ISSN 2757-5543 GÜFFD 3. Cilt (1): 58-69 (2022)

Gazi Üniversitesi Fen Fakültesi Dergisi

http://sci-fac-j.gazi.edu.tr/

GÜFFD GAZİ ÜNİVERSİTESİ FEN FAKÜLTESİ DERGİSİ

Black Scholes Denkleminin Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Çözümü

Cihan ASAR [1], Aytekin B. ÇIBIK*[2]

[1]*TPAO Genel Müdürlüğü, 06530, Ankara, Türkiye*

[2]*Gazi Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, 06500, Ankara, Türkiye*

Öne Çıkanlar

- Black Scholes denkleminin Avrupa tipi opsiyonu için sonlu elemanlar çözümleri incelendi.
- İki dayanak varlık üzerindeki opsiyon için hazırlanan kodla nümerik çözümler elde edildi.
- Adaptif ağ örgüsünün etkisi incelendi.

Makale Bilgileri

Geliş:08/04/2022
Kabul: 28/04/2022

Anahtar Kelimeler

Black Scholes denklemi,
Sonlu Elemanlar Yontemi,
Opsiyon Sözleşmeleri,
Adaptif Ağ

Öz

Bu çalışmada, opsiyon fiyatlama yöntemlerinden Black Scholes denkleminin sonlu eleman çözümleri incelenmiştir. Çalışmanın ilk bölümünde finansal bilgiler verilmiştir. Daha sonrasında Black Shcoles kısmi diferansiyel denklemi incelenmiştir. Denklemin iki dayanak varlık üzerindeki hâli verilerek sonlu elemanlar yöntemi ile çözümü incelenmiştir. Modelin çözümü için geliştirilen kod ile örnekte verilen opsiyon sözleşmesi için farklı volatiliteler kullanılarak opsiyon fiyatına ilişkin kontur grafikleri ve ağ örgüleri elde edilmiştir. Çıkarılan sonuçlardan opsiyon üzerine risk değerlemesi yapılmıştır.

Finite Element Solutions of the Black Scholes Equations

Araştırma Makalesi

Highlights

- Finite element solutions for Europian type Black Scholes equations are analyzed.
- Numerical solutions are obtained with the code prapared for two-asset option.
- Adaptive meshes are examined.

Article Info

Received: 08/04/2022
Accepted: 28/04/2022

Keywords

Black Scholes Equation,
Finite Element Method,
Options,
Adaptive Mesh

Abstract

In this study, we examine the finite element solutions of the Black Scholes equation, which is one of the option pricing method. In the first part of the study, we mention about some financial information. Next, Black Scholes partial differential equation is examined. After obtaining the equation on two underlying assets, its solutions with finite element method is studied. Finally, with the code developed for the solution of the model, contour graphs and mesh patterns related to the option price are obtained by using different volatilities for the option contract given in the example. From the results obtained, risk management on the option is evaluated.

* Sorumlu Yazar/Corresponding Author: Aytekin B. Çıbık, abayram@gazi.edu.tr

1. GİRİŞ

Black Scholes denklemi; matematik, finans ve ekonominin kullanıldığı ve en iyi sonucu verdiği opsiyon fiyatlama modellerinden bir tanesidir. Bu denklem, gelecekte yapılması planlanan bir ticaretin bugün için hangi fiyat üzerinden yapılması gerektiği üzerine bir çalışmadır. Bu çalışma ile denklemin mucitleri Fischer Black ve Myron Scholes, 1997 yılında Nobel ödülünü kazanmışlardır [1].

Bu çalışmada Black Scholes modeline ait kısmi diferansiyel denklemin verilen değerler üzerinden sonlu elemanlar yöntemi ile çözümlenmesi incelenmiştir. Ayrıca, kullanılan FreeFem++ programı ile model görselleştirilmiştir. Çıkan çözümlerde, opsiyon sözleşmesi için oluşan fiyat elde edilmiştir ve buna bağlı olarak risk değerlemesi yapılmıştır.

Çalışmanın ilerleyiş planı şu şekildedir: 2. kısımda türev piyasalarında kullanılan bazı finansal terimlerin tanımlamaları ile birlikte opsiyon sözleşmelerindeki önemli kavramlar açıklanmıştır. Ayrıca opsiyon çeşitleri ve opsiyon fiyatını etkileyen faktörler verilmiştir. 3. kısımda tek dayanak ve iki dayanak varlık üzerindeki Black Scholes modelleri ile birlikte Black Scholes kısmi diferansiyel denkleminin sonlu elemanlar yöntemi ile çözümü için analiz yapılmıştır. 4.kısımda verilen değerler üzerinden Black Scholes modeli FreeFem++ programı ile çözülerek opsiyon fiyatına ilişkin adaptif ağ örgüleri elde edilmiştir. 5. ve son kısımda sonuç ve öneriler verilmiştir

2. FİNANSAL ÖN HAZIRLIK

Bu bölümde, makalede kullanılacak finansal bilgiler veriyoruz. Türev araçları, değeri başka bir varlığın değerine bağlı olan finansal araçlardır. Bir finansal türev aracı olan opsiyon sözleşmeleri iki taraf arasında yapılan ve alıcıya bugünden belirlenen bir fiyat üzerinden, opsiyon fiyatı karşılığında, bir malı gelecekte satın alma ya da satma hakkı veren sözleşmelerdir [2]. Opsiyon sözleşmelerinde, alıcı taraf opsiyona dayanak oluşturan malı vade sonu geldiğinde alma ya da satma hakkına sahiptir, ancak bir zorunluluğu bulunmamaktadır. Alıcı taraf sözleşmenin vadesi geldiğinde malı almama ya da satmama hakkına sahiptir. Ancak, satıcının vadesi geldiğinde malı almakla ya da satmakla yükümlülüğü bulunmaktadır [3].

