Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi **25** (1-2) 390 - 399 (2009)
http://fbe.erciyes.edu.tr/
ISSN 1012-2354

DÜZLEM ÜÇGENDE AÇILARIN KENARLARDAN BULUNMASI

Veli AKARSU[1,*]

Zonguldak Karaelmas Üniversitesi, ZMYO Teknik Programlar Bölümü, ZONGULDAK

ÖZET

Bu çalışmada incelenen problem, herhangi bir düzlem üçgenin α, β ve γ iç açılarının sinüs, kosinüs ve tanjant temel trigonometrik fonksiyon değerlerinin, üçgenin a, b ve c kenarlarına bağlı olarak hesaplanmasından, faydalanılarak iç açılarının hesaplanabilirlik olanakları ve doğrulukları incelenmiştir.
Anahtar Kelimeler: Açı, Düzlem Üçgen, Trigonometrik fonksiyon, Doğruluk.

DETERMINING ANGLES FROM SIDES IN PLANAR TRIANGLE

ABSTRACT

This study investigates the computability possibilities and accuracies of internal angles of a planar triangle utilizing the computation of basic trigonometric function values - such as sin, cosine and tangent - of internal angles α, β and γ based on a, b and c sides of the triangle.
Keywords: Angle, Planar Triangle, Trigonometric function, Accuracy.

***E-posta**:veli.akarsu@gmail.com

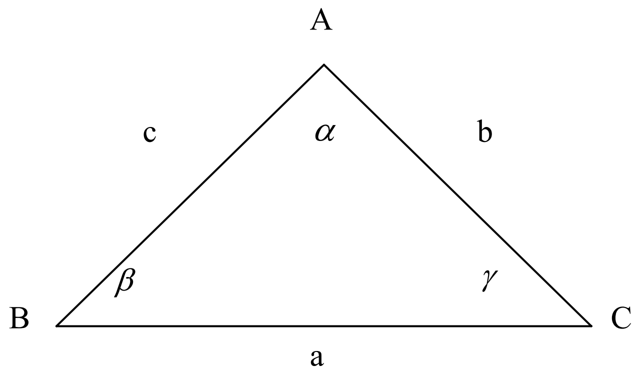
1. GİRİŞ

Açı, R^2 Öklid düzleminde belli bir sırada alınmış üç nokta ile tanımlanır. Sıralı A, O ve B noktaları $\angle AOB$ açısını oluşturur. Ham açı, sınır noktaları ortak (O) noktası) iki yarı doğrunun (OA ve OB) oluşturduğu bir sırasız çift veya küme olarak tanımlanır. Yönlü açı, sınır noktaları (O) olan ve ortak iki yarı doğrudan (OA ve OB) meydana gelen sıralı bir çift veya kümedir. Yönlü açı düzlem trigonometrinin temel bir büyüklüğüdür. Sinüs, Kosinüs ve Tanjant gibi temel trigonometrik fonksiyon değerleri yönlü açıya bağlı değişirler. Doğrular arasındaki açı herhangi bir (OA, OB) sıralı doğru çifti olup, bu açının ölçüsü $\angle AOB$ ile gösterilir. Bir açının ölçüsü düzlemdeki eğrilerin uzunluğunun ölçülmesi ile tanımlanır. Birim çember yay uzunluğu açı ölçüsü için kullanılır. Açı ölçüsü için yarım birim çember yay uzunluğunun π radyan ve bu uzunluğun da $\pi\langle 4$ olduğu [1] tarafından gösterilmiştir. Ham ve yönlü açı kavramları yaygınlık kazanmış ve genel olarak doğru anlaşılmasına karşın, bu iki açıdan da önemli olan doğrular arasındaki açı az tanınmış ve sık sık yanlış anlaşılmıştır [2]. Düzlem üçgenin köşelerindeki açılar doğrular arasındaki açılardan oluşur.

