşünce günümüz matematik kitaplarında ve ilgili kaynaklarda gizli bir şekilde varlığını sürdürmektedir. Özellikle, analiz dersi kapsamında yapılan uygulamalarda bu düşünce tarzı yaygın olarak kullanılmaktadır. İkincisi, küme kavramı üzerine inşa edilmiş olan fonksiyon düşüncesidir ki bu düşünce fonksiyon kavramını '*tanım kümesindeki her elemanı değer kümesinde bir ve yalnız bir elemana eşleyen özel bir bağıntı*' olarak kabul etmektedir. Günümüz matematik kitaplarında açıkça vurgulanan fonksiyon düşüncesi bu ikinci düşünceyi içermektedir. Fonksiyon kavramına ilişkin üçüncü algı türü ise fonksiyonun girdileri çıktılara dönüştüren dinamik bir süreç olduğu düşüncesini içermektedir. Söz konusu algı türleri fonksiyon kavramının sunumunda kullanılan temsiller, fonksiyonların alt kavramları (parçalı fonksiyon, sabit fonksiyon, üstel ve logaritmik fonksiyon, vs.) ve fonksiyon düşüncesinin kullanıldığı problem çözümleri gibi değişik faktörlerle birlikte düşünüldüğünde bireylerin bu kavrama ilişkin sahip oldukları bilgi ve düşünceler kalite açısından farklılık gösterebilmektedir. Esas itibariyle fonksiyonların sunumunda kullanılan temsillerin farklılığı ve bu kavrama ilişkin çok sayıda alt kavramın varlığı fonksiyon düşüncesinin anlaşılmasını zorlaştıran en temel faktörler olarak görülebilir (Eisenberg, 1991). Fonksiyon konusunda sahip olunan bilginin kalite açısından incelenmesi ve izah edilmesi için farklı teorik yapılardan yararlanılabilir. Bunlardan ilki *işlemsel bilgi* ve *kavramsal bilgi* düşüncelerini içermektedir (Hiebert ve Lefevre, 1986).

Kısaca açıklamak gerekirse işlemsel bilgi bir kavrama ilişkin kurallar, formüller ve notasyonlar ile bunlarla yapılan işlemler hakkında bireylerin sahip oldukları bilgi birikimlerini ve uygulama yapabilme becerilerini içerir (Hiebert ve Lefevre, 1986). İşlemsel bilgi kavrama ilişkin anlamsal bir algı ve düşünceden yoksundur. Bu düzeydeki öğrenciler sembollerin, kuralların ve formüllerin kullanımına ilişkin bir takım mekaniksel bilgi ve beceriler geliştirmiş olabilirler ancak yaptıkları işlemlerin ve kullandıkları formül ve bağıntıların arkasındaki matematiksel manaların farkında değillerdir. Burada düşüncenin objesi matematiksel kavram değil, kurallar, formüller ve yapılan işlemlerin kendisidir. Örneğin, işlemsel bilgi sahibi olan öğrenciler IN'de tanımlı $f(x)=3x^2-5x+1$ fonksiyonunda x gördüğü yere 1, 3 ve 5 gibi farklı elemanları koyup gerekli işlemleri yaparak bu elemanların görüntülerini elde edebilirler. Ancak, eldeki fonksiyonun doğal sayılar kümesindeki her elemanı yine bu kümede bir ve yalnız bir elemana eşlediği (dönüştürdüğü) düşüncesinden yoksundurlar. Bu düzeydeki öğrenciler verilen fonksiyonu sıradan bir cebirsel ifade olarak algılayabilir ve sadece işlem yapmanın bir aracı olarak görebilirler. Benzer şekilde, IR'de $f(x)=3x+2$ ve $g(x)=x^2+1$ biçiminde tanımlanmış olan fonksiyonlar arasında bileşke işlemini uygulayabilir, $f(x)$ de x değişkeni yerine $g(x)$ in kuralını yazıp gerekli işlemleri yaparak $(fog)(x)$ fonksiyonunu elde edebilirler. Ancak, mekaniksel olarak yürüttükleri bu işlemin ne manaya geldiğinin farkında değillerdir.

