International Journal of Educational Studies in Mathematics, 2022, 9(2), 84-107

International Journal of Educational Studies in Mathematics

IJESIM

EDUGARDEN

An Investigation of Eighth Grade Students' Knowledge Construction Process of Square Root Numbers

Yakup Dinç[1], Kürşat Yenilmez[2]

[1] *Ministry of National Education, Eskişehir, Türkiye*

[2] *Eskişehir Osmangazi University, Faculty of Education, Eskişehir, Türkiye*

ABSTRACT

The aim of this study is to examine the 8th grade students' knowledge formation processes on square root numbers. The case study model, one of the qualitative research methods, was used as the research design, since it was aimed to examine how the knowledge creation processes of students with different mathematical achievements were formed in the research. The participants of the research are nine eighth grade students. Pilot application was carried out with three students and the main application was carried out with six students. Four practice questions were created in order to examine the eighth grade students' processes of forming the concept of square root numbers. The data collection tools of the research are the video recordings recorded during the semi-structured interview while the students answer the questions and the researcher notes obtained by the participant observation technique. The data of the research were analyzed using the descriptive analysis method. According to the findings of the study, a total of two students, one student in the pilot application and one student in the main application, reached the construction stage, out of nine students who participated in the research for the concept of irrational number. While students with moderate mathematics achievement reached the recognizing and building steps, some of the students with low mathematics achievement could not reach the recognizing or building steps.

ARTICLE INFO

Article History:
Received: 08.04.2022
Received in revised form: 30.05.2022
Accepted: 09.06.2022
Available online: 30.06.2022

Article Type: Research paper

Keywords: number of squares, irrational number, creation of information, abstraction, RBC+C theory

1. Introduction

Abstraction is a multifaceted complex concept. While Skemp (1978) defines abstraction as an activity in which we become aware of similarities, Sierpinska (1994) defines it as the art of separating a common feature or features of objects from objects and naming this feature. Despite different definitions, the common aspects of abstraction are that it includes a process and at the end of this process, the individual has acquired new learnings as a result of her own life and experiences.

Constructivism (Piaget, 1985) is the basis of abstraction studies in mathematics today. While emphasizing the importance of process-based evaluation of an individual's learning, Piaget emphasizes how the human mind realizes learning, and states that in this context, individuals resort to the abstraction method in learning a new concept. Piaget's idea of reflective abstraction formed the basis for later abstraction research in mathematics (Tall, 1991). As a result of these studies, *cognitive abstraction* and *socio-cultural abstraction* theories, which basically have the same starting point but differ in context, have been developed.

[2] Corresponding author's address: Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Meşelik Kampüsü, Eskişehir, Turkiye
e-mail: kyenilmez@ogu.edu.tr

DOI: https://doi.org/10.17278/ijesim.1100743

Cognitive approach theorists explain that abstraction comes together from a sequential mathematical process and an object, and that individuals reach a more advanced mathematical object by associating these objects in their minds according to their common characteristics (Herskhowitz, Schwarz and Dreyfus, 2001). They state that abstraction is achieved by examining the examples in the teaching process and noticing the common features in the examples (Özmantar, 2004; Yeşildere and Türnüklü, 2008).

Researchers who put forward the theory of socio-cultural abstraction, which constitutes the theoretical framework of this study: According to Hershkowitz, Schwarz, and Dreyfus (2001), abstraction; It is defined as "*the activity of vertically reorganizing previously acquired mathematical knowledge to form a new mathematical structure*".

Since abstraction consists of logical and mental processes that cannot be directly observed, there is a need to define observable actions that can be learned about the abstraction process (Dreyfus, 2007). In this direction, Hershkowitz, Schwarz, and Dreyfus (2001) argued that the abstraction process consists of three observable epistemic actions. They named these actions as recognizing, building and constructing and divided them into steps. The theory is called the RBC abstraction theory by combining the first letters of these words. In recent years, researchers who want to have information about the abstraction processes of students in the acquisition of mathematical concepts frequently use the RBC theory because it divides the abstraction process into observable steps.

The aim of this study is to observe the process of creating the irrational number (square root number) concept of eighth grade students whose mathematics achievement levels are different from each other and to make proposals for future teaching activities starting from the knowledge creation processes.

2. Method

In this study, the research design is intended to examine the process of creating knowledge mathematics achievement of students with different methods of qualitative research case study model was used. In the study "how" and "why" questions based on a phenomenon or event that allows in-depth examination holistic research method was preferred holistic multi-state pattern. A total of nine eighth grade students studying at a public school in Eskisehir during the academic year 2017-2018 have been studied. Participants were selected according to the opinions of their mathematics teachers. According to this criteria, three weak (0-55 points), three middle (70-85 points) and three good (90-100 points) level students were selected for the mathematics course success. In the pilot practice, a weak, medium and a good level student were employed for the mathematics course success. In the main application, two groups were formed from the participants and the groups were divided into three categories as weak, medium and good according to their achievement levels.

Within the scope of the study, four questions were prepared for the first two goals of the eighth grade square subjects ("Determines the relationship between perfect square positive integers and their square roots" and "Determines between which two natural numbers a non-perfect square root number is") in the Mathematics Curriculum in order to examine the process of forming the irrational number concept of the eighth grade students. While the students answered the prepared questions, the video recordings recorded during the semi-structured interview and the investigator notes obtained by the participant observation technique were evaluated as data collection tool.

In the evaluation of the data, the RBC + C abstraction theory was used as a tool which creates the opportunity to examine by converting the mental processes of creating knowledge into observable action steps. In frame based on RBC + C theory, data are organized and presented under the themes of recognizing, building and constructing. The first three of the questions were designed for recognizing and building steps and the final question was for measuring, recognizing, building and consolidation the steps. There is no data or evidence for the consolidation step in this study.

3. Results

Nine students who participated in the research for the concept of irrational number in the findings obtained from the applications reached a total of two students constructing step, one student in the pilot practice with good mathematics success and one student in the main application. While students with intermediate mathematics achieve recognition and building steps, some of the students at lower levels of mathematics achievement did not reach recognition or building steps. In the emergence of this situation, it is seen that the sub information (prerequisite learning) required for the abstraction steps is not sufficiently understood (can not be abstracted).

When research findings are evaluated, in order to abstract the concept of irrational numbers, students need to be aware of what they have learned for the number sets in the mathematics curriculum. In other words, meaningful learning is required. In addition, it has been shown that in this research, students have succeeded in abstracting the concept that can be learned when students establish causeeffect relations in the abstraction process and perform intensive thinking on the concept to be abstracted. Therefore, before teachers can teach a concept as a pure knowledge to their students, they can design activities that students can not get out of with the existing structures in themselves and on this situation they can provide students with intensive thought life. In addition, pre-condition learning situations associated with that concept must be included in the mathematics learning program before a new concept is introduced. If this is the case, the teacher can detect this situation and if necessary, the lack of information can be eliminated and a new understanding can be achieved.