Bu çalışmada incelenen problem şudur: Şekil 1'deki ΔABC düzlem üçgenin a, b ve c kenarları $\Delta a, \Delta b$ ve Δc kadar hesap hataları ile yüklü olarak, α, β ve γ açıları en az hesap hatasından etkilenmiş olarak hangi trigonometrik fonksiyonla ($\sin\alpha, \cos\alpha, \tan\alpha$ veya $\sin(\alpha/2), \cos(\alpha/2), \tan(\alpha/2)$, ...) bulunması gerektiğinin belirlenmesidir. Üçgenin kenarları ile kenarlarının karşılarındaki tam ya da yarım açılarının trigonometrik fonksiyon değerlerinin hesabına ilişkin bağıntılar, [4] ve [5-23] kaynaklarında mevcuttur.

Şekil 1'deki düzlem üçgenin a, b ve c kenarları ile kenarların karşısındaki α, β ve γ açılarının sinüs, kosinüs ve tanjant temel trigonometrik fonksiyon değerlerinin hesabına ilişkin bağıntılar, sadece a kenarı karşısındaki α için verilmiştir. Üçgenin β ve γ açılarının temel trigonometrik fonksiyon değerlerinin hesabına ilişkin benzer bağıntılar, kenar ve açıların periyodik değişimiyle elde edilebileceğinden verilmemiştir. Benzer şekilde sadece, $\alpha/2, \alpha/4$ ve $\alpha/8$ açılarının trigonometrik fonksiyon değerlerinin hesabına ilişkin eşitlikler verilmiştir.

2. HERHANGİ BİR DÜZLEM ÜÇGEN İÇ AÇILARININ TEMEL TRİGONOMETRİK FONKSİYON DEĞERLERİNİN HESABI



Şekil 1. Herhangi bir düzlem üçgen kenarları ve iç açıları.

Şekil 1'deki düzlem üçgen için;

Kenar uzunlukları : $|BC| = a, |CA| = b, |AB| = c$

İç açıları : $\angle CAB = \alpha, \angle ABC = \beta, \angle BCA = \gamma$

Çevre uzunluğu : $2u = a + b + c$

Yarı çevre uzunluğu : $u = (a + b + c)/2$

olarak ifade edilir.

2.1. Bazı Bağıntılar

$$2u = a + b + c; 2(u - a) = -a + b + c; 2(u - b) = a - b + c;$$
$$2(u - c) = a + b - c \tag{1}$$

$$4u(u-a) = -a^2 + (b+c)^2 \,; 4(u-b)(u-c) = a^2 - (b-c)^2 \tag{2}$$

$$16u(u-a)(u-b)(u-c) = (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^4 + b^4 + c^4) \tag{3}$$

$$bc - u(u-a) = (u-b)(u-c) \tag{4}$$

2.2. Tam Açı (α) Temel Trigonometrik Fonksiyon Değerlerinin Hesabı

Tam açının temel trigonometrik fonksiyon değerlerini kenarlardan hesaplamak için, önce Şekil 1'deki ΔABC düzlem üçgeninin a kenarına kosinüs kenar teoremi uygulanarak, aşağıdaki eşitlikler bulunur:

$$\begin{aligned}\cos\alpha = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc} &= \frac{-a^2 + (b+c)^2 - 2bc}{2bc} \\ &= \frac{(a+b+c)(-a+b+c) - 2bc}{2bc}\end{aligned} \tag{5}$$

Pisagor teoreminin düzlem trigonometrideki karşılığı ise,

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \tag{6}$$

olarak yazılabilir.

(5) eşitliği (6) eşitliğinde yerine yazılır ve (3) eşitliği de dikkate alınırsa,

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^4 + b^4 + c^4)}}{2bc} \tag{7}$$

(7) eşitliği elde edilir.

(5) ve (7) eşitlikleri de oranlanarak,

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)^2-2(a^4+b^4+c^4)}}{-a^2+b^2+c^2} \tag{8}$$

(8) eşitliği elde edilir.