Kavramsal bilgi yanılgı ve eksik öğrenme gibi sınırlılıklardan uzak, içeriksel açıdan doğru, ilişkisel açıdan ise zengin bir bilgi türüdür. Bir kavrama ilişkin doğru bilgiye sahip olmak her şeyden önce o kavramın esasını ve temel özelliklerini bilmeyi gerektirir. Ancak, kavramsal bilgiyi sadece bu boyutuyla anlamak yetersiz kalır; çünkü matematikte bir kavram kendi başına bir mana ifade etmez, ne zamanki diğer kavramlarla ve geçmişten getirilen bilgilerle ilişkilendirilir o zaman söz konusu kavram anlam kazanır ve kavramsal öğrenme dediğimiz olay gerçekleşir (Hiebert ve Lefevre, 1986). Bir kavramın esası ve temel özelliklerinin iyi anlaşılması kavramsal bilginin gelişimi için oldukça önemlidir. Ancak, çok daha önemlisi bireyler eldeki kavram ile diğer matematiksel düşünceler arasında ilişkiler kurarak ve bunlar arasındaki benzerlik ve farklılıklar üzerinde yoğun düşünsel aktiviteler yürüterek kavramsal bilgiler geliştirebilirler. Kavramsal bilginin edinilmesi noktasında bir kavramın sunumunda kullanılan temsiller arasında ilişkilerin kurulması da büyük önem arz etmektedir. Aslında, kullanılan temsiller değişse de eldeki kavramın esası ve temel özellikleri itibariyle aynı kaldığının anlaşılması kavramsal bilginin edinilmiş olduğunun, diğer bir ifadeyle kavramının esasının (the core concept of function) (Thompson, 1994) anlaşılmış olduğunun, en temel göstergesidir. Örnek vermek gerekirse, fonksiyon kavramının bağıntı, kartezyen çarpım ve kümeler konularıyla içeriksel açıdan çok yakın ilişkisi vardır. Fonksiyon özel bir bağıntı, bağıntı kartezyen çarpımın bir alt kümesi, kartezyen çarpım ise birinci ve ikinci bileşenleri bir (veya iki farklı) kümeden çaprazlama yöntemiyle seçilmiş tüm sıralı ikilileri içeren yeni bir kümedir. Fonksiyonlarla alakalı kavramsal bilginin gelişimi için söz konusu kavramlar arasındaki ilişkiler zincirinin anlaşılması önem arz etmektedir. Bir önceki kısımda da izah edildiği üzere fonksiyon kavramının iki temel özelliği vardır. Birincisi tanım kümesindeki ***her elemanı*** değer kümesinde ***bir ve yalnız bir elemana*** eşleme koşuludur. İkincisi ise eşleme işleminin belli bir işlemsel zincir veya cebirsel kural aracılığıyla yapılmak zorunda olmadığı, bir önceki koşul sağlanmak şartıyla bu eşleme işleminin tamamen gelişigüzel yapılabileceği hususudur. Ancak uygulama alanları ve kullanılan temsiller düşünüldüğünde basit gibi görünen bu özelliklerin anlaşılmasının oldukça karmaşıklaştığı ve verilen bağıntıların fonksiyon olup olmadığını tespiti noktasında öğrencilerin zorlandıkları görülmektedir. Çok sayıda öğrencinin x ve y gibi notasyonlar içeren bütün ifadeleri fonksiyon olarak kabul ettikleri bilinmektedir (Vinner, 1983). Cebirsel ifadelerin görsel özelliklerine yoğunlaşan öğrenciler ise fonksiyon ile denklem arasındaki mana farkını anlayamamaktadırlar. Hâlbuki cebirsel ifadeler ve bu çerçevede kullanılan notasyonlar kullanım amaçlarına bağlı olarak farklı ortamlarda farklı manalar ifade ederler. Bu durum sembollerin doğasında var olan dualizimden kaynaklanmaktadır (Gray ve Tall, 1994). Örneğin, $y=2x+4$ ifadesini ve bunun grafiksel gösterimini (y-eksenini (0,4), x-eksenini ise (-2,0) noktasında kesen bir doğru grafiği) düşünecek olursak bu ifade hem birinci dereceden iki bilinmeyenli bir denklem, hem de IR de tanımlı bir fonksiyon olarak algılanabilir. Ancak, aynı gösterimsel araçlarla temsil edilen bu iki kavram birbirinden tamamen farklıdır. Denklem sınırlı veya sonsuz sayıda eleman için sağlanan bir eşitlik hali (yani statik bir durum) iken fonksiyon her girdiye karşın bir tane çıktı üreten dinamik bir dönüştürme sürecidir. İşte aynı araçlarla temsil edilebilen denklem ve fonksiyon kavramları arasındaki bu farkın anlaşılması halinde kavramsal bilgiden söz edilebilir.

Yine öğrencilerin sınırlı sayıda ayrık noktalardan oluşan grafikleri (bakınız Şekil 5) ve genel gelişimi itibariyle düzensizlik arz eden ve sürekli iniş-çıkışlar gösteren grafikleri (bakınız Şekil 2.4) fonksiyon olarak kabul etmedikleri bilinmektedir (Vinner, 1983; Dubinsky ve Harel, 1992). Bu tür bir yanılgının fonksiyonun temel özelliklerinden olan *gelişigüzel eşleme yapabilme özelliğinin* anlaşılmamış olmasından, yani fonksiyonlara ilişkin kavramsal bilgi eksikliğinden kaynaklandığı açıktır. İşte bu noktada temsiller arası ilişkilendirmeler kavramsal bilginin gelişimi için önemlidir. Şekil 5 deki grafikle temsil edilen bağıntının Venn şeması veya liste yöntemiyle yeniden yazılması sınırlı sayıda ayrık noktadan oluşan grafiklerinde bir fonksiyon belirtebileceği düşüncesinin anlaşılmasını kolaylaştıracaktır.