Opsiyon sözleşmelerinin tam olarak anlaşılabilmesi için kullanılan terimlerin ve sözleşmede adı geçen temel kavramların bilinmesi gerekmektedir. Dayanak varlık, kullanım fiyatı, opsiyon vadesi ve opsiyon fiyatı burada açıklayacağımız en temel unsurlardır. Opsiyonların ya da genel olarak türev araçların temsil ettiği varlıklar dayanak varlık olarak tanımlanmaktadır. Türev araçları dayanak varlıkları temsil eden finansal enstrümanlardır. Burada dayanak varlık; hisse senetleri, endeksler veya döviz birimleri olabilir. Örneğin; herhangi bir şirketin hisse senedi değerine bağlı bir sözleşme yapıldığında, hisse senedi değeri değiştikçe buna bağlı olan sözleşmeler de değişiklik gösterecektir. Burada yapılan sözleşme aslında finansal türev aracıdır, şirketin hissesi de dayanak varlıktır. Kullanım (uygulama) fiyatı (strike-exercise price), opsiyon sözleşmesine konu olan dayanak varlığın vadesi geldiğinde işlem göreceği fiyatı temsil eder. Opsiyon kullanım fiyatını, opsiyon alan ve satan taraf kendi arasında belirler. Örneğin; altın alış-satışına dair, kullanım fiyatı 500 TL olan bir opsiyon sözleşmesi düzenlendiğinde, opsiyonu alan kişi altını vadesi gelmeden 500 TL'den alma hakkına sahiptir. Satan kişi ise 500 TL'den satmakla yükümlüdür. Opsiyon vadesi, opsiyonun geçerli olacağı son günü ifade eder. Aynı şekilde türev araçlarının kullanılacağı son gündür. Vadesine göre iki tür opsiyon vardır. Bunlar Avrupa tipi ve Amerikan tipidir. Avrupa tipi opsiyonlar belirli bir tarihte kullanılır, ancak Amerikan tipi opsiyonlar vadesinden önce herhangi bir tarihte kullanılabilir [4]. Opsiyon fiyatı, opsiyonu alan yatırımcının opsiyonu satan tarafa ödediği ücrete denir. Yani, opsiyonu satan tarafın sözleşme için talep ettiği tutardır. Bu tutar tamamen opsiyonu satan kişiye ve opsiyon sözleşmesine bağlıdır, herhangi bir standart bulunmamaktadır. Amerikan tipi opsiyonların vade avantajı olduğu için opsiyon primleri daha yüksektir. Avrupa tipi opsiyonlar genellikle Black Scholes yöntemi ile değerlendirilir. Bu çalışmanın devamında Black Scholes denkleminin sonlu elemanlar yöntemi ile çözümünde yine Avrupa tipi opsiyonlar üzerinde durulacaktır. Alınan pozisyonun durumuna göre, alım ve satım opsiyonları olmak üzere iki çeşit opsiyon vardır. Alım opsiyonu alan tarafa (uzun pozisyon sahibi) belirli bir vadeye kadar, opsiyona konu olan dayanak varlığı belirli bir prim ödeyerek alma hakkı verir. Yatırımcı bu hakkı kullanmak zorunda değildir. Alım opsiyonunu satan yatırımcı (kısa pozisyon sahibi) ise opsiyona konu olan dayanak varlığı belirli bir vadeye kadar belirli bir fiyat karşılığında satmakla yükümlüdür. Satım opsiyonunu (put option) alan yatırımcı (uzun pozisyon sahibi) belirli bir vadeye kadar, opsiyona konu olan dayanak varlığı belirli bir prim bedeli karşılığında satma hakkına sahiptir. Yatırımcı bu hakkını kullanmak zorunda değildir. Dayanak varlığı alacak yatırımcı (kısa pozisyon sahibi) ise opsiyona konu olan dayanak varlığı belirli bir prim karşılığında almakla yükümlüdür [5].

Değişiklik ve belirsizlik durumlarında, finansal türev araçları; riskleri önleme avantajı, yatırım yapma imkânı, geleceğe yönelik fiyat oluşumu ve arbitraj gibi özellikleri içermektedir [6]. Günümüzde 4 çeşit kullanılan türev araçlar vardır. Bunlar; futures, forward, swap ve opsiyonlardır.

Opsiyon sözleşmelerinin sağladığı temel faydalar opsiyonları daha cazip hâle getirmiştir ve böylelikle opsiyonlardaki işlem hacimleri artmaya başlamıştır. Opsiyon sözleşmelerinin artmasının en büyük sebepleri arasında opsiyonun sağladığı riski azaltma özelliği ve kâr getirisi vardır.

2.1. Opsiyon fiyatını etkileyen faktörler

Opsiyon primini (fiyatını) etkileyen temel faktörler; dayanak varlığın cari fiyatı, opsiyonun kullanım fiyatı, volatilite (dayanak varlığın standart sapması) ve vadeye kalan süredir (*Çizelge 1*). Kâr payı ve piyasa faiz oranının da yine temel unsurlar kadar olmasa da opsiyon primi üzerinde etkileri vardır.

Opsiyon primi, sözleşmeye konu olan dayanak varlığın ya da menkul kıymetin fiyatındaki değişmeye bağlı olarak değişiklik göstermektedir. Dayanak varlığın fiyatına bakılarak ne zaman fiyatların yükseldiği, yükseliş ivmesi, yükseliş aralıkları analiz edilebilir. Ve fiyatındaki dalgalanmalara bakılarak da opsiyon sözleşmeleri imzalanabilir. Bu nedenlerden dolayı da dayanak varlığın fiyatı opsiyon fiyatlarını etkileyecektir. Alım opsiyonu için, opsiyon primi dayanak varlığın fiyatı ile doğru orantılıdır. Satım opsiyonu için opsiyonun fiyatı dayanak varlığın fiyatı ile ters orantılıdır [7].

Alım opsiyonu için, opsiyon fiyatı kullanım fiyatı ile ters orantılıdır. Satım opsiyonu kullanım fiyatı ise opsiyon primi ile doğru orantılıdır. Yani kullanım fiyatı arttıkça opsiyonun getirisi alım opsiyonu için düşer, satım opsiyonu için artar [8].

Genel olarak yatırımlar için vadenin uzun olması piyasa belirsizliklerinde artma ihtimalinin oluşabileceğini ve tahminlerin gerçekten daha uzak olabileceği anlamına gelir. Bu da riskin daha fazla olması demektir. Bu durumda getiri de yüksek olacaktır. Aynı şekilde opsiyonlar için de alım opsiyonu satım opsiyonu fark etmeksizin vade uzadıkça opsiyon için ödenecek opsiyon primi artacaktır. Vade azaldıkça da piyasa daha öngörülebilir olmakla birlikte opsiyonun cari değerini tahmin etmek kolaylaşacaktır, dolayısıyla opsiyon primi düşecektir [9].

Opsiyona konu olan dayanak varlığın üzerindeki volatilite arttıkça belirsizlikler artacaktır, fiyat dalgalanması artacaktır ve tahminlerde zorluk meydana gelecektir. Bu durumda opsiyon üzerindeki risk de artacaktır. Riskin artması demek getirinin de artması ya da zararın da artması demektir. Bu nedenlerden dolayı volatilitesi yüksek olan opsiyonların fiyatları da yüksektir [9].