2.3. Yarım Açı $(\alpha/2)$ Temel Trigonometrik Fonksiyon Değerlerinin Hesabı

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1-\cos\alpha = \frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}\ ;\ 2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1+\cos\alpha = \frac{(b+c)^2-a^2}{2bc} \tag{9}$$

Bu trigonometrik eşitliklerindeki $\cos\alpha$ fonksiyonu yerine (5) ifadesindeki eşiti yazılır ve (1) eşitlikleri dikkate alınırsa, aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(u-b)(u-c)}{bc}}\ ,\ \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{u(u-a)}{bc}} \tag{10}$$

Bu eşitlikler oranlanır ve (1) eşitlikleri dikkate alınırsa, şu eşitlik yazılabilir:

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{(u-b)(u-c)}{u(u-a)}} = \sqrt{\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{(a+b+c)(-a+b+c)}} \tag{11}$$

Bir açının üçe bölünmesi $(\alpha/3)$, ikiye bölünmesi $(\alpha/2)$ kadar kolay değildir. Çünkü açının üçe bölünmesi, üçüncü dereceden bir denklemin çözümüyle ilgilidir.

2.4. Dörtte Bir Açı $(\alpha/4)$ Temel Trigonometrik Fonksiyon Değerlerinin Hesabı

Yarım açı hesabına ilişkin çıkartılan (9), (10) ve (11) analitik ifadelere benzer olarak, dörtte bir açı temel trigonometrik fonksiyon değerlerinin hesabına ilişkin eşitlikler için,

$$2\sin^2\frac{\alpha}{4}=1-\cos\frac{\alpha}{2};\ 2\cos^2\frac{\alpha}{4}=1+\cos\frac{\alpha}{2} \tag{12}$$

$$\sin\frac{\alpha}{4}=\sqrt{\frac{\sqrt{bc}-\sqrt{u(u-a)}}{2\sqrt{bc}}}\ ,\ \cos\frac{\alpha}{4}=\sqrt{\frac{\sqrt{bc}+\sqrt{u(u-a)}}{2\sqrt{bc}}} \tag{13}$$

$$\tan\frac{\alpha}{4}=\frac{\sin\frac{\alpha}{4}}{\cos\frac{\alpha}{4}}=\frac{\sqrt{(u-b)(u-c)}}{\sqrt{bc}+\sqrt{u(u-a)}}=\frac{\sqrt{(a-b+c)(a+b-c)}}{2\sqrt{bc}+\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)}} \tag{14}$$

(12), (13) ve (14) analitik ifadeleri elde edilir.

2.5. Sekizde Bir Açı $(\alpha/8)$ Temel Trigonometrik Fonksiyon Değerlerinin Hesabı

(1), (2), (3) ve (4) eşitlikleri dikkate alınarak, sekizde bir açı hesabına ilişkin şu eşitlikler elde edilir:

$$2\sin^2\frac{\alpha}{8}=1-\cos\frac{\alpha}{4}\ ;\ 2\cos^2\frac{\alpha}{8}=1+\cos\frac{\alpha}{4} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}\tan\frac{\alpha}{8}&=\frac{\sin\frac{\alpha}{8}}{\cos\frac{\alpha}{8}}=\frac{\sqrt{(u-b)(u-c)}}{\sqrt{u(u-a)}+\sqrt{bc}+\sqrt{2bc+2\sqrt{bcu(u-a)}}}\\&=\frac{\sqrt{(a-b+c)(a+b-c)}}{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)}+2\sqrt{bc}+2\sqrt{2bc+\sqrt{bc(a+b+c)(-a+b+c)}}}\end{aligned} \tag{16}$$