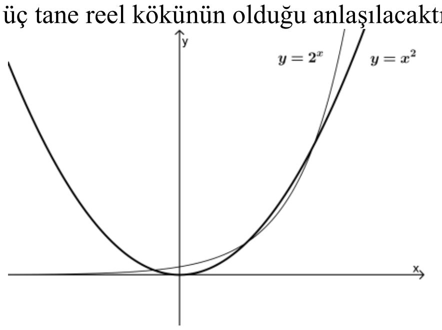
Şekil 5. Ayrık noktalardan oluşan grafik örneği

Çok sayıda öğrencinin ise tanım kümesindeki her elemanın değer kümesinde bir ve yalnız bir elemana eşlenmesi özelliğini Venn şeması ve liste biçimindeki gösterimlerde dikkate aldıkları, ancak grafiksel ve cebirsel ortamlarda bu özelliği anlayamadıkları bilinmektedir. Öğrenciler düzgün ve sürekli olan bütün eğri grafiklerinin fonksiyon belirteceği gibisinden yanlış bir algı geliştirebilmektedirler (örnek için bakınız Şekil 2). Bu tür grafiklerinin fonksiyon olup olmadığını tespit etmek için öğrencilere *düşey doğru testi* verilmekte ve bu bağlamda *y*-eksenine paralel çizilen doğrulardan herhangi biri grafiği birden fazla noktada keserse bu grafiğin fonksiyon olamayacağı vurgulanmaktadır. Düşey doğru testi genellikle işlemsel bir bilgi olarak öğrenilip uygulanmaktadır. Çok az sayıda öğrenci bu kuralı fonksiyonun tanımında vurgulanan *tanım kümesindeki her elemanın değer kümesinde bir ve yalnız bir elemana eşlenmesi* düşüncesiyle ilişkilendirerek kavramsal bir bilgi geliştirebilmektedir. Yine öğrenciler tanımda vurgulanan şartları sağlayıp sağlamadığına bakmaksızın *x* ve *y* gibi notasyonlar içeren bütün cebirsel ifadeleri fonksiyon olarak kabul etmektedirler. Fonksiyon kavramına ilişkin zihinsel imajların kullanımını içeren bu tür bilgilerin işlemsel bilgi olduğu açıktır. Öğrenciler

$$y=\sqrt{x} \text{ veya } y=\frac{x+1}{x^2-4}$$

şeklindeki bağıntıları tanımın ışığında inceleyip gerekli koşulları sağlayıp sağlamadığını tespit edebilme yeterliliğine ulaştıklarında kavramsal bilgi edinmiş olduklarını söyleyebiliriz.

Fonksiyonlar konusu bağlamında kavramsal bilgi edinmiş olmanın bir diğer önemli göstergesi ise farklı temsiller arasındaki, özellikle de cebirsel ve grafiksel temsiller arasındaki, anlamsal ilişkileri görebilmek ve bu temsillerden biri üzerinde yapılan değişikliğin diğeri üzerindeki yansımalarını zihinde canlandırabilmektir. Kavramsal bilginin en temel özelliklerinden bir tanesi de adapte edilerek farklı ortamlarda kullanılabilir olmasıdır. Fonksiyonlar konusunda kavramsal bilgi sahibi olmak bireylere problem çözümlerinde fonksiyon düşüncesini (diğer bir ifadeyle fonksiyonel düşünceyi) aktif olarak kullanabilme olanağı sağlar. Örneğin, '$x^2=2^x$ *denkleminin kaç tane reel kökü vardır*' sorusunu düşünelim. Cebirsel yöntemlerle bu problemin çözümünü yapmak mümkün değildir. Kimi öğrenciler deneme-yanılma stratejisini kullanılarak problemi çözmeye çalışabilir, ancak bu da etkili bir yöntem değildir; çünkü deneme-yanılma stratejisini kullananlar eldeki eşitliğin 2 ve 4 değerleri için sağlandığını, dolayısıyla denklemin iki tane reel kökünün olduğunu iddia edeceklerdir. Hâlbuki eşitliğin her iki yanındaki ifadeler birer fonksiyon olarak algılanıp ($y=x^2$ ve $y=2^x$) grafikleri çizildiği takdirde (bakınız Şekil 6) bu grafiklerin üç farklı noktada kesiştikleri dolayısıyla da eldeki denklemin üç tane reel kökünün olduğu anlaşılacaktır.