Piyasadaki risksiz faiz oranındaki değişmelerin opsiyonların fiyatları üzerinde etkisi fazladır. Piyasa faiz oranının yüksek olması, yatırımcılar için borçlanmanın artması demektir. Bu da opsiyon piyasasını daha cazip hâle getirecektir. Bu durumda opsiyon alım primi artacak, satım opsiyon primi düşecektir [10].

Dayanak varlığın ait olduğu şirket kâr payı ödediği takdirde dayanak varlığın fiyatını düşürecektir. Dayanak varlığın fiyatındaki düşme alım opsiyonu fiyatını düşürecektir, satım opsiyon primini artıracaktır. Yani alım opsiyonu ile kâr payı arasında negatif, satım opsiyonu ile kâr payı arasında pozitif bir ilişki vardır.

***Çizelge 1.** Opsiyon primini etkileyen faktörler*

Opsiyon Primini Etkileyen Faktörlere Ait Tablo			
Değişken		Alım Opsiyonu	Satım Opsiyonu
Dayanak Varlığın Fiyatı	↑	↑	↓
Kullanım Fiyatı	↑	↓	↑
Vade	↑	↑	↑
Oynaklık(Volatilite)	↑	↑	↑
Faiz Oranı	↑	↑	↓
Kar Payı(Temettü)	↑	↓	↑

2.2. Black Scholes Opsiyon Fiyatlama Modeli

En önemli opsiyon değerleme yöntemi olan Black Scholes denklemi 1973 yılında Fischer Black ve Myron Scholes tarafından Avrupa tipi opsiyonların değerini bulmak için geliştirilmiştir. Geliştirilen modelde temel amaç, opsiyona konu olan dayanak varlığın fiyatının vade sonunda hangi fiyata sahip olacağını belirlemektir. Black Scholes denklemi bazı varsayımlar üzerinden opsiyon fiyatını elde etmektedir. Bu varsayımlar aşağıdaki gibidir:

- Opsiyonun vadesi bittiğinde kullanılması gerekir. Avrupa tipi opsiyonlar zaten vade sonunda kullanılır, ancak Amerikan tipi opsiyonlar için vade sabit bir gün olarak belirlenmelidir.
- Opsiyona konu olan dayanak varlık Geometrik Brownian hareketi izlemektedir.
- Opsiyona konu olan dayanak varlık faiz ya da kâr payı ödemesi yapmamaktadır.
- Etkin piyasa koşulları geçerlidir. Yani piyasadaki bilgiler açık ve herkes her bilgiye ulaşabilmektedir.
- Piyasada işlem maliyetleri ve vergiler yoktur.
- Dayanak varlık üzerindeki volatilite sabittir.

Piyasa faiz oranı herkes tarafından bilinir ve bu değer sabittir. Alıcıların ve satıcıların bu oran üzerinden borç verdiği ya da borçlandığı kabul edilir [1].

3. BLACK SCHOLES KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMİ

Bir dayanak varlığın t anındaki fiyatı S olarak verilsin. Küçük bir zaman aralığındaki değişim ve dayanak varlığın değerindeki değişimleri sırasıyla dt ve dS ile gösterelim. Değişim sonrası dayanak varlığın yeni fiyatı S+dS olur. Fiyattaki net değişim olan dS i ölçmek yerine varlıktaki getiri oranını kullanabiliriz. O da $\frac{dS}{S}$ ile tanımlanır. Getiri ile ilişkilenen bir matematik modeli iki tane temel bileşene sahiptir. Bunlardan bir tanesi öngörülebilir, belirleyici bileşen (risksiz yatırımdaki getiri ile benzerdir) μdt dir. Burada μ sapmayı veren parametredir. Varlığın fiyatındaki ortalama büyüme hızını ölçmeye yarayan parametredir [11]. $\frac{dS}{S}$ getirisine katkı yapan diğer bileşen ise σdX dir. σ fiyatlarda görülen dalgalanma olarak tanımlanır. Getirinin standart sapmasını ölçen parametredir. dX ise ortalaması 0 ve varyansı dt olan normal dağılıma sahip olan rasgele değişkendir. Yani $dX \sim N(0,(\sqrt{dt})^2)$. μ ve σ değerleri geçmiş değerlere bakılarak tahmin edilebilir. Sonuç olarak verilen değerlerden aşağıda verilen stokastik diferansiyel denklem elde edilir.

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dX \tag{3.1}$$

(3.1) denklemi rassal yürüyüş (random walk) örneğidir. Rassal yürüyüş varlığın net değişimi hakkında bilgi vermez, ancak S değerinin davranışı hakkında yol gösterir. Aslında (3.1) denklemi hisse değeri ile oluşturulan bir zaman serileri modelinin şeması olarak da düşünülebilir.

f fonksiyonu için, S dayanak varlık fiyatının fonksiyonu f(S) olarak alırsa, (3.1) denklemi kullanılarak Taylor serisi ile aşağıdaki denklem elde edilir.

$$df = \sigma S \frac{\partial f}{\partial S} dX + \left(\mu S \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + \frac{\partial f}{\partial t} \right) dt \tag{3.2}$$

V(S,t) opsiyonun değeri, S dayanak varlığın fiyatı, r risksiz faiz oranı ve μ ile σ yukarıda belirtildiği gibi tanımlansın. Bu durumda *Ito Lemması* da kullanılarak denklem aşağıdaki gibi olur.

$$dV = \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dX + \left(\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} \right) dt \tag{3.3}$$

Bir tane opsiyon ve bu opsiyonda $-\Delta$ miktarında hisse senedi içeren bir portföy düşünelim.

Bu portföyün değeri: $\Pi = V - \Delta S$ olur. Yani, $d\Pi = dV - \Delta dS$ 'dir.

$$d\Pi = \sigma S \left(S \frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \right) dX + \left(\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} - \mu \Delta S \right) dt$$

$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$ seçilirse, $d\Pi = \left(\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} \right) dt$ elde edilir.

Π, risksiz bir varlığa yatırım yapıldığı durumda dt aralığındaki büyüme artışı $r\Pi\, dt$ *olur.* Bu durumda opsiyon için kabul edilebilir fiyat aşağıdaki gibi olmaktadır:

$$r\Pi\, dt = \left(\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} \right) dt$$

$\Rightarrow \quad r\left(V - \frac{\partial V}{\partial S} S \right) = \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t}$ ve buradan da Black Scholes denklemi elde edilir:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0. \tag{3.4}$$

(3.4) Black Scholes kısmi diferansiyel denklemi opsiyon sözleşmelerinde dayanak varlık üzerindeki opsiyon fiyatı V'yi vermektedir. Bu denklem Avrupa tipi opsiyon üzerinde vade sonundaki opsiyonun fiyatını hesaplamaktadır. Avrupa tipi opsiyonlar için sadece vade sonundaki opsiyonun fiyatı bilinmektedir. Bu da başlangıç opsiyon fiyatını belirlemek için Black Scholes denkleminin geriye doğru çözülmesini gerektirir. Bunu yapmak için t zamanının yerine $\tau = T - t$ olacak şekilde, geriye dönük zaman noktasını veren "τ" ifadesini kullanmamız gerekecektir.