Sekizinci Sınıf Öğrencilerinin Kareköklü Sayılar Konusundaki Bilgiyi Oluşturma Süreçlerinin İncelenmesi

Yakup Dinç[1], **Kürşat Yenilmez**[2]

[1] *Milli Eğitim Bakanlığı, Eskişehir, Türkiye*
[2] *Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Eskişehir, Türkiye*

ÖZ

Bu çalışmanın amacı 8. sınıf öğrencilerinin kareköklü sayılar konusundaki bilgiyi oluşturma süreçlerinin incelenmesidir. Araştırmada farklı matematik başarısına sahip öğrencilerin bilgiyi oluşturma süreçlerini incelemek amaçlandığından araştırma deseni olarak nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması deseni kullanılmıştır. Araştırmanın katılımcılarını dokuz sekizinci sınıf öğrencisi oluşturmaktadır. Bu öğrencilerden üç öğrenci ile pilot uygulama, altı öğrenci ile esas uygulama gerçekleştirilmiştir. Sekizinci sınıf öğrencilerinin kareköklü sayı kavramını oluşturma süreçlerinin incelenmesi amacıyla dört uygulama sorusu hazırlanmıştır. Öğrenciler soruları cevaplarken yarı yapılandırılmış görüşme sırasında kaydedilen video kayıtları ve katılımcı gözlem tekniği ile elde edilen araştırmacı notları araştırmanın veri toplama araçlarını oluşturmaktadır. Araştırmanın verileri betimsel analiz yöntemi kullanılarak analiz edilmiştir. Araştırmadan elde edilen bulgulara göre, irrasyonel sayı kavramı için araştırmaya katılan dokuz öğrenciden matematik başarısı iyi olan pilot uygulamada bir öğrenci ile esas uygulamada bir öğrenci olmak üzere toplam iki öğrenci oluşturma basamağına ulaşmışlardır. Matematik başarısı orta seviyede olan öğrenciler tanıma ve kullanma basamaklarına ulaşırken matematik başarısı düşük seviyede olan öğrencilerden bazıları tanıma veya kullanma basamaklarına da ulaşamamışlardır.

MAKALE BİLGİ

Makale Tarihçesi:
Alındı: 08.04.2022
Düzeltilmiş hali alındı: 30.05.2022
Kabul edildi: 09.06.2022
Çevrimiçi yayınlandı: 30.06.2022
Makale Türü: Araştırma Makalesi

Anahtar Kelimeler: kareköklü sayı, irrasyonel sayı, bilgi oluşturma, soyutlama, RBC+C teorisi.

1. Giriş

Bilgi, düşünen birey ile düşünülen varlık arasındaki etkileşim sürecinin sonunda oluşan davranış değişiklidir. Edinilen her bilgi öğrenme eyleminin bir sonucudur. İnsanlık için son derece önemli olan öğrenme olgusu, günümüzde ve öncesinde insanlar için hep bir merak konusu olmakta ve bu doğrultuda öğrenme eylemini açıklayıcı, birbirine ışık tutan faklı kuramlar geliştirilmiş ve geliştirilmektedir.

Bu kuramlardan davranışçı yaklaşım kuramı, insanların öğrenmesini, hayvanlar üzerinde yapılan deneylerin sonuçlarıyla açıklayarak uyarıcı ile davranış arasında bağ kurup, doğrudan gözlemlenebilen davranış değişikliklerini öğrenme olarak kabul edilebileceğini savunmaktadır. Bilişsel kuram ise, öğrenmenin sadece gözlemlenebilir davranışlarla sınırlanamayacağını, gözlemlenemeyen davranışlarla da öğrenmenin oluşabileceğini ileri sürerek, öğrenme zihinsel bir süreçten oluşur ifadesiyle farklı bir bakış açısı kazandırmıştır. Diğer bir kuram olan yapılandırmacılık kuramı da bireyin öğrenmesinin laboratuvar ortamlarından ziyade çevreyle etkileşimini önemseyerek, öğrenme biçiminin herkes için genellenemeyeceğini, her bireyin öğrenmesinin öznel olduğunu savunmuştur. Yapılandırmacı öğrenme kuramı başlangıçta bireyin ‘‘nasıl’’ öğrendiği üzerine gelişmeye başlamışsa da zamanla bireyin bilgiyi ‘‘nasıl’’ yapılandırdığına ilişkin bir yaklaşım haline dönüşmüştür.

Günümüzde güncelliğini koruyan yapılandırmacı yaklaşım, alan araştırmacılarını öğrenme eyleminin nasıl gerçekleştiği sorusuna cevap arandığı, kılavuzlandığı öğretme sürecine yöneltmiştir. Bu kapsamda öğretme eyleminin en sık gerçekleştirildiği yer olan okullarda ‘‘öğrenme’’ üzerine çalışmalar gerçekleştirilmiştir. Öğrencilerin öğrenme süreçlerini inceleyen bu çalışmaların, öğrenciler tarafından öğrenilmesi zor olan derslerde yoğunlaştığı görülmektedir. Bu derslerin başında da matematik gelmektedir (Taşdemir, 2009).

Matematikle ilgili literatürde farklı tanımlara rastlamak mümkünken Yıldırım'a (2004) göre ''matematik bizi doğruya, kesin bilgiye götüren biricik düşünme yöntemi'' iken Baykul'a (2009) göre, matematiği tanımlamada bireylerin matematiklerinden beklentilerinin, matematiğe olan ilgilerinin ve matematikteki deneyimlerinin önemli bir etken olduğu belirtilmektedir. Başka bir ifadeyle, matematik belli bir düzen ve mantıksal sıralamaya sahip kavram ve işlemler üzerine kurulu bir bilimdir (Van de Walle, Karp ve By-Williams, 2013).

Tanımda geçen ''işlem'' ve ''kavram'' ifadeleri matematiğin farklı iki yapısı olan işlemsel ve kavramsal yapısına dikkat çekmektedir. Bu bağlamda matematik öğrenmek için kavramsal ve işlemsel bilgiye ihtiyaç vardır ve derslerde her iki tür bilginin de öğretilmesi önemlidir (Olkun ve Toluk, 2004). Aynı zamanda, yenilenen öğretim programlarında matematik öğretiminde öğrencilerin başarılı olabilmesinin şartlarından biri de öğrencilerin matematikle ilgili kavram ve işlemleri anlamalarına, arasında bağ kurmalarına yardımcı olacak bir öğretimin gerçekleştirilmesi olarak açıklanmaktadır (MEB, 2018).