3. TRİGONOMETRİK FONKSİYON DEĞERİ HATASININ AÇI HESABI ÜZERİNDEKİ ETKİSİNİN BULUNMASI

Trigonometrik fonksiyonların değerleri yönlü açının değişimine bağlıdır. Yönlü açı tanım kümesi $[0,2\pi]$ aralığındadır. Yönlü açının tanım aralığına bağlı olarak sinüs ve kosinüs trigonometrik fonksiyonların değer kümesi $[-1,1]$ aralığında, tanjant ve kotanjant trigonometrik fonksiyonların değer kümesi ise $(-\infty,\infty)$ aralığındadır. Eğer herhangi bir α açısının trigonometrik fonksiyon değerleri (y_i), aynı Δy kadar hatalı olması (küçük değişimi) durumunda bu hatanın farklı trigonometrik fonksiyonlardan aynı α açısının hesabında farklı $\Delta\alpha_i$ etkileri ortaya çıkacaktır. Bu etkiyi modellemek için, küçük açıların trigonometrik fonksiyon değerlerinin hesabına ilişkin yaklaşımdan, $\sin(\Delta\alpha) = \tan(\Delta\alpha) = \overline{\Delta\alpha} = \Delta\alpha^{''} / \rho^{''}$, $\rho^{''} = 206264^{''},8063$ ve $\cos(\Delta\alpha) = 1$ özellikleri dikkate alınacaktır. Diğer trigonometrik fonksiyonlar ile açı hesaplamaya Δy hatasının etkisi benzer yol izlenerek doğrudan yazılacaktır. Bu etkiyi ortaya çıkartan aşağıdaki (18) den (21)'e kadar olan eşitlikler, [3] kaynağında diferansiyel alma yöntemiyle de gösterilmiştir. Burada Δy, y trigonometrik fonksiyon değerindeki küçük bir artımı, $\Delta\alpha$ ise buna karşılık gelen açıdaki küçük bir artımı göstermektedir. Önce sinüs fonksiyonunu inceleyelim:

$$y_1 = \sin\alpha \tag{17}$$

$$\begin{aligned}\Delta y + y_1 &= \sin(\alpha + \Delta\alpha_1) = \sin\alpha\cos(\Delta\alpha_1) + \cos\alpha\sin(\Delta\alpha_1)\\ &= \sin\alpha + \cos\alpha\,(\Delta\alpha_1)\end{aligned}$$

$$\Delta\alpha_1^{''} = \frac{\Delta y}{\cos\alpha}\rho^{''} \tag{18}$$

(18) ifadesi elde edilir.

Benzer şekilde diğer trigonometrik fonksiyonlar için,

$$y_2 = \cos\alpha \ , \ \Delta\alpha_2^{''} = -\frac{\Delta y}{\sin\alpha}\rho^{''}$$
$$y_3 = \tan\alpha \ , \ \Delta\alpha_3^{''} = \cos^2\alpha\,(\Delta y)\,\rho^{''} \tag{19}$$
$$y_4 = \cot\alpha \ , \ \Delta\alpha_4^{''} = -\sin^2\alpha\,(\Delta y)\,\rho^{''}$$

(19) eşitlikleri yazılabilir.(18) ve (19) eşitliklerinden,

$$|\cos\alpha| \leq 1 \text{ ve } \cos^2\alpha \leq 1 \text{ eşitsizliklerinden } (1/\cos^2\alpha) \geq 1 \text{ olur.}$$
$$|\sin\alpha| \leq 1 \text{ ve } \sin^2\alpha \leq 1 \text{ eşitsizliklerinden } (1/\sin^2\alpha) \geq 1 \text{ olur.} \tag{20}$$

Bu eşitsizlikler ile (18) ve (19) eşitlikleri dikkate alınarak, şu eşitsizlikler yazılabilir:

$$|\Delta\alpha_3^{''}| \leq |\Delta\alpha_1^{''}| \ , \ |\Delta\alpha_3^{''}| \leq |\Delta\alpha_2^{''}| \text{ ve } |\Delta\alpha_4^{''}| \leq |\Delta\alpha_1^{''}| \ , \ |\Delta\alpha_4^{''}| \leq |\Delta\alpha_2^{''}| \tag{21}$$