Bu kısımda aslında sonlu elemanlar yönteminin daha kesin sonuç verdiği iki boyutlu diferansiyel denklem örneği olan iki dayanak varlık üzerindeki Black Scholes kısmi diferansiyel denklemini gösterelim:

S_1 ve S_2 Avrupa tipi opsiyonu üzerinde kullanılacak iki dayanak varlık olmak üzere, bu opsiyonun fiyatını bulmak için kullanılacak Black Scholes denkleminin kısmi diferansiyel denklem gösterimi aşağıdaki gibidir:

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} - r\sum_{k=1}^{2} S_k \frac{\partial V}{\partial S_k} = \sum_{kl=1}^{2} D_{kl}(t, S_1, S_2)\frac{S_k S_l}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S_k \partial S_l} - \lambda \mathrm{I}_{\mathrm{I}x(\Re^2 \setminus \Omega_b)} V - rV \ . \tag{3.5}$$

Burada V opsiyonun fiyatını, r risksiz faiz oranını ve λ olumsuz bir durum olduğunda opsiyon fiyatını sıfır yapan sabit bir değerdir. (3.5) kısmi diferansiyel denklemi (3.4) kısmi diferansiyel denkleminin iki boyutlu halidir. Bu denklem aynı zamanda mühendislikte kullanılan taşınım-yayılım denklemi olarak bilinmektedir.

Bu modelde oynaklık matrisi D aşağıdaki biçimde gösterilir:

$$\begin{pmatrix} \sigma^2{}_{11}(t, S_1, S_2) & \rho\sigma_{11}(t, S_1, S_2)\sigma_{22}(t, S_1, S_2) \\ \rho\sigma_{11}(t, S_1, S_2)\sigma_{22}(t, S_1, S_2) & \sigma^2{}_{22}(t, S_1, S_2) \end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

Bu matrisin değeri, opsiyon üzerindeki iki varlığın volatilitelerine yani standart sapma değerlerine ve bunlar arasındaki ilişkiyi veren ρ korelasyon değerine bağlıdır.

(3.5) denkleminde verilen $\lambda \mathrm{I}_{\mathrm{I}x(\Re^2 \setminus \Omega_b)} V$ değeri bazı keskin zaman aralıklarındaki opsiyonun sınırlarını temsil eder. Sınırların içerisinde λ değeri 0, dışında ise bu değer 1`dir.

(3.5) denklemi kullanılarak iki dayanak varlık üzerindeki Avrupa tipi opsiyonun fiyatı hesaplanır. (3.5) denklemi zamanla geriye yönelik çözüldüğü için eşitliğin başlangıç koşulları opsiyonun ödeme fonksiyonu tarafından belirlenir. S_1 ve S_2 dayanak varlıklı opsiyon üzerindeki C alım opsiyon fiyatı ve P satım opsiyon fiyatı aşağıdaki şekilde tanımlanır:

Alım Opsiyonu:

- Max Alım : $V(\tau = 0, S_1, S_2) = 1_\Omega \max(\max(S_1, S_2) - K, 0)$
- Min Alım : $V(\tau = 0, S_1, S_2) = 1_\Omega \max(\min(S_1, S_2) - K, 0)$ (3.7)
- Basket Alım : $V(\tau = 0, S_1, S_2) = 1_\Omega \max(\alpha S_1 + (1-\alpha) S_2 - K, 0)$

Burada α , 0 ile 1 arasında tanımlanan basketin sabitidir ve S_1 ile S_2 hesaplanan alanın sınırı üzerindedir.

Satım Opsiyonu:

- Max Satım : $V(\tau = 0, S_1, S_2) = 1_\Omega \max(K - \max(S_1, S_2), 0)$
- Min Satım : $V(\tau = 0, S_1, S_2) = 1_\Omega \max(K - \min(S_1, S_2), 0)$ (3.8)
- Basket Satım : $V(\tau = 0, S_1, S_2) = 1_\Omega \max(K - \alpha S_1 - (1-\alpha) S_2), 0)$

Her bir başlangıç koşuluna uygulanacak sınır koşulları, $\nabla V.n = 0$ biçiminde sınır üzerinde hesaplanan homojen Neumann sınır koşulları kullanılarak araştırılır.

Dirichlet sınır koşulları her bir opsiyon çeşidi kullanılarak çıkarılan opsiyon ödemeleri ile karar verilir. Dirichlet sınır koşulları, alım opsiyonu için (3.7) ve satım opsiyonu için (3.8) de verilen eşitliklerdir [11]. Verilen bir alım ve satım opsiyonları için sınır değerler aşağıdaki gibi olacaktır:

Alım opsiyonu, $C_{E,T} = \max(0, S_T - X)$

Satım opsiyonu, $P_{E,T} = \max(0, X - S_T)$

Black ve Scholes (1973) yukarıda verilen sınır koşulları ile (3.4) kısmi diferansiyel denkleminin analitik çözümünü verecek olan formülü aşağıdaki şekilde tanımlamıştır:

Alım opsiyonu için opsiyon fiyatı $\quad C_E(S,T) = N(d_1)S - N(d_2)Xe^{-rT}$

Satım opsiyonu için opsiyon fiyatı $\quad P_E(S,T) = N(-d_2)Xe^{-r(T-t)} - SN(-d_1)$

Burada S dayanak varlığın fiyatını, T opsiyonun vadesini, t o anı, X kullanım fiyatını, r risksiz faiz oranını, σ dayanak varlığın standart sapmasını ve N standart normal dağılım fonksiyonunu temsil eder. d_1 ve d_2 fonksiyonları ise:

$$d_1 = \frac{In(\frac{S}{X}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad \text{ve} \quad d_2 = \frac{In(\frac{S}{X}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$ olarak verilir.

3.1. Black Scholes Denkleminin Sonlu Eleman Çözümleri

Vadesi T, kullanım fiyatı K olan Avrupa tipi satım opsiyonu için Black Scholes modeli göz önünde bulundurulursa, dayanak varlığın fiyatı Geometrik Brownian hareketini izler:

$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t),$ ve burada σ ; S_t ve t ye bağlıdır.