Matematikte işlem bilgisi, Van de Walle, Karp ve Bay-Williams' a (2013) göre, işlemleri yaparken kullanılan kurallar ve sembollere ilişkin bilgiler bütünüyken kavramsal bilgi, konuya ve kavramlara dair temel fikirler ve bu kavramlar arasındaki kurulan ilişkilere dair bilgilerdir. Benzer olarak, işlemsel bilgi sembol, matematiksel dil kullanımı, algoritma, kurallar, problem çözmek için gerekli prosedür bilgisiyken, kavram bilgisi de kavramın tanımını bilmekten öte kavramlar arasındaki geçişleri sağlayabilmeyi, öğrenilecek yeni kavramı öğrenilmiş önceki kavramlarla ilişkilendirip anlamlı bir biçime dönüştürebilmeyi içerir (Baki ve Kartal, 2004). Bu açıdan bakıldığında kavramsal bilgi, işlemsel bilgiden daha derin matematiksel düşünme süreçleri sonunda ortaya çıkar. Özetle, kavram bilgisinin oluşabilmesi için ön öğrenmelerin sonraki öğrenmelerle ilişkilendirilmesi gerekmektedir. Bu ilişkilendirmede de en çok başvurulan yöntemlerden birisi de soyutlamadır.

Soyutlama çok yönlü karmaşık bir kavramdır. Dolayısıyla literatürde, farklı tanımlamalarla karşılaşılmaktadır. En genel anlamda soyutlama Türk Dil Kurumu'na (2018) göre ''Bir nesnenin özelliklerinden veya özellikleri arasındaki ilişkilerden herhangi birini tek başına ele alan zihinsel işlem, gerçeklikte ayrılamaz olanı düşüncede ayırma'' şeklinde belirtilmektedir. Soyutlamanın çeşitli bilimlerde kullanılan ortak bir kavram olmasından dolayı, çoğu eğitimci ve psikolog, soyutlama kavramına farklı bakış açıları ile değerlendirmektedir (Ohlsson ve Regan, 2001). Skemp (1978) soyutlamayı benzerliklerin farkına vardığımız bir aktivite olarak belirtirken, Sierpinska (1994), nesnelerin sahip olduğu ortak bir özelliği veya özellikleri nesnelerden ayırma ve bu özelliğe isim verme sanatı olarak tanımlamaktadır. Farklı tanımlamalara rağmen soyutlamanın ortak yönleri, bir süreç içermesi ve bu sürecin sonunda bireyin kendi yaşantı ve deneyimleri sonucu yeni öğrenmeler edinmiş olmasıdır.

Yaşamın soyutlanmış biçimi (Altun, 2006) olan matematik bilimi için soyutlama son derece önemlidir. Matematik'te soyutlamayı önemli kılan nedenler aşağıdaki gibi sıralanabilir:

1- Matematik biliminin yığılmalı be birikimli bir bilim olması,

2- Matematikte öğrenilen konuların soyut kavramlardan oluşması,

3- Güncel öğretim paradigmalarına göre matematik dersindeki kazanımların süreç açısından incelenmeyi gerektirmesi,

4- Matematikte önceki kavramların öğrenilecek bir sonraki kavramlar için önkoşul öğrenmeler içermesi,

5- Soyutlamanın matematiksel düşünmenin (Liu, 1996) önemli bir bileşeni olması,

6- Anlamlı öğrenmeler için soyutlamanın gerekli oluşu (Zembat,2007),

7- Matematik, bireyin zihinsel ve mantıksal yapılarını temele alan bir bilim olması,

8- Soyutlamanın matematik için temel bir süreç olması (Ferrari, 2003), matematik eğitiminde soyutlamayı önemli kılmaktadır.

Günümüzde matematik biliminde soyutlama çalışmalarının temelinde, yapılandırmacılık (Piaget, 1985) anlayışı yer almaktadır. Piaget, bireyin öğrenmelerini süreç temelli değerlendirmenin önemini vurgularken insan zihninin öğrenmeleri nasıl gerçekleştirdiği üzerinde durup, bu kapsamda bireylerin yeni bir kavramı öğrenmede *soyutlama* yöntemine başvurduklarını belirtmektedir. Bu bağlamda, nesnelerin özelliklerinden gelen bilgi ile ilgili olan *deneysel soyutlama,* nesnelerin oluşturdukları eylemlerin özellikleri ile ilgili *yarı-deneysel soyutlama* ve eylemler arasındaki etkileşimli ilişkilerle ilgili *yansıtıcı soyutlama* olmak üzere üç farklı soyutlama türü olduğunu belirtmektedir (Özmantar & Monaghan, 2007). Piaget'in yansıtıcı soyutlama fikri daha sonra matematik biliminde yapılacak soyutlama araştırmalarına temel oluşturmuştur (Tall, 1991). Bu araştırmalar sonucunda, temelde aynı çıkış noktasına sahip fakat bağlamda farklılıklar içeren *bilişsel soyutlama* ve *sosyo-kültürel soyutlama* teorileri geliştirilmiştir.

Bilişsel yaklaşım kuramcıları soyutlamanın sıralı matematiksel süreç ve nesneden bir araya geldiğini, bireylerin zihinlerindeki *bu nesneleri ortak özelliklerine göre ilişkilendirmek* suretiyle daha ileri bir matematiksel nesneye ulaştıklarını açıklamaktadırlar (Herskhowitz, Schwarz ve Dreyfus, 2001). Soyutlamanın, öğretim sürecinde örneklerin incelenmesi ve örneklerdeki ortak özelliklerin fark edilmesi ile gerçekleştiğini belirtmektedirler (Özmantar, 2004; Yeşildere ve Türnüklü, 2008). Piaget'in öncülüğündeki bu psikologlar soyutlamanın bir dizi eylemler sonucunda kazanıldığını, diğer bir ifadeyle ardışık olduğunu ileri sürmektedirler.

Özet olarak soyutlamayı bilişsel açıdan yaklaşan kuramcılar temelde üç ifade üzerinde birleşmişlerdir; (Özmantar ve Monaghan, 2007)

1-Soyutlama, basit süreçten karmaşık bir sürece doğru gelişir (somuttan soyuta ilkesi).

2-Soyutlaştırma çok sayıda durum içerisinden benzerliklerden yararlanarak ortak özellik çıkarma sürecidir.

3- Soyutlama bireyin zihin yapısı ile soyutlanacak kavram arasında gerçekleşen bir süreçtir (çevre ve zaman koşullarından bağımsız bir süreç).