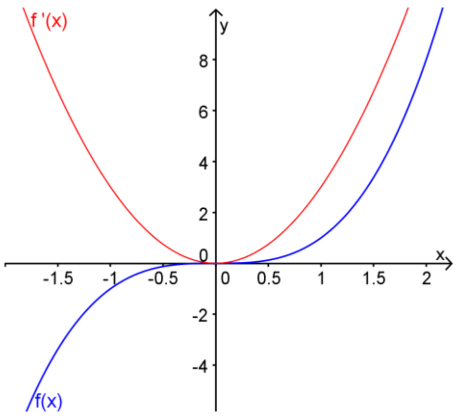
Şekil 6. $y=x^2$ ve $y=2^x$ fonksiyonlarının grafikleri

Öğrencilerin fonksiyonlar konusunda sahip oldukları bilginin kalitesini anlamak ve izah etmek için kullanılabilecek bir diğer teorik yapı '*kavram imajı*' düşüncesidir (Tall ve Vinner, 1981). Kavram imajı herhangi bir matematiksel kavrama ilişkin bireyin geliştirmiş olduğu zihinsel yapılar olarak tanımlanabilir (a.g.e). Bu zihinsel yapılar resimler, grafikler, şemalar, semboller, cebirsel ifadeler, analojiler, animasyonlar, modeller ve gerçek yaşam durumları olabilir.

Fonksiyon kavramının izahında kullanılan temsillerin çokluğu, bu kavramın gerçek yaşamla ve diğer birçok matematiksel düşünceyle olan yakın ilişkisi sebebiyle öğrenciler fonksiyonlarla alakalı çok farklı kavram imajları oluşturabilmektedir. Örneğin, kimi öğrencilerin fonksiyon düşüncesine ilişkin kavram imajı düzgün artan veya azalan sürekli bir eğri olabileceği gibi Venn-şemasından oluşan ve elemanlar arasında 1-1 eşlemelerin yapıldığı bir yazılımda olabilir. Bazı öğrenciler fonksiyon deyince girdileri çıktılara dönüştüren bir fonksiyon makinesini hayal ederken kimileri de anne-çocuk analojisini hatırlayabilmektedir. Çoğu öğrencinin sahip olduğu fonksiyon imajı ise *x* ve *y* değişkenlerinin kullanıldığı eşitlik formatında yazılmış $y=3x+2$ şeklindeki cebirsel ifadelerden oluşmaktadır. Fonksiyonlar konusunun öğretiminde asıl amacın kavram imajları oluşturmak olmadığı, kavramın kendisinin anlaşılmasının asıl hedef olduğunu vurgulamak isteriz. Ancak, kavramın öğretimi esnasında örnek sorular çözülmekte, temsiller kullanılmakta, benzetmeler ve ilişkilendirmekler yapılmaktadır. Öğrenim sürecinde bütün bu sunumlarla etkileşim içerisine giren öğrenciler kendi kavram imajlarını oluşturmaktadırlar. Yapılan çalışmalar öğrencilerin problem çözümleri yaparken fonksiyon kavramının tanımını değil, daha çok bu kavrama ilişkin geliştirmiş oldukları imajları kullandıklarını göstermektedir (Vinner, 1983). Ancak, kavrama ilişkin geliştirilmiş olan imajlar kavramın esasını ve temel özelliklerini temsil noktasında birtakım sınırlılıklar içerebilmekte ve bu sebeple de birçok yanılgı ve hatalar yapabilmektedirler. Örneğin, kavram imajları *x* ve *y* değişkenleri içeren ve '=' işareti kullanılarak yazılmış denklem formatındaki cebirsel ifadelere kısıtlanmış olan öğrenciler fonksiyonun tanımında belirtilen özellikleri sağlayıp sağlamadığına bakmaksızın bu tür ifadelerin tamamını fonksiyon olarak kabul etmektedirler. Örneğin, $x^2+y^2=1$ şeklindeki bir çember denkleminin fonksiyon belirttiğini iddia edebilmektedirler.