Eğer oynaklık fonksiyonu normal şartları sağlarsa, $t < T$ vadesi için opsiyonun fiyatı Black Scholes formülünden

$P_t = E^*(e^{-r(T-t)}(K - S_t)^+ \mathrm{I} F_t)$ elde edilir. Burada $E^*(IF_t)$ koşullu beklenti değeridir.

$\sigma = \sigma(S_t, T-t)$ ve $P_{T-t} = u(S_{T-t}, T-t)$ için, u fonksiyonu aşağıdaki denklemin çözümüdür:

$$\begin{cases} \partial_t u - \dfrac{\sigma^2 x^2}{2}\partial_{xx}u - rx\partial_x u + ru = 0, \\ u(x,0) = (K-x)^+ \end{cases} \qquad x>0,\ 0<t\leq T, \tag{3.9}$$

(3.5) denkleminin varyasyonel formüllü aşağıda verilen V Hilbert Uzayında tanımlanan u fonksiyonunun [0,T] aralığında bulunmasını içermektedir. Varyasyonel formülü elde etmek için (3.5) denklemi V uzayından alınan bir w test fonksiyonu ile taraf tarafa iç çarpılır. Böylelikle

$$\frac{d}{dt}(u,w)+a_t(u,w)=0 \quad t\in(0,T),\ \forall w\in V \text{ için } u(x,0)=(K-x)^+ \tag{3.10}$$

elde edilir. Öyle ki,

$$V=\left\{v\in L^2(\mathbb{R}_+): x\frac{dv}{dx}\in L^2(\mathbb{R}_+)\right\},$$

$$a_t(u,w)=\left(\frac{\sigma^2x^2}{2}\partial_x u,\partial_x w\right)+(x\partial_x u,(\sigma^2+x\sigma\partial_x\sigma-r)w)+(ru,w), \tag{3.11}$$

$$(u,w)=\int_0^\infty u(x)w(x)dx\,.$$

Sonlu elemanlar yöntemi gereği problemi $\Omega:=(0,L_x)\times(-L_y,L_y)$ ile sınırlamak gerekmektedir. x=0 ekseninde sınırlama yapmaya gerek yoktur. $x\to\infty$ iken $u\to 0$ 'dır. Sonlu eleman çözümleri için Neumann sınır şartları kullanılarak problem aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\frac{d}{dt}(u,w)+a(u,w)=0,\ \forall w\in V_0\,. \tag{3.12}$$

Verilen $u(x,y,0)$ için.

$$a(u,w)=\int_\Omega \frac{y^2x^2}{2}\partial_x u\partial_x w+\frac{\beta^2}{2}\partial_y u\partial_y w+(y^2-r)x\partial_x u+(e+\beta\partial_y\beta)\partial_y u+fu)w \tag{3.13}$$

olur. Bir boyutlu durum için:

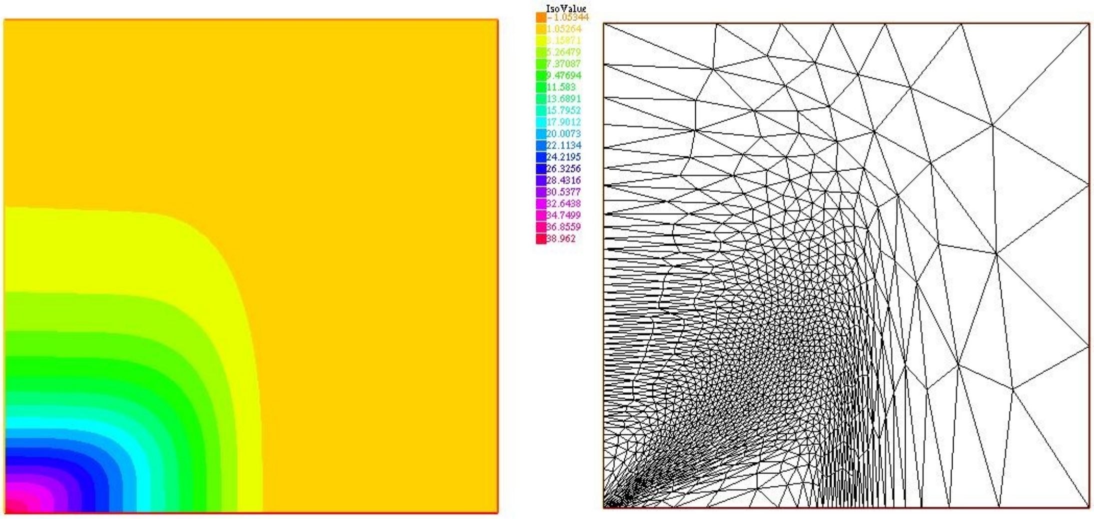
$u_m^h(x,y)=\sum_1^N u_i^m w^i(x,y)$ ifadesi $u(t_m)$ 'nin yaklaşık hâlidir ancak ve ancak u_i^{m+1} 'ler aşağıdaki denklemin çözümü olduğunda:

$$B\frac{U^{m+1}-U^m}{\delta t_m}+AU^{m+1}=0\,,\quad B_{ij}=(w^j,w^i)\text{ ve } A_{ij}=a(w^j,w^i)\text{ dir.} \tag{3.14}$$

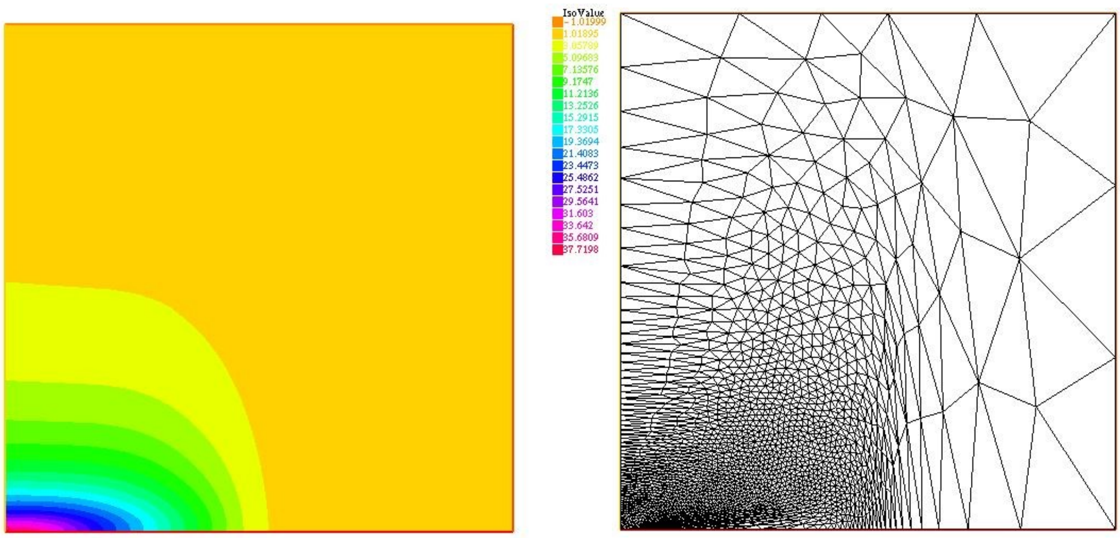
Burada $u_m^h(x,y)$ yaklaşımı V Hilbert Uzayının sonlu bir alt kümesi olan V^h üzerinde tanımlanmıştır.