Soyutlama kavramına *sosyo-kültürel* açıdan yaklaşan araştırmacılar, soyutlama sürecinde çevre koşullarının önemli olduğunu ileri sürerek yukarıdaki üçüncü ifadeye karşı çıkmışlardır. Fakat *sosyo-kültürel soyutlama* kuramcıları bilişsel soyutlama görüşünü reddetmekten ziyade yetersiz kaldığı durumlarda soyutlama için daha geniş bir kuramsal çerçeve sunmaktadırlar. Bu görüşün gelişmesinde Davydov' un (1990) *etkinlik kuramı*, Leont'ev (1981) tarafından Vygotsky'nin görüşüne uygun olarak geliştirilen *"aktivite teorisi"*, Freudenthal Okulu'nun *dikey matematikleştirme* fikri (Sezgin Memnun, 2011) temel oluşturmuştur. Bu görüşün savunucularına göre (Sfard, 1991; Noss ve Hoyles, 1996; Ohlsson ve Lehtinen, 1997; Van Oers, 2001; Hershkowitz, Schwarz ve Dreyfus, 2001) öğrenme, etkinlik temelli olarak gerçekleşir. Öğrenme eyleminde yapılan soyutlama sürecinde çevre, bireysel farklılıklar, öğretimsel araç-gereç kullanımı, sosyal etkileşim ve ortamı çevreleyen koşullar önemlidir (Yeşildere, 2006; Altun ve Yılmaz, 2008).

Bu çalışmanın kuramsal çerçevesini oluşturan *sosyo-kültürel soyutlama* teorisini ileri süren araştırmacılar: Hershkowitz, Schwarz ve Dreyfus'a (2001) göre soyutlama; *"önceden edinilmiş matematiksel bilgilerin yeni bir matematiksel yapı oluşturmak üzere dikey olarak yeniden organizasyonu aktivitesi"* şeklinde tanımlanmaktadır. Tanımda yer alan *"yeni bir matematiksel yapı"* ile soyutlama sonucunda oluşan matematiksel düşünce (kavram, bağıntı veya genelleme), *"aktivite"* sözcüğü ile bireysel veya grup çalışmalarında oluşturulmuş öğrenme ortamlarında öğrencilerin yürüttükleri eylemler, *"dikey organizasyon"* ile de kavramlar arasında ilişkiler kurmak suretiyle mevcut matematiksel nesnelerden daha formal bir matematiksel nesneye ulaşma (De Lange, 1996; van den Heuvel-Panhuizen, 1996) kastedilmektedir.

Soyutlamanın doğrudan gözlemlenemeyen mantıksal ve zihinsel süreçlerden oluşması soyutlama süreci hakkında bilgi sahibi olunabilecek gözlemlenebilir eylemlerin tanımlamasına ihtiyaç duyulmuştur (Dreyfus, 2007). Bu doğrultuda Hershkowitz, Schwarz ve Dreyfus (2001) soyutlama sürecini gözlemlenebilir üç epistemik eylemden oluştuğunu ileri sürmüşlerdir. Bu eylemleri tanıma (recognizing), kullanma (building) ve oluşturma (constructing) şeklinde isimlendirip basamaklara ayırmışlardır. Teori bu sözcüklerin ilk harflerinin bir araya getirilmesi ile RBC soyutlama teorisi olarak adlandırılmaktadır. Teoriye ek olarak, Dreyfus (2007) soyutlamanın gerçekleşmesi için pekiştirmenin gerekliliğine vurgu yapmış ve RBC olarak açıklanan soyutlama sürecine pekiştirmenin (consolidation) eklenmesiyle model RBC+C şeklinde ifade edilmeye başlanmıştır.

Son yıllarda matematiksel kavramların edinilmesinde öğrencilerin soyutlama süreçleri hakkında bilgi sahibi olmak isteyen araştırmacılar, soyutlama sürecini gözlemlenebilir basamaklara ayırmasından dolayı, RBC+C teorisini sıklıkla kullanmaktadırlar. Bu kapsamda Dooley (2006), ilköğretim düzeyinde matematiksel bilginin oluşturulması sürecinin analizi araştırmasında RBC+C soyutlama teorisinin kullanışlı bir araç olabileceğini belirtmektedir. RBC+C soyutlama modelinde bireylerin düşüncelerinin fark edilebilir eylemlere dayanılarak tanımlanması söz konusudur. Bu amaçla bireyin bilginin yapılandırılması sürecinde kullandığı bilişsel eylemler dikkate alınarak eylem basamakları oluşturulmuştur (Schwarz ve Dreyfus, 1995). Soyutlama sürecinin incelendiği bu model ilk ortaya çıktığında eylem basamakları *tanıma* (recognizing), *kullanma* (buildingwith) ve *oluşturma* (construction) bilişsel eylemleri üzerinden oluşurken, sonraları bilginin kalıcı hale gelmesi koşullarını inceleyen ve açıklayan bazı araştırmaların (Tabach ve Hershkowitz, 2002; Dreyfus ve Tsamir, 2004; Dreyfus, Hadas, Hershkowitz ve Schwarz, 2006; Monaghan ve Özmantar, 2004 ve 2006) ardından Dreyfus (2007) tarafından bu soyutlama sürecine *pekiştirme* (consolidation) bilişsel eyleminin de eklenmesiyle son halini almıştır. Bu bilişsel eylemleri ifade eden sözcüklerin baş harflerinin bir araya getirilmesi sonucunda elde edilen RBC+C modeli, bireyin bilişsel eylemleri üzerinden soyutlama sürecinin incelenmesine ve bu eylemlerin birbiriyle ne şekilde iç içe olduğunu anlama fırsatı sunmaktadır.

İlköğretimde matematiksel bilginin kazanılmasında önemli bir yeri olan sayı kavramının oluşturulmasının temelinde de soyutlama yer almaktadır. Örneğin doğal sayılar sayma süreçlerinden soyutlanmasıyla oluşmuş ve soyutlanma ile tamsayıların oluşumunda kullanılmıştır. Sonrasında tamsayılar soyutlanarak rasyonel sayılar, rasyonel sayıların soyutlanmasıyla da irrasyonel sayılar oluşmaktadır (Ferrari, 2003). Bu süreç içinde araştırmanın da konusu olan, öğrencilerin sayı kümelerinin soyutlanmasında en çok zorlandıkları irrasyonel sayı kümesidir. Literatürde bu konuda yapılan araştırmaların (Fischbein, Jehiam ve Cohen, 1995; Peled ve Hershkovitz, 1999; Moralı, Köroğlu ve Çelik, 2004; Seyhan ve Gür, 2004; Sirotic ve Zazkis, 2007; Shinno, 2007; Zehir, Işık ve Zehir, 2008; Zazkis ve Sirotic, 2010; Güven, Çekmez ve Karataş, 2011; Kara ve Delice, 2012; Voskoglou ve Kosyvas, 2012; Adıgüzel, 2013; Ercire, 2014; Kaplan ve Açıl, 2015; Baştürk, 2015; Güler, 2017; Özaltun Çelik & Bukova Güzel, 2017) sonuçlar incelendiğinde, araştırmaya katılan bireylerin irrasyonel sayı konusunda sıkça kavram yanılgısına düştükleri bunun yanında kavramsal ve işlemsel bilgi düzeylerindeki eksiklikleri göze çarpmaktadır. Buradan sonuçla, araştırmaya katılan bireylerin irrasyonel sayı kavramını yeterince soyutlayamadıkları bulgusuna ulaşılabilir.