Düzlem trigonometride üçgen çözümlerinde çeşitli çözüm yolları ile bulunan sonuçlar arasındaki farklar kullanılan formüllerin teorik yönden hatalı ya da yaklaşık oluşlarından değil, hesap hatalarından doğmaktadır [3]. Hesap hataları; başlangıç verilerinin (giriş) hataları, yuvarlatma hataları ve hesap kesme hatalarıdır. Bu hatalar, hesapla bulunan sonuç değerlerin kesinliğini, doğruluğunu ve güvenirliğini etkilerler. Bu hataların hesaplama sürecindeki karakteristik özelliği sistematik bir yapıda olmalarıdır. Sayısal hesaplamalarda anlamlı basamak (rakam) sayısı hesap hataları bakımından önemlidir. Verilen ve hesapla bulunan sonuç değerlerin basamak sayısı bu değerlerin doğruluğu, güvenirliği ve geçerliliği hakkında bir fikir verir. Duyarlık (precision) bir sayıda bulunan basamak sayısı ile ilgili olmasına karşın, doğruluk (accuracy), yöntem ve hesap hatalarından arınmışlıktır. (18) ve (19) eşitlikleri ile (21) eşitsizlikleri gereği, trigonometrik fonksiyon değerleri (y_i) 'de yapılan aynı bir Δy yuvarlatma hatası, sinüs ve kosinüs fonksiyonları kullanılarak bulunan açı, tanjant ve kotanjant fonksiyonları kullanılarak bulunan açıdan daha çok etkilenmektedir. Bu nedenle α açısı tanjant ve kotanjant fonksiyonlarından birisiyle hesaplanmalıdır. Daha açık olarak eğer α açısı, $0 \leq \alpha \leq \pi/4$ aralığında ise $\cot\alpha$ fonksiyonu ile $\pi/4 \leq \alpha \leq \pi/2$ aralığında ise $\tan\alpha$ fonksiyonu ile bulunmalıdır [3].

4. AÇILARIN KENARLARDAN BULUNMASININ DOĞRULUĞU

Eğer bir trigonometrik fonksiyon değerinde küçük bir değişim olursa, hesaplanan açı değeri de hatalı olarak elde edilebilir. Sinüs fonksiyonu açı 90° ye yaklaştığında, fonksiyon değerindeki küçük değişmeler çok büyük açı değişmelerine, kosinüs fonksiyonu ise açı 0° ye yaklaştıkça, küçük fonksiyon değişimleri çok büyük açı değişimlerine neden olurlar [3]. $\alpha \to 0^\circ$ için bütün kosinüs formüllerinde, $\alpha \to 90^\circ$ için $\sin\alpha$ 'da, $\alpha \to 180^\circ$ için $\cos\alpha$ 'da ve $\sin(\alpha/2)$ 'de hatalı sonuçlar elde edilir. Bunun dışında aynı basamaklı iki sayı arasında oluşturulan farklar, hesaplama doğruluğunu etkileyebilir. Bu duruma bütün tam açı trigonometrik fonksiyon değerlerinin hesabında ve $\sin(\alpha/4)$ 'deki kesirli sayı durumunda karşılaşılır. Tanjant formülleriyle hesaplanan açı söz konusu edilen nedenlerden bağımsızdır. Oysaki, $\alpha = 180^\circ$ sınır değeri için $\tan(\alpha/4)$ hesabında kaçınılmalıdır. Sürekli açının ikiye bölümünden gidilerek trigonometrik fonksiyon değerinin hesaplandığı kesirli formüllerin kesir sayıları, üçgen iç açılarının hesaplama doğruluğunu daha da artırabilir.

5. SONUÇ

Bir düzlem üçgenin iç açıları, üçgenin üç kenarına bağlı olarak (5) den (16)'a kadar olan bağıntılardan hesaplanabilir. Trigonometrik fonksiyon değeri biliniyorken, açının hesaplanması durumunda, yuvarlatma hatası bakımından tanjant veya kotanjant fonksiyonu, sinüs veya kosinüs fonksiyonundan (21) eşitsizlikleri gereği daha doğru sonuç verir [3].