4. NÜMERİK ÇÖZÜMLER

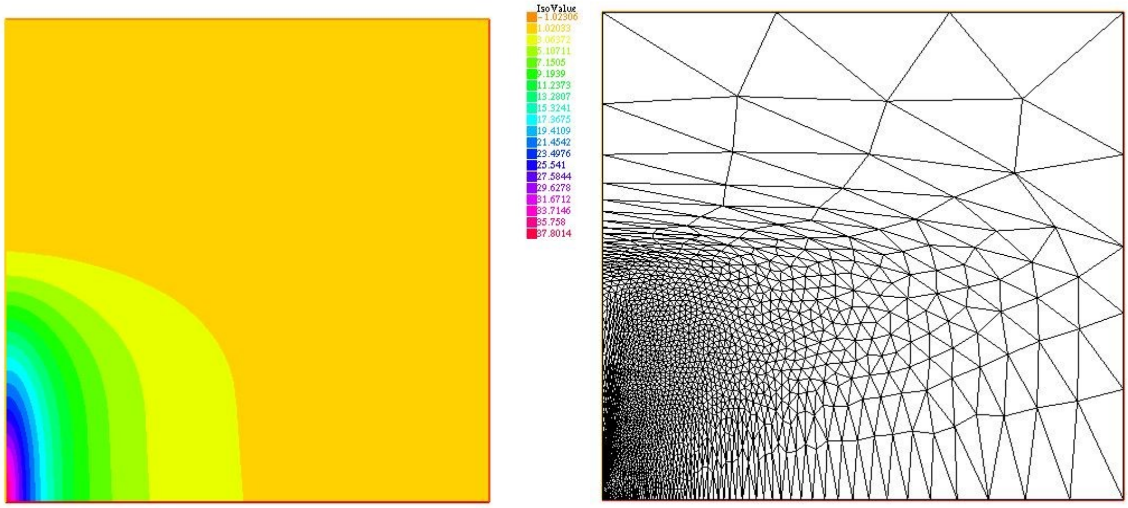
Sonlu Elemanlar yönteminin çözümünde kullanılan FreeFem++[12] programı 2 boyutlu kısmi diferansiyel denklemlerin çözümleri için daha kullanışlı olduğundan nümerik uygulamalar için opsiyon üzerindeki dayanak varlığı bir tane değil de iki tane olarak alacağız ve sonuçları bu şekilde elde edeceğiz.
(3.14) ile verilen denklemi çözmek için, FreeFem++ programı kullanılarak bir kod hazırlanmıştır. Değişen volatiliteler için model tekrarlanarak elde edilen sonuçlar kontur grafikleri hâlinde verilmiştir. Her bir çözüm sunulurken normal ağ örgüsü ve adaptif ağ örgüsü sonuçları ayrı ayrı verilmiştir. Sonuçlardan da görüleceği üzere birçok durumda problemin çözümünü normal ağ örgüsü üzerinde tam olarak elde etmek mümkün değilken ağ adaptasyonu ile çözümler çok daha kaliteli bir şekilde elde edilmiştir. Tüm hesaplamalar için dayanak varlıklar arasındaki korelasyon değeri ρ = 0.3, risksiz faiz oranı r = 0.05, kullanım fiyatı K=40 ve vade T=0.5 olarak alınmıştır. Çeşitli volatilite durumları için opsiyon fiyatını veren sonuçlar aşağıda ayrıntısı ile sunulmuştur.



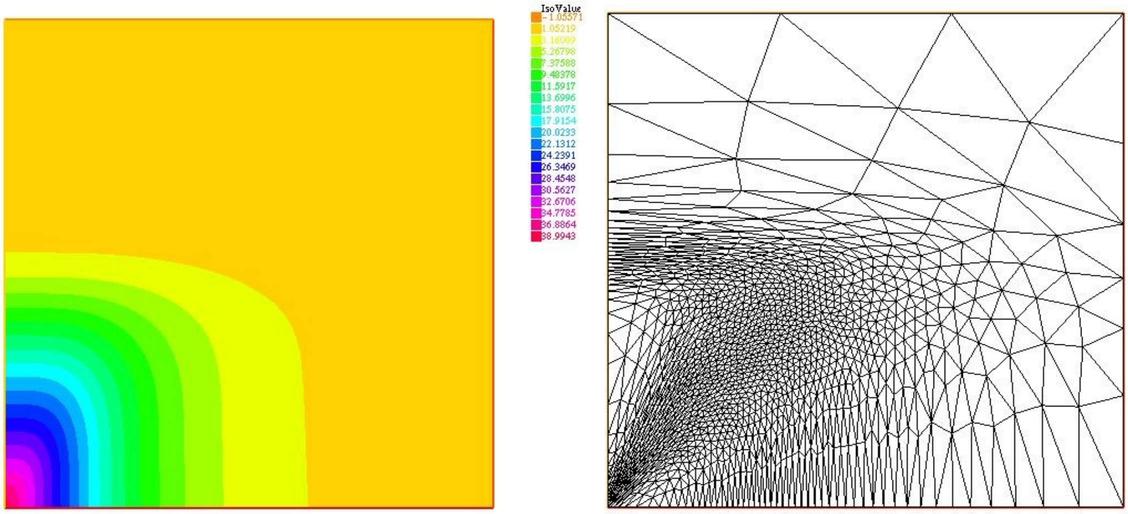
Şekil 1. σ_1 = 0.1ve σ_2 = 0.5 için opsiyon fiyatı kontur grafiği ve kullanılan adaptif ağ örgüsü