İrrasyonel sayı kavramının algılanması, daha büyük sayı kümeleri için kritik bir rol üstlenmektedir (Sirotic ve Zazkis, 2007). Bu kritik rolüne rağmen irrasyonel sayı kavramına ilişkin yapılan çalışmaların, matematik eğitimi alanında yapılan diğer çalışmalarla kıyaslandığında yeterli olmadığı düşünülmektedir (Zazkis ve Sirotic, 2010). Yapılan bu kısıtlı çalışmalarda, irrasyonel sayıların oransızlığı, rasyonel ve irrasyonel sayıların ayırtedilmesi ve tanımlanması, rasyonel, irrasyonel ve gerçek sayıların sayılabilirliği ya da sayılamazlığı ile ilgili zorluklara işaret edilmektedir (Sirotic ve Zazkis, 2007; Güven, Çekmez ve Karataş, 2011; Fischbein, Jehiam ve Cohen, 1995; Adıgüzel, 2013; Voskoglou ve Kosyvas, 2012; Zazkis ve Sirotic, 2010; Peled ve Hershkovitz, 1999; Kara ve Delice, 2012; Shinno, 2007; Çiftçi, Akgün ve Soylu, 2015).

Benzer olarak irrasyonel sayıların anlaşılması ve yaklaşık değerinin hesaplanmasında da öğrencilerin güçlükler yaşadıkları (Peled ve Hershkovitz, 1999; Zehir, Işık ve Zehir, 2008; Kara ve Delice, 2012) ve bazı yanılgılara düştükleri (Peled ve Hershkovitz, 1999; Moralı, Köroğlu ve Çelik, 2004; Stafylidou ve Vosniadou, 2004; Seyhan ve Gür, 2004) yapılan çalışmalarla da desteklenmiştir. Peled ve Hershkovitz (1999) irrasyonel sayılar üzerine yaptıkları bir çalışmada öğrencilerin irrasyonel sayıların rasyonel sayı olarak yaklaşık değerini tahmin edemediğini ve bunun sonucunda irrasyonel sayıları, sayı doğrusu üzerinde doğru bir şekilde gösteremediğini yaptıkları çalışmada ortaya koymuşlardır. Stafylidou ve

Vosniadou (2004), Peled ve Hershkovitz (1999) ve Seyhan ve Gür (2004) ve Şandır, Ubuz ve Argün, (2007) yaptıkları çalışmalarda rasyonel ve irrasyonel sayıların sıralanmasında, karşılaştırılmasında ve yaklaşık değerinin hesaplanmasında öğrencilerin kavram yanılgısına sahip olduklarını belirtmişlerdir. Bu sonuçlardan yola çıkarak araştırmada soyutlama basamaklarının gözlenebilir süreçler içermesinden dolayı RBC+C teorisi kullanılarak 8. sınıf öğrencilerinin kareköklü (irrasyonel) sayı kavramını oluşturmadaki bilgi süreçlerinin incelenmesi amaçlanmıştır. Araştırmanın konusu olan kareköklü (irrasyonel) sayı kavramının sekizinci sınıf öğrencileri tarafından nasıl yapılandırıldığının, diğer matematik kavramlarıyla nasıl ilişkilendirildiğinin ve öğrenilen yeni kavramın ne şekilde soyutlandığının incelemesi açısından, çalışma önemlidir. Ayrıca kareköklü (veya irrasyonel) sayılar konusunda günümüze kadar yapılan araştırmaların birçoğu nicel olarak var olan durumu tespit etmeye yönelik iken bu araştırma, öğrencilerin var olan sayı kümeleriyle açıklayamadıkları bir problem durumundan hareketle yeni bir sayı grubunun *(irrasyonel sayılar)* varlığını fark etmeleri ve bu farkındalık sürecinin incelenmesi yönüyle yöntem olarak önceki çalışmalardan farklılık göstermesi açısından önemlidir.

2. Yöntem

Bu bölümde çalışmanın araştırma modeli, çalışma grubu, verilerin toplanması, veri toplama araçları, uygulama süreci ve verilerin çözümlenmesi hakkında bilgiler verilmektedir.

2.1. Araştırmanın Modeli

Bu araştırmada farklı matematik başarısına sahip öğrencilerin bilgiyi oluşturma süreçlerinin nasıl oluştuğunu incelemek amaçlandığından araştırma deseni olarak nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması deseni kullanılmıştır. Durum çalışmalarında bir veya birden fazla durumun, derinlemesine incelenmesi ve yorumlanması amaçlanır (Merriam, 2013). Yin'in (2003) ifade ettiği gibi durum çalışması olgu ile ilgili bağlam arasında sınırların kesin olarak çizilemediği durumlarda konunun doğal ortamında araştırılmasına imkân sağlar. Araştırmada "nasıl" ve "niçin" sorularını temel alarak bir olgu ya da olayı derinlemesine bütüncül incelemeye olanak veren araştırma yöntemi" olarak tanımlamaktadır.

2.2. Çalışma Grubu

Araştırmada 2017-2018 eğitim-öğretim yılında, İç Anadolu bölgesinde bir devlet okulunda eğitim öğretim gören sekizinci sınıf A ve B şubelerinden toplam 7 kız, 5 erkek öğrenci ile çalışılmıştır. Bu öğrencilerden üç kız öğrenci ile ise; pilot uygulamada çalışılmıştır. Katılımcılar, matematik derslerine giren matematik öğretmenlerinin görüşleri doğrultusunda seçilmiştir. Bu kritere göre matematik ders başarısı yönünden 2 zayıf, 2 orta ve 2 iyi öğrenci seçilmiştir. Pilot uygulamada, matematik ders başarısı yönünden 1 zayıf, 1 orta ve 1 iyi öğrenci ile çalışılmıştır. Gruplar başarı düzeylerine göre zayıf, orta ve iyi şeklinde üç kategoriye ayrılmıştır. Katılımcılar, derinlemesine araştırma yapabilmek amacıyla çalışmanın amacı bağlamında bilgi açısından zengin durumları içeren, amaçlı örneklemenin maksimum çeşitlilik yöntemine göre araştırmaya katılmaya istekli öğrenciler seçilmiştir. Ayrıca öğrencilerin irrasyonel sayı konusunu daha önce okulda veya farklı eğitim kurularında görmemiş olmasına dikkat edilmiştir. Bilimsel araştırma etiği gereğince katılımcıların isimleri kodlanarak verilmiştir. Katılımcı gruplarına ilişkin bilgiler aşağıdaki gibidir.