Düzlem üçgenin ölçülen a, b ve c kenarlarına bağlı olarak α açısı (8) eşitliğindeki tanjant fonksiyonuyla, $(\alpha/2)$ açısı (11) eşitliğindeki tanjant fonksiyonuyla, $(\alpha/4)$ açısı (14) eşitliğindeki tanjant fonksiyonuyla ve $(\alpha/8)$ açısı ise (16) eşitliğindeki tanjant fonksiyonuyla hesaplanmalıdır. Kısaca açı hesabı yapılırken her durumda tanjant fonksiyonu kullanılmalıdır.

KAYNAKLAR

1. Nesin A., Açı Ölçmek, Matematik Dünyası, Bahar Sayısı, 72-79, 2005.

2. Tezer C., Düzlem Geometride Açılar ve Ölçüleri, Matematik Dünyası, 1, s3-6, 1991.

3. Yaşayan A., Hekimoğlu Ş., Küresel Trigonometri, KTÜ, Yer Bilimler Fakültesi, Yayın No:143/22, Trabzon, 1982.

4. Hammer E., Lehr - und Handbuch der ebenen und sphaerischen Trigonometri, 5. Aufl. J. B. Metzlersche Verlagsbuchhandlung, Stutgart, 1923.

5. Dörrie H., Ebene und sphaerische Trigonometrie, Verlag von R. Oldenbourg, München, 1950.

6. Hessenberg G., Kneser, H., Ebene und sphaerische Trigonometrie, Sammlung Göschen, Band 99,5. Aufl. Berlin, 1957.

7. Sigl R., Ebene und sphaerische Trigonometrie mit Anwendungen auf Kartographie, Geodaesie und Astronomie, Sammlung Wichmann, Neue Folge, Band 9, Karlsruhe, 1977.

8. Eichhorn H., Eine symmetrische Ableitung der Grundformeln der sphaerischenTrigonometrie, ZfV 101, 230-232, 1976.

9. Firneis M.G., Firneis F. J., Zur symmetrischen Ableitung der Halbwinkelformeln der sphaerischen Tigonometrie, ZfV 105, 271 – 279, 1980.

10. Baehr H.- G., Winkelsaetze für das ebene und das sphaerische Dreieck, ZfV 110, 496 – 502, 1985.

11. Werkmeister P., Einführung in die ebene Trigonometrie, Verlag von Konrad Wittwer, Stuttgart, 1921.

12. Süer B., Küresel Geometri, Gazi Üniversitesi Yayın No: 189, Fen-Edebiyat Fakültesi Yayın No: 28, Ankara, 1993.

13. Işık B.C., Küresel Trigonometri, YTÜ İnşaat Fakültesi, Sayı: İN.JFM- 06.001, İstanbul, 2006.

14. Daudt W., Ebene Trigonometrie, Paedagogischer Verlag Berthold Schulz, Berlin-Hannover-Frankfurt / Main, 1951.

15. Heiland F., Sammlung von Aufgaben aus der ebenen und sphaerischen Trigonometrie, Walter de Gruyter / Co, Berlin und Leipzig, 1922.

16. Beasley M.A., Plane Trigonometry, Cambridge: Macmillen and Co,London, 1938.

17. Hughes H.K., Miller G. T., Trigonometry, John Wiley and sons, Inc., New York, 1858.

18. Harang F., Elements De Trıgonometrie, Dunod 92, Rue Bonaparte (VI), Paris, 1948.

19. Moyer R.E., Frank Ayres JR., Trigonometry, Theory and Problems of Trigonometry, Schaum's Outline Series,McGraw-Hill, New York, 1999.

20. Lother G., Grundlagen der ebenen und sphaerischen Trigonometrie, Hochschule München fakultaet für Geoinformation, 2007.

21. Hebisch U., Ebene und Sphaerische Trigonometrie, TU Bergakademie Freiberg, 2008.

22. Akarsu V., Düzlem Trigonometri Ders Notları, ZKÜ, ZMYO, Zonguldak, 2009.

23. Hess A., Çeviren: Bedi Ilgım,Trigonometri, Teknik Okul Yayınları, Sayı: 28, İstanbul, 1955.