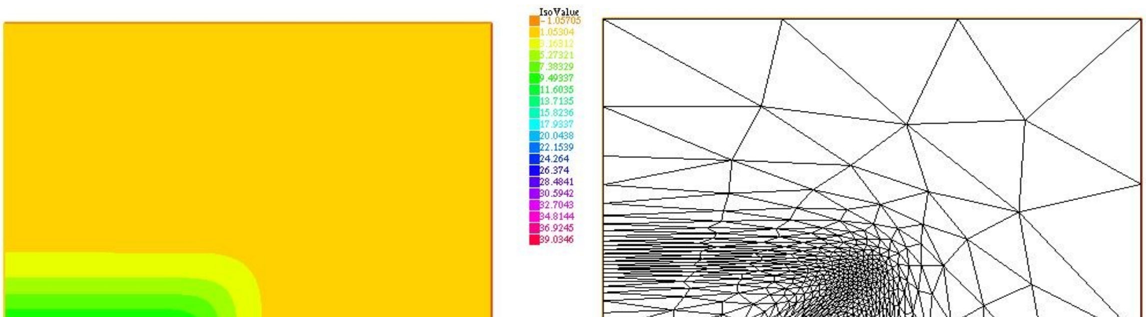
Şekil 2. σ_1 = 0.1 ve σ_2 = 0.9 için opsiyon fiyatı kontur grafiği ve kullanılan adaptif ağ örgüsü



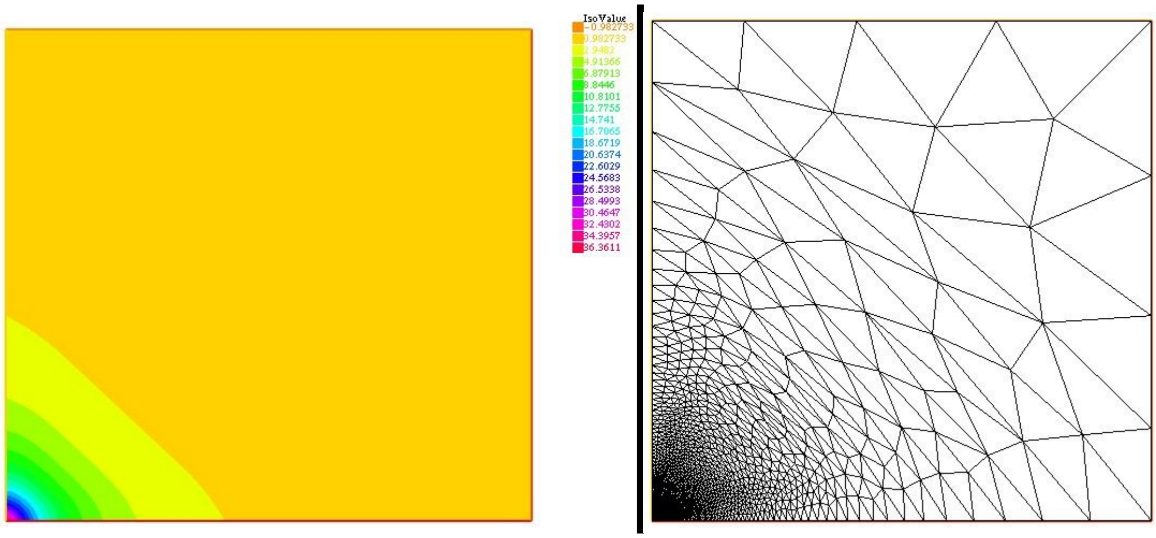
Şekil 3. σ_1 = 0.9 ve σ_2 = 0.1 için opsiyon fiyatı kontur grafiği ve kullanılan adaptif ağ örgüsü



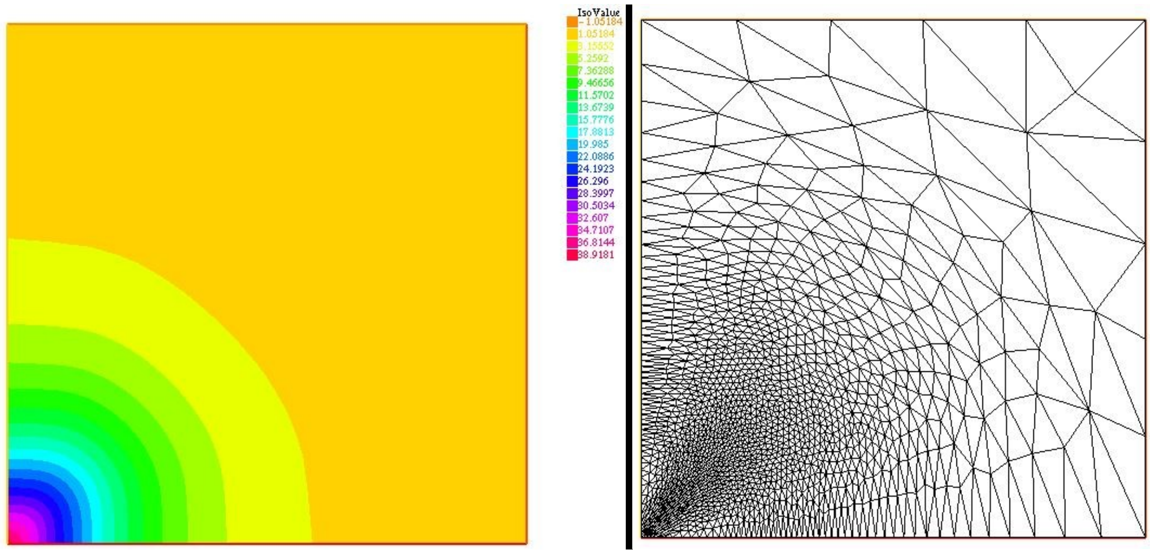
Şekil 4. σ_1 = 0.5 ve σ_2 = 0.1 için opsiyon fiyatı kontur grafiği ve kullanılan adaptif ağ örgüsü