Fonksiyon kavramının zihindeki gelişim sürecini açıklayan bir diğer kuramsal çerçeve ise süreç algısı (process conception) ve obje algısı (object conception) düşüncelerini içermektedir. Bu düşünceler kavramın zihindeki dikey gelişimini ve bilginin kalitesini izah etme noktasında çok daha detay bilgiler sunmaktadır. Kısaca açıklamak gerekirse süreç algısı bir fonksiyonun girdileri çıktılara dönüştüren dinamik bir süreç olduğu düşüncesini içerir (Sfard, 1992). Bu algı düzeyindeki öğrenciler hangi temsil kullanılırsa kullanılsın verilen fonksiyonu dönüştürme yapan bir süreç olarak algılarlar. Ancak, bu dönüştürme sürecinin anlaşılması ve işletilmesi noktasında süreç algısı kendi içerisinde kalite itibariyle farklılaşabilmektedir. Bir kısım öğrenciler cebirsel olarak verilen fonksiyonların yaptığı dönüştürme sürecini daha alt düzeyde ve işlemler aracılığıyla yürütebilmektedirler. Eylemsel algı (an action conception of function (Dubinsky ve Harel, 1992)) olarak tanımlayabileceğimiz bu düşünce düzeyinde öğrenciler işlem yapma ihtiyacı hissederler. Cebirsel olarak verilen bir fonksiyonda *x* değişkeni yerine girdileri sırasıyla koyup gerekli işlemleri adım adım yaparak çıktıları elde edebilirler; ancak fonksiyon kavramına ve temel özelliklerine ilişkin kavramsal bir bilgiden yoksundurlar. Cebirsel olarak verilen bir bağıntının fonksiyon temsil edip etmediğini tespit etmede zorluk yaşarlar. Hatta bu düzeyde işlem eksenli bir düşünce tarzı çok daha baskın olduğu için çoğu öğrenciler tanım kümesindeki her elemanı değer kümesinde bir ve yalnız bir elemana eşleyip eşlemediğine bakmaksızın bütün cebirsel ifadeleri fonksiyon olarak kabul etme eğilimi gösterirler. Örneğin, $y=\sqrt{x+1}$ ifadesini bir fonksiyon olarak kabul ederler; hâlbuki bu bağıntı -1'den küçük sayılar için görüntü üretmez ve dolayısıyla fonksiyon olamaz. Cebirsel ifadelerle yapılan işlemler üzerinde yürütülen yoğun düşünsel aktiviteler neticesinde bir fonksiyonun yaptığı dönüştürmeler içselleştirilir ve anlam kazanır. Eylemsel algı düzeyini takip eden bu aşama süreç algısının son kısmını oluşturur. Bu düzeyde öğrenciler cebirsel ifadeler aracılığıyla yürüttükleri işlemlerin ne manaya geldiğini anlamaya başlarlar ve bu tür ifadeleri en genel manada dönüştürme yapan birer mekanizma olarak algılarlar. Dönüştürmenin nasıl yapıldığı ve bu süreçte yürütülen işlemlerin mahiyeti onlar için önem arz etmemektedir; düşünce artık işlem bağımlılığından kurtulmuş ve dönüştürme süreci üzerinde zihinsel hâkimiyet kazanılmıştır. Dönüştürme süreci girdi ve çıktılar bağlamında düşünülebilmekte ve fonksiyon olma şartlarını sağlayıp sağlamadığı kolaylıkla tespit edilebilmektedir. Örneğin, bu düzeyde öğrenciler yukarıda verilen cebirsel ifadenin IR'de fonksiyon belirtmediğini ancak [-1, ∞) kümesi üzerinde bir fonksiyon olabileceğini kolaylıkla tespit edebilirler. Dönüştürme sürecinin anlaşılması için cebirsel ifadeler türünden yazılımlara gerek duyulmazlar. Liste biçimindeki yazılımların kullanıldığı ortamlarda gizli bir şekilde var olan ve birinci bileşenleri ikincilere eşleyen fonksiyonun farkındadırlar veya grafiksel ortamda fonksiyonun yaptığı dönüştürmeleri noktasal bağlamda anlayıp takip edebilirler. Cebirsel olarak tanımlanmamışta olsa iki fonksiyon arasında bileşke işlemi yapabilirler veya verilen bir fonksiyon sürecini çözümleyip ters fonksiyonunu elde edebilirler (Breidenbach et al., 1992). Örneğin, IR'de tanımlı $f(x)=1$ ve $g(x)=3$ fonksiyonları verilip $(f{\circ}g)(x)$ istenildiğinde bu bileşke işlemini kolayca yapabilirler. Bir fonksiyonun cebirsel ve grafiksel formları arasında ileri geri geçiş yapabilirler ve bu geçişleri yaparken daha çok özel değerler (girdi ve çıktılar) kullanıp noktasal yaklaşımlar sergilerler. Süreç algısının son aşamasına ulaşmış olan öğrenciler birçok kısıtlı algı ve kavram yanılgısının üstesinden gelirler. Örneğin, fonksiyon grafiklerinin süreklilik arz etmek zorunda olmadığı ve sınırlı sayıda ayrık noktalardan oluşan bir grafiğin fonksiyon belirtebileceği, tanım ve değer kümesi elemanlarının reel sayılar dışında değişik türden nesneleri de içerebileceği ve bir fonksiyonun cebirsel veya aritmetiksel bir kuralla tanımlanmak zorunda olmadığı düşüncelerini anlarlar.

Bir fonksiyon süreci üzerinde yürütülen yansıtıcı düşünceler neticesinde çok daha ileri düzey bir bilgi olan *obje algısı* elde edilir. Obje algısı (an object conception of a function) bir fonksiyonu tek bir matematiksel nesne olarak anlamayı ve bu zihinsel nesneyi farklı süreçler içerisinde tek bir elemanmış gibi kullanabilmeyi gerektirir (Sfard, 1992; Dubinsky ve Harel, 1992). Obje algısı fonksiyon sürecinin ve bu kavrama ilişkin temel özelliklerin paketlenmesi veya zarflanması (encapsulation of a function process and its fundamental properties) sonucu elde edilir (a.g.e). Bu aşamada artık bireylerin fonksiyon kavramı üzerinde mutlak zihinsel hâkimiyetleri söz konusudur. Hangi gösterimsel araçla tanımlanırsa tanımlansın bir fonksiyonu tek bir eleman olarak algılayıp türev ve integral alma süreçleri gibi değişik süreçlerde rahatlıkla kullanabilirler (Breidenbach et al., 1992). Örneğin, [0, 2π] aralığında tanımlı $f(x)=sinx$ fonksiyonun grafiği verilip yine aynı aralıkta $g(x)=2f(x)$'in grafiğini çizmeleri istenildiğinde hiçbir işlem yapma ihtiyacı duymazlar. Verilen grafiği y-ekseni boyunca 2 birim gererek $g(x)=2f(x)$'in grafiğini kolayca bulurlar ve bu işlemin arkasındaki mantığın – $g(x)$ fonksiyonunun $f(x)$'in değer kümesindeki elemanların 2 ile çarpılması sonucu elde edildiği için $f(x)$'in grafiğinin y-ekseni boyunca 2 birim gerildiği düşüncesinin – farkındadırlar. Benzer biçimde, Şekil 7 deki gibi üçüncü dereceden bir fonksiyon grafiği verilip $f(x)$'in birinci dereceden türev fonksiyonunun grafiğini çizmeleri istenildiğinde bu işlemi verilen grafikle noktasal bağlamda ilgilenmeden veya fonksiyonun cebirsel formunu elde etmeden yapabilirler. Üçüncü dereceden fonksiyonun türevinin alınmasıyla elde edilecek fonksiyonunun ikinci dereceden olacağını bilir. Verilen grafikten fonksiyonun katsayısının pozitif olduğunu dolayısıyla türev alma işlemi neticesinde elde edilecek yeni fonksiyonun katsayısı 3 ve kolları yukarı doğru olan bir parabol grafiği olacağını zihninde canlandırıp direk olarak çizebilirler.



Şekil 7. $f(x)=x^3$ fonksiyonu ile türevinin grafiği

4. Fonksiyon Kavramının Öğretimine İlişkin Öneriler

Önceki kısımlarda fonksiyon kavramının matematik ders programları içerisindeki yeri ve önemi, epistemolojik gelişimi, algı türleri ve zihindeki oluşum süreçleri farklı bakış açılarını yansıtan görüş ve düşünceler ışığında incelenmiştir. Sunulan bilgilerden hareketle fonksiyon kavramının özü itibariyle oldukça basit bir matematiksel düşünce olduğunu söyleyebiliriz. Tanım kümesindeki her elemanı değer kümesinde bir ve yalnız bir elemana eşleyen bir bağıntıdan ibaret olan bu düşüncenin anlaşılması zor olmasa gerektir. Ancak, kavramın sunumunda grafikler, cebirsel ifadeler ve liste biçiminde yazılımlar gibi çoklu temsillerin kullanılıyor olması ve fonksiyon kavramının sabit fonksiyon, parçalı fonksiyon, mutlak değer fonksiyonu gibi birçok alt kavramı içeriyor olması bu düşüncenin anlaşılmasını zorlaştırmaktadır (Eisenberg, 1991). Öyleyse fonksiyonlar konusunda içeriksel açıdan zengin, kavram yanılgılarından ve kısıtlı algılardan arınmış gerçekçi bilgiler edinmeleri için öğrencilere nasıl yardımcı olabiliriz? Bu noktada belirtmek isteriz ki fonksiyonlar konusunda etkili bir öğretim yapabilmek için uygulanabilecek tek bir yöntemden bahsetmek oldukça zordur. Bunun sebebi ise bir yandan kavramın ilişkili olduğu düşüncelerin ve kullanılan temsillerin çokluğu, diğer yandan ise hitap edilen öğrenci kitlelerinin bilişsel seviyeleri ve geçmiş bilgi birikimleridir. Bu nedenle, fonksiyonların öğretiminde uygulanabilecek özel bir yöntemden ziyade genel bir yaklaşımdan bahsedilebilir ki bu yaklaşım en genel manada '*kavram eksenli öğretim yaklaşımı*' olarak ifade edilebilir. Kavram eksenli öğretim yaklaşımın en temel özelliği eldeki kavramın esasını ve temel özelliklerini önceleyen, gösterimsel araçlar ve temsiller gibi diğer bütünleyici unsurları ise bu amaç doğrultusunda kullanan bir öğretim modeli olmasıdır (Hiebert, v.d., 1997). Bağıntı, kural ve formüller gibi işlemsel bilgiler ile konunun sunumunda kullanılan temsillerin görsel özelliklerine ilişkin bilgilerin aktarımı bu öğretim yaklaşımının ana hedefi değildir. Bu tür bilgiler, öğrencilerin fonksiyon kavramı üzerinde yürütecekleri düşünceler ve yapacakları uygulamalar neticesinde elde edecekleri doğal kazanımlar olarak görülür. Bireyler kavramsal bilgiyi ancak ilişkilendirmeler yaparak geliştirebilirler (Heibert ve Lefevre, 1986); dolayısıyla kavram eksenli öğretim yaklaşımı öğrencilerin bu ilişkilendirmeleri yapabilmeleri için uygun ortam ve fırsatların oluşturulmasını öngörür. Fonksiyonlar konusu özelinde ise bu ilişkilendirmelerin çok yönlü olarak yapılması gerekmektedir. Bunlar, en temelde fonksiyon kavramının bağıntı ve kartezyen çarpım gibi diğer düşüncelerle ilişkilendirilmesini ve fonksiyonların alt kavramları (sabit fonksiyon parçalı fonksiyon, 1-1 ve örten fonksiyon, vs.) arasındaki ilişkiler ile bunların her birinin genel manada fonksiyon kavramıyla olan ilişkisinin açıklanmasını içerir. Örneğin, sabit fonksiyon ile 1-1 ve örten fonksiyon arasındaki benzerlik ve farklılığın değişik gösterimler üzerinden izahı öğrencilerdeki fonksiyon kavramının dikey (süreç-obje algısının gelişimi) ve yatay (cebirsel yazılımlar ve grafikler gibi farklı ortamlarda kavramın anlaşılması) gelişimine ciddi katkılar sağlayacaktır. Fonksiyon kavramının sunumunda kullanılan temsiller arasındaki kurulacak ilişkilerin yanı sıra bu kavrama ilişkin düşünceler ile bu düşüncelerin izahında kullanılan bağıntı ve kuralların ilişkilendirilmesi (örneğin düşey doğru testinin ne manaya geldiğinin açıklanması) yine kavramın zihinsel gelişim sürecini kolaylaştıracaktır. Bir diğer ilişkilendirme ise fonksiyon kavramı ile güncel yaşam durumları arasında yapılabilir ki bu bağlamda *anne-çocuk* ilişkisi (tanım kümesi çocuklardan ve değer kümesi annelerden oluşan bir bağıntı ve bu bağlamda yapılan eşlemeler) türünden analojilerden yararlanılabilir veya bir seyahatteki *yol* ve *zaman* değişkenleri arasındaki ilişkiler gibi örnekler verilebilir. Bu öğretim yaklaşımı çerçevesinde fonksiyon kavramın zihinsel gelişim sürecinde yaşanan zorluklar ve geliştirilen yanılgıların göz önünde bulundurulması özel önem arz etmektedir. Dolayısıyla öğretmenlerin bu zorluklar ve yanılgılardan haberdar olmaları ve bunların giderilmesi için geliştirip uygulayacakları tanısal öğretim yaklaşımları da konunun öğrenim ve öğretimini oldukça kolaylaştıracaktır. Hesap makinesi ve bilgisayar programları gibi teknolojik aletlerin kullanımının öğrencilerin fonksiyon grafiklerini zihinlerinde canlandırabilme yeteneklerini geliştirdiği, cebirsel ve grafiksel temsiller arasında ilişkiler kurmalarını ve bunlar arasında ileri-geri geçişler yapmalarını kolaylaştırdığı ve fonksiyonlarla alakalı problem çözümlerinde görsel (visual) stratejileri çok daha rahat kullanabilmelerine olanak tanıdığı belirtilmektedir (Smart, 1995; O'Callaghan, 1998). Bu fonksiyonlar konusunun öğretiminde teknolojik imkânlardan yararlanılması bir diğer alternatif olarak önerilebilir.

Unutulmamalıdır ki, diğer birçok matematiksel kavram gibi fonksiyon kavramı da gerek disiplin içerisinde ve gerekse diğer disiplinlerde ve güncel yaşamda uygulama alanı olan bir düşüncedir. Bir matematiksel kavrama ilişkin edinilmiş olan bilgilerin anlam kazanması ve olgunlaşması ancak söz konusu bilgilerin farklı alanlarda uygulanmasıyla ve problem çözümlerinde kullanılmasıyla mümkün olabilir. Dolayısıyla, fonksiyon kavramının öğretimi yapılırken öğrenciler sadece fonksiyon kavramının ne olduğunu izah etmek için tasarlanmış disiplin içi örnek sorular üzerinde çalıştırılmamalıdır. Diğer disiplinlerle ve güncel yaşamla alakalı ve fonksiyon düşüncesinin kullanımını gerektiren problem çözümleri üzerinde çalışmaları sağlanmalıdır. Bu tür bir öğretim yaklaşımının bilginin ilişkilendirilerek anlam kazanmasının yanı sıra kavramın kullanımı noktasında düşünce esnekliği kazanmaları ve problem çözme yeteneklerinin gelişimi konularında da öğrencilere katkı sağlayacağı unutulmamalıdır. Son olarak belirtmek isteriz ki, fonksiyon kavramı sadece belli üniteler kapsamında okutulup bırakılacak bir düşünce değildir. Daha ziyade matematik ders programları kapsamında birçok konuyla yakın ilişkisi olan ve adeta programın birleştirici ve bütünleştirici bir öğesidir. Bu nedenle, fonksiyon kavramı nicel veya nitel çokluklar arasındaki ilişkilerin incelenmesinde kullanılan fonksiyonel bir düşünce tarzı olarak ele alınmalı ve matematik ders programlarının her aşamasında elverdiği ölçüde kullanılmalıdır.

Kaynaklar

1. Boyer, C., A History of Mathematics. Wiley, New York, 1968.
2. Breidenbach, D., Dubinsky, Ed., Hawks, J., & Nichols, D., Development of the Process Conception of Function. Educational Studies in Mathematics, 23(3), 247-285, 1992.
3. DeMarois, P., Tall, D. O., Function: Organising Principle or Cognitive Root. Proceedings of 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2, s. 257-264, Haifa, Israel, 1999.
4. Dubinsky, Ed., Harel, G., The Nature of the Process Conception of Function. In G. Harel, & Ed. Dubinsky (Eds.), The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy, s. 85-104, Mathematical Association of America, United States of America, 1992.
5. Eisenberg, T., Function and Associated Learning Difficulties. In D. O. Tall (Ed.), Advanced Mathematical Thinking, s. 140-152, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991.
6. Gray, E., & Tall, D., Duality, Ambiguity and Flexibility: A proceptual view of simple arithmetic. Journal of Research in Mathematics Education, 25(2), 115-141, 1994.
7. Heibert, J., Lefevre, P., Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics. Lawrence Erlbaum Associates Inc, New Jersey, 1986.
8. Heibert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K. C., Wearne, D., Murray, H., Oliver, A., & Human, P., A Day in the Life of a Conceptually Based Instruction Classroom. In L. Paeke, (Ed.), Making Sense: Teaching and Learning Mathematics with Understanding, s. 101-114, Heinemann, Greenwood, 1997.
9. Kleiner, I., Evolution of the Function Concept: A Brief Survey. The College Mathematics Journal, 20(4), 282-300, 1989.
10. Malik, M. A., Historical and Pedagogical Aspects of the

Definition of Function. International Journal of Mathematics Education in Science and Technology, 1(4), 489-492, 1980.
11. Markovits, R., Eylon, B. S., Brukheimer, M., Functions Today and Yesterday. For the Learning of Mathematics, 6(2), 18-28, 1986.
12. NCTM, Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. Reston, VA: Author, 1989.
13. O'Callaghan, B. R., Computer-Intensive Algebra and Students' Conceptual Knowledge of Functions. Journal for Research in Mathematics Education, 29(1), 21-40, 1998.
14. Ponte, J. P., The History of the Concept of Function and Some Educational Implications. The Mathematics Educator, 3(2), 3-8, 1992.
15. Selden, A., Selden, J., Research Perspectives on Conceptions of Functions: Summary and Overview. In G. Harel ve Ed. Dubinsky (Eds.), The Concept of Function Aspects of Epistemology and Pedagogy, s. 1-16, Mathematical Association of America, United States of America, 1992.
16. Sfard, A., Operational Origins of Mathematical Objects and the Quandary of Reification-The Case of Function. In G. Harel, & Ed. Dubinsky (Eds.), The Concept of Function Aspects of Epistemology and Pedagogy, s. 59-85, Mathematical Association of America, United States of America, 1992.
17. Smart, T., Visualising Quadratic Functions: A Study of Thirteen-year-old Girls Learning Mathematics with Graphic Calculators. In L. Meira, & D. Carraher (Eds.), Proceeding of the 19th International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 2, 272-279, Atual Editora Ltda, Brazil, 1995.
18. Tall, D.,& Vinner, S., Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. Educational Studies in Mathematics, 12, 151-169, 1981.
19. Thompson, P. W., Students, Functions, and the Undergraduate Curriculum. In Ed. Dubinsky, A. Schoenfeld, & J. Kaput (Eds.), Research in Collegiate Mathematics Education, I, CBMS Issues in Mathematics Education, 4, 21-44, 1994.
20. Vinner, S., Concept Definition, Concept Image and the Notion of Function. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 14(3), 293-305, 1983