Tablo 1. Pilot uygulamaya katılan öğrenci gruplarına ilişkin bilgiler

Başarı Düzeyi	Katılımcılar
Düşük (55 puan ve altı)	Ö1
Orta (70-85)	Ö2
Yüksek (90-100)	Ö3

Pilot uygulama için matematik başarısı düşük, orta ve yüksek seviyede üç öğrenci seçilmiştir.

Tablo 2. Esas uygulamaya katılan öğrenci gruplarına ilişkin bilgiler

Başarı Düzeyi	Katılımcılar
Düşük (55 puan ve altı)	Ö4, Ö5
Orta (70-85)	Ö6, Ö7
Yüksek (90-100)	Ö8, Ö9

Esas uygulamada çalışma grupları oluşturulurken cinsiyet farkı gözetilmemiş olup grup bireylerinin matematik başarısının birbirine yakın olmasına özen gösterilmiştir. Esas uygulama çalışması ikişer öğrenciden oluşan gruplarla gerçekleştirilmiştir. Grup olarak gerçekleştirilen çalışmada öğrencilerin birbirleriyle diyalog halinde olmaları ve birbirlerine destek vermeleri ile daha iyi soyutlamalar yapabilmeleri amaçlanmıştır.

2.3. Verilerin Toplanması

Gözlem, görüşme, anket, doküman incelemesi, fiziksel katılım gibi farklı veri toplama tekniklerinin bulunduğu nitel araştırma yönteminde bunların dışında görüntüler, fotoğraflar, belgeseller, filmler, video kayıtları ve gerçek yaşam öyküleri ile de veri toplanabilme imkânı bulunmaktadır. Bunun yanında veri çeşitliliği, çalışma sonuçlarının objektif, geçerli ve güvenilir olmasını sağlamaktadır (Yıldırım ve Şimşek, 2016). Bu araştırma katılımcılara yöneltilen sorulara verilen yazılı dokümanlar, video kayıtları, gözlem ve görüşme sırasında araştırmacının aldığı notlardan elde edilen verilerden oluşmaktadır.

Sekizinci sınıf öğrencilerinin (kareköklü sayı) irrasyonel sayı kavramını oluşturma süreçlerinin incelenmesi amacıyla dört uygulama sorusu oluşturulmuştur. Öğrenciler soruları bireysel olarak cevaplarken yarı yapılandırılmış görüşme sırasında kaydedilen video kayıtları ve katılımcı gözlem tekniği ile elde edilen araştırmacı notları veri toplama aracı olarak değerlendirilmiştir. Görüşme sürecinde kullanılan soruların yer aldığı form ekte verilmiştir. Bu araştırmada, irrasyonel sayı kavramına ilişkin bilgi oluşturulma sürecinin incelenmesi amacıyla; M.8.1.3.1. Tamkare pozitif tam sayılarla bu sayıların karekökleri arasındaki ilişkiyi belirler. M.8.1.3.2.Tamkare olmayan kareköklü bir sayının hangi iki doğal sayı arasında olduğunu belirler (MEB, 2018), kazanımlarına yönelik öğrencilerin günlük yaşamlarından bildikleri olaylar üzerinden oluşturulan dört farklı uygulama sorusuna yer verilmiştir. Bu sorular, soyutlamanın süreç içinde gerçekleşmesine fırsat tanıyan, her biri yeni bir yapı bulunduran, öğrencilerin matematiksel düşünmelerini sağlayan ve bilgiyi oluşturma süreçlerini açığa çıkarabilmesini sağlayacak şekilde hazırlanmıştır. Hazırlanan sorulardan ilk üçü tanıma (recognizing) ve kullanma (building), dördüncü soru tanıma (recognizing), kullanma (building) ve oluşturma (constructing) basamaklarını ölçecek şekilde oluşturulmuştur. Hazırlanan sorular, yukarıdaki ilgili kazanımları ölçmeye yönelik oluşturulması nedeniyle pekiştirme (consolidation) basamağını ölçmeye yönelik uygulama sorusuna yer verilmemiştir. Bu problemlerdeki tartışma ve karar verme sürecinde öğrencilerin çarpanlar, bölenler, katlar ve karesel bölgelerin alan hesaplaması için gerekli bilgileri tanıyıp tanımadıkları tanıma (recognizing), bu bilgileri kullanıp kullanamadıkları kullanma (building) incelenmiş ve bu bilgilerden de yararlanarak yeni bir sayı kümesi bilgisini oluşturup oluşturamadıkları oluşturma (constructing) olarak bu süreçteki muhakemeleri ortaya koyulmaya çalışılmıştır. Bu bağlamda hazırlanan sorular alanında uzman iki bilim insanına inceletilmiş, inceleme sonucunda soruların görsel sunumunda, soru bağlamında, dil ve anlatımda gerekli düzenlemeler yapılmıştır. Bu sayede geçerlik ve güvenirlik sağlanmaya çalışılmıştır.

Araştırma kapsamında 2017-2018 eğitim-öğretim yılı güz döneminde yapılan görüşmelerin öncesinde ilgili kurumlardan gerekli izinler alınmış ve okul idaresine ve araştırmaya katılan öğrencilere araştırmanın amacı ve içeriği detaylı bir biçimde anlatılmıştır. Araştırmada cevaplanması istenen sorulara ilişkin, doğru ya da yanlış cevaba ulaşmaktan çok cevaba ulaşma süreçlerinin incelenmesinin amaçlandığı açıklanmıştır. Bu şekilde sınav ve not kaygısının oluşması engellenmeye çalışılmıştır. Bu bağlamda alan eğitimi uzmanları tarafından incelenerek hazırlanan sorular başarı düzeyleri düşük, orta ve yüksek olan birer öğrenci ile pilot uygulama çalışılmıştır. Her bir öğrenci ile bireysel olarak yapılan görüşmeler ortalama 20 dakika sürmüştür. Pilot uygulama yapılmasında, uygulama sorularının RBC soyutlama seviyelerini ölçüp ölçmediğinin belirlenmesi, soruların görsel, dil ve anlaşılabilirlik yönünden değerlendirilmesi ve araştırmacının deneyim kazanması amaçlanmıştır. Pilot uygulama sonucunda hazırlanan uygulama sorularının çalışmanın amacına uygun olduğu değerlendirilmiştir. Araştırmacının pilot soruların değerlendirilmesi sürecinde deneyim kazandığı düşünülmüştür. Görüşmelerde öğrencilerin soruları cevaplarken sesli düşünmeleri istenmiş verdikleri cevaplara "Neden bu şekilde düşündün?", "Bu sonuca nasıl ulaştın?" gibi sorular yöneltilip açıklama yapmalarına fırsat tanınarak düşünce biçimlerini ortaya çıkarmaları sağlanmıştır. Araştırmacı bu aşamada doğal katılımcı rolünde olup sorduğu sorularla katılımcıların zihnindeki şemaları keşfetmeye yönelik çalışma gerçekleştirmiştir (Geray, 2006). Esas uygulamada öğrencilerle grup şeklinde görüşmeler yapılmış olup görüşmeler video kamera ile okul yönetiminin tahsis ettiği bir odada kayıt altına alınmıştır. Böylelikle katılımcıların uygulama esnasında kendi aralarında ve araştırmacıyla gerçekleşen sözsüz iletişimlerini inceleme fırsatı da doğmuştur. Görüşmeler toplam üç hafta içerisinde gerçekleştirilmiştir.

2.4. Verilerin Analizi

Araştırmadaki verilerin analizi ve yorumlanmasında nitel veri analizi yöntemi kullanılmıştır. Nitel veri analizi, verilerin düzenlendiği farklı analiz birimlerine ayrıldığı sentezlendiği, örüntülerin ortaya çıkarıldığı, önemli değişkenlerin keşfedildiği ve hangi bilgilerin raporda yer alacağına karar verme sürecidir. Alan yazında nitel veri analizinin hangi basamaklardan oluştuğuna dair farklı açıklamalar olsa da nitel veri analizi betimleme, analiz ve yorumlama aşamalarıyla açıklanabilir. Betimleme toplanan verilerin araştırma sorusu ile ilgili olarak ne ifade ettiği ve genel olarak hangi sonuçları ortaya koyduğunu belirtme sürecidir. Analiz, verilerde saklı olan temaların kodlama ve sınıflamalar aracılığıyla ortaya çıkarılması bu temalar arasındaki bağların açıklanması sürecidir. Özetle betimlemede "ne" sorusuna cevap aranırken analiz kısmında "neden" ve "nasıl" sorularına açıklık getirilmektedir. Son olarak yorumlama ise araştırmada farklı yollarla elde edilen bulguların ne anlama geldiğini belirtme sürecidir (Büyüköztürk vd., 2016).

Bu araştırmanın verileri betimsel analiz yöntemine göre incelenmiştir. Betimsel analiz, çeşitli veri toplama teknikleri ile elde edilmiş verilerin, önceden belirlenmiş temalara göre analizini ve değerlendirilmesini içeren bir nitel veri analiz türüdür. Bu analiz türünde araştırmacı görüştüğü ya da gözlemiş olduğu bireylerin görüşlerini çarpıcı bir biçimde yansıtabilmek amacıyla doğrudan alıntılara sık sık yer verebilmektedir. Bu analiz türünde temel amaç, elde edilmiş olan bulguların okuyucuya özetlenmiş ve yorumlanmış bir biçimde sunulmasıdır (Yıldırım ve Şimşek, 2016).

Verilerin analizi aşamasında öğrencilerin hazırlanan soruları çözmeleri sırasında kaydedilen video kayıtları yazılı metne çevrilmiş, bilgi oluşturma süreci bakımından analiz edilmiştir. Bilgi oluşturma sürecinin analizi teorik çerçevede sunulan RBC+C kuramı referans alınarak gerçekleştirilmiştir. Yazılı metne dönüştürülen ifadeler ve elde edilen veriler sistematik ve açık bir şekilde düzenlenmiş, RBC teorisine göre oluşturulan çerçevede, veriler tanıma (recognizing), kullanma (building) ve oluşturma (constructing) temaları altında düzenlenip sunulmuştur. Bu araştırmadaki uygulama soruları pekiştirme (consolidation) soyutlama basamağını kapsamadığından, araştırmanın bulgularında, sonuç ve tartışma bölümlerinde pekiştirme (consolidation) soyutlama seviyesinde inceleme yapılmamıştır.

Her bir problemin çözümünde soyutlamaya yönelik bilişsel eylemler birlikte gözlenmiş ve kaydedilmiştir. Yazılı görüşme metinlerinin analizi, bu üç bilişsel eyleme göre gerçekleştirilmiştir. Daha sonra, elde edilen bulgular, uzman görüşü eşliğinde farklı açılardan bakılarak değerlendirmeler yapılmıştır.

Hazırlanan sorular iki alan eğitimi uzmanı tarafından incelenmiş, geçerlik ve güvenirliği sağlanmıştır. Nitel araştırmalarda iç geçerlilik ve dış geçerlilik yerine inandırıcılık ve aktarılabilirlik, iç güvenilirlik ve dış güvenilirlik yerine de tutarlık ve teyit edilebilirlik kullanılmaktadır (Yıldırım ve Şimşek, 2016). Çalışma süresince meydana gelen uzun süreli etkileşim, birçok veri toplama aracı kullanılması ve etkinliklerin alan eğitimi uzmanları tarafından da incelemesi ile iç geçerlik sağlanmıştır. Çalışmada matematiksel başarı düzeyi düşük, orta ve iyi olan öğrencilerle çalışılmıştır. Çoklu durum deseni kullanılarak, araştırmanın aktarılabilirliği (dış geçerliği) sağlanmaya çalışılmıştır. Çalışmada güvenirlik ise; çalışma sonrasında video kayıtları, gözlem notları iki farklı alan eğitimi uzmanı tarafından değerlendirilmiştir. Alan eğitimi uzmanlarının yorumları ile araştırmacı yorumlarının tutarlı olduğu görülmüştür. Nitel araştırma yöntemine uygun olarak araştırmadan elde edilen veriler çözümlenmiş, geçerlik ve güvenilirliğe dikkat edilerek analiz edilmiş, elde edilen bulgulara bir sonraki bölümde yer verilmiştir.

3. Bulgular

Bu bölümde, çalışmanın amacına yönelik iki farklı kazanımı içeren, açık uçlu dört sorudan oluşan etkinlik öğrencilere uygulanıp, uygulamalardan elde edilen bulgulara yer verilmiştir. Esas uygulamada çalışma grubu öğrencilerin matematik dersi başarısı ve öğretmen görüşlerine göre üç grup olacak şekilde oluşturulmuştur. Pilot uygulamada üç, esas araştırma uygulamasında altı toplamda dokuz katılımcı ile çalışılmıştır.

Araştırmada esas uygulamada gerçekleştirilen çalışmalarda matematik notları ve öğretmen görüşleri doğrultusunda belirlenen ikişer öğrenciden oluşan üç grupla çalışılmıştır. Uygulamalar sırasında video kaydı alınan görüşmelerin dökümü yapılarak soyutlama ifadesi içeren öğrenci diyalogları seçilerek bulgulara aktarılmıştır. Gerçekleştirilen uygulamalar soru bazında değerlendirilerek verilmiştir. Her soru için üç uygulama grubundaki öğrenci cevapları ayrı ayrı incelenerek bulgulara aktarılmıştır.

3.1. Birinci Etkinlikten Elde Edilen Bulgular

Birinci etkinlik sorusu: *Ayşe odasına kare şeklinde bir halı almak ister. Ayşe halı dükkânından alan ölçüleri 16 m² 20 m² 25 m² 35 m² olarak verilen halılardan, kenar uzunlukları tamsayı olan hangi halıları tercih etmelidir? Neden?*

Birinci etkinlik sorusunun yöneltildiği başarı düzeyi düşük olan Ö4 ve Ö5 öğrencileri ile gerçekleştirilen uygulamada, araştırmacı ile öğrenciler arasındaki diyalog aşağıda verilmiştir.

A: Soruyu okuduysanız ne söylemek istersiniz?
Ö4: Ben 20 diye düşünüyorum.
Ö5: Bende 25 diyorum.
A: Neden böyle düşünüyorsunuz?
Ö4: Çünkü odanın alanı, halının kenar uzunluğu böyle düşündüm.
Ö5: Ben bilmiyorum içimden öyle geçti.
A: Peki karenin alanını nasıl buluruz?
Ö4: Benim bir fikrim yok.
Ö5: Benim de.

Ö4 ve Ö5'in soruda istenilen kenar uzunlukları tamsayı olan karenin alanını tanıyamadıkları ve kendileri kenar uzunluğu tamsayı olan farklı karelerin alanlarını oluşturmadıklarından dolayı *tanıma (recognizing)* ve *kullanma (building)* basamağına ulaşamadıkları değerlendirilmektedir.

Birinci etkinlik sorusunun yöneltildiği başarı düzeyi orta olan Ö6 ve Ö7 öğrencileri ile gerçekleştirilen uygulamada, araştırmacı ile öğrenciler arasındaki diyalog aşağıda verilmiştir.

Ö7: Karenin alanını bulmamız gerekiyor alanını bulurken iki kenarını çarpmamız gerekir bu yüzden 16, 4 ile 4'ün çarpımı, 25'te 5 ile 5'in çarpımına eşittir ve bu iki halıyı alabilir.
A: Alanları 20 ve 35 metrekare olan halılar için ne söylersin?
Ö7: Alanı 20 olursa kenarları 4 ile 5 olur, 35 olursa kenarları 5 ile 7 olur o yüzden ikisi de olmaz.
Ö6: Bence de 16 ve 25 metrekare olur, diğerlerini aldığımızda kenar uzunlukları birbirine eşit olmadığı için halı kare olmuyor bu yüzden 20 ve 25'i tercih edemeyiz.
A: Peki alanı 20 ve 35 olan kare halı olabilir mi?
Ö7: Kenarları tamsayı olmaz o zaman.
Ö6: Ben de arkadaşımla aynı düşünüyorum.

Ö6 ve Ö7 öğrencileri karenin alanını bulmaya yönelik açıklamalarıyla *tanıma (recognizing)*, alanları verilen karelerin kenar uzunluklarını bulma veya kenarları uzunlukları tamsayı olan karenin alanına ulaşma işlemlerini gerçekleştirdikleri için *kullanma (building)* basamağına ulaştıkları gözlemlenmiştir.

Birinci etkinlik sorusunun yöneltildiği başarı düzeyi yüksek olan Ö8 ve Ö9 öğrencileri ile gerçekleştirilen uygulamada, araştırmacı ile öğrenciler arasındaki diyalog aşağıda verilmiştir.

A: Soru hakkındaki düşüncelerinizi öğrenebilir miyim?

Ö8: 16 ve 25 metrekarelik halıları tercih eder.

A: Neden?

Ö8: Çünkü kare halı dediği için alanını bulmak için aynı iki tamsayıyı çarparız. 20, 4 ile 5'in çarpımı o yüzden olmaz. 35, 5 ile 7'nin çarpımı o yüzden olmaz.

A: Peki. Alanı 35 ve 20 metrekare olan kareleri düşünürsek bu karelerin bir kenar uzunluğu tamsayı olmayan aynı iki sayının çarpımı olabilir mi?

Ö8: Soruda tamsayı deniliyor ama.

A: Kenar uzunlukları tamsayı olmasaydı alanı 20 ve 35 metrekare olan kare olabilir miydi?

Ö9: Olabilir.

Ö8: Olmaz nasıl olsun ki? Ya da kesirli olarak mı? Evet olabilir. Bence olmaz olmamalı.

A: Şu şekilde düşünebilir miyiz?

4x4=16, 5x5=25 ise ?x?=20 olduğunda soru işaretinin yerine ne tür bir sayı gelebilir veya böyle bir şey mümkün müdür?

Ö9: Evet olabilir soru işaretinin yerine gelecek olan sayı tamsayı olamayacağına göre ondalık sayı olabilir.

Ö8: Bence de olabilir.

Ö8 ve Ö9 öğrencilerinin karenin alanını hesaplamada iki kenar uzunluğunu çarpılacağını söylemeleri *tanıma (recognizing)* , kenar uzunlukları farklı tamsayılar olan karelerin alanlarını oluşturmaları *kullanma (building)* basamağına ulaştıkları göstergesi şeklinde değerlendirilmektedir. Esas uygulamada birinci etkinliğin sonunda öğrencilerin bulunduğu soyutlama basamakları Tablo 3'de verilmektedir.

Tablo 3. Esas uygulamada birinci etkinliğin RBC modeline göre incelenmesi

Basamaklar	Olası Gerekçeler	Katılımcılar
Tanıma	Karenin özelliklerini bilme Karenin alan hesaplamasını yapabilme (aynı sayıların çarpımlarının sonucu olduğunu bilme)	Ö6, Ö7, Ö8, Ö9
Kullanma	Alanı verilen karenin bir kenar uzunluğunu hesaplayabilme Kenar uzunluğu tamsayı olan karenin alanını inşa edebilme	Ö6, Ö7, Ö8, Ö9

Ö4 ve Ö5 öğrencisinin kare şeklinin özelliklerini bilemediklerinden dolayı verilen alanlardan hangisinin kareye ait olduklarını tanıyamadıkları ve kenar uzunluğu tamsayı olan karenin alanlarını oluşturamadıklarından *tanıma (recognizing*) ve *kullanma (building)* basamağına ulaşamadıkları değerlendirilmektedir. Ö6 ve Ö7 öğrencileri kareye ait özellikleri belirterek *tanıma (recognizing*), bu özellikleri soruda uygulayarak *kullanma (building)* basamaklarına eriştikleri gözlemlenmiştir. Ö8 ve Ö9 öğrencileri karenin özelliklerinin (alan, çevre