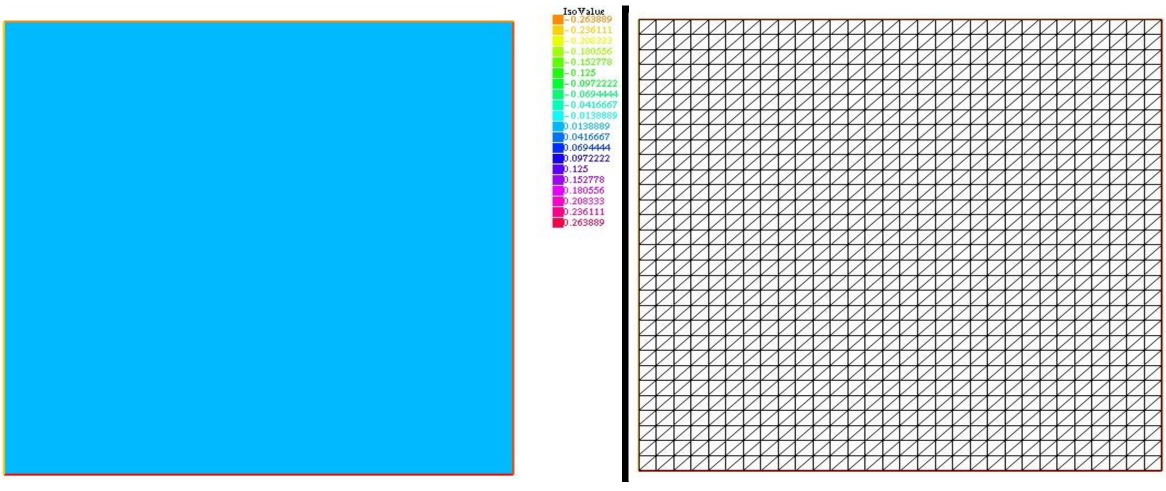
Şekil 5. σ_1 = 0.1 ve σ_2 = 0.1 için opsiyon fiyatı kontur grafiği ve kullanılan adaptif ağ örgüsü



Şekil 6. $\sigma_1 = 0.9$ ve $\sigma_2 = 0.9$ için opsiyon fiyatı kontur grafiği ve kullanılan adaptif ağ örgüsü



Şekil 7. $\sigma_1 = 0.5$ ve $\sigma_2 = 0.5$ için opsiyon fiyatı kontur grafiği ve kullanılan adaptif ağ örgüsü



Şekil 8. Normal ağ örgüsü ile tüm değerler için elde edilen opsiyon fiyatı kontur grafiği ve ağ örgüsü

Yukarıda verilen Black Scholes denkleminin sonlu eleman çözümlerinden çıkarılan yorum ve analizler şu şekildedir:

Volatilite değeri arttıkça opsiyonun fiyatına ilişkin çözümü bulmak zorlaşacaktır ve bunun için kullanılan kod adaptif ağ örgüsünü sıklaştıracaktır. Şekil 1, Şekil 2, Şekil 3 ve Şekil 4 de normal oynaklık değerleri için elde edilen sonuçlar görülmektedir. Oynaklığın sıklaştığı Şekil 6 ve Şekil 7'de ağ örgüsünün sıklaştığı görülmektedir. Her iki volatilitenin yüksek olduğu Şekil 6'da adaptif ağ örgüsü en sıkı hâldedir. Oynaklık arttıkça opsiyon primleri daha pahalı hâle gelir. Ayrıca fiyatın yüksek olması da yatırımın riskli olduğunu göstermektedir. Volatilitenin küçük olduğu durumda opsiyon için ödenecek fiyat en düşüktür. Şekil 5'te de oynaklıkların küçük olması oluşan adaptif ağ örgüsünün sık olmamasının temel nedenidir.

Riske atılacak opsiyon değeri volatilitenin en küçük olduğu Şekil 5'te görülmektedir. Şekil 8'de elde edilen sonuç aslında tüm 3 durumda uygulanan adaptifliğin kaldırılması sonucu elde edilen çözümdür ve bu her değişen volatiliteler için aynı grafiği vermektedir. Yani ağ örgüsünün adaptifliği kaldırıldığında beklenen çözüm elde edilememiştir.

5. SONUÇ

Bu çalışmada opsiyonların fiyatlandırılması için kullanılan Black Scholes denkleminin Avrupa tipi opsiyonu için sonlu elemanlar yöntemi ile çözümü incelenmiştir. İki dayanak varlık üzerindeki opsiyon için çıkarılan diferensiyel denklem varsayılan değerler üzerinden Freefem++ programı ile kod hazırlanarak çözülmüştür. Değişik oynaklıklar üzerinde opsiyon fiyatı için kontur grafikleri ve adaptif ağ örgüleri incelenmiştir. Kontur grafikleri ve adaptif örgüleri ile opsiyonun risk değerlemesi yapılmıştır. Black Scholes denkleminin kararsızlaştığı durumlarda nümerik kararlaştırma kullanılarak denklem için güvenilir çözümlerin elde edilmesi ileriki çalışma konuları olarak düşünülmektedir.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma kısmen ilk yazarın yüksek lisans tezinden üretilmiştir.

ÇIKAR ÇATIŞMASI/ÇAKIŞMASI BİLDİRİMİ

Yazarlar arasında çıkar çatışması/çakışması bulunmamaktadır.

KAYNAKLAR

[1] Black, F., Scholes, M. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *The Journal of Political Economy*, 81(3), 637-654.
[2] Apak, S., Uyar, M. (2011). *Türev Ürünler ve Finansal Teknikler(Birinci Baskı)*. Türkiye: Beta Yayınevi, 3-14, 48, 73, 108, 114-115.
[3] Saunders, A., Cornett, M.M. (2012). Financial *Markets and Institutions (Fifth Edition)*. New York: Mcgraw-Hill Higher Education, 1-754.
[4] Şeker, K., Çemberlitaş, İ., Altundağ, S. (2018). Opsiyon Sözleşmeleri ve Opsiyon Sözleşmelerinden Doğan Kar/Zararın Hesaplanması. *Sosyal Bilimler Akademi Dergisi*, 120-140.
[5] Clarke, R.G. (1996). *Options and Futures: A Tutorial. The Research Foundation of The Institue of Chartered Financial Analysits*. New York, 1-124.
[6] Saltoğlu. B. (2014). *Türev Araçlar, Piyasalar ve Risk Yönetimi. Lisanslama Sınavları Çalışma Kitapları. İstanbul: Boğaziçi Üniversitesi ve Risktürk*. İstanbul, 1-179.
[7] Damodaran, A. (1995). *Investment Valuation. Tools and Techniques for Determining the Value of any Asset (Third edition)*. New York: John Wiley & Sons, 1-17.
[8] Australian Security Exchange. (2000). *Understanding Options Trading*. Sydney, 1-40.
[9] Cox, J.C., Rubinstein M. (1985). *Options Market. University of California, Berkley*. New Jersey, 215-236.
[10] Seth, S. (2018). *How and Why Interest Rates Affect Options.* Investopedia.
[11] Pham, K. (2007). *Finite Element Modeling of Multi-Asset Barrier Options*. Reading, 1-57.
[12] Hecht, F. (2012). *New development in FreeFem++*. New York, 1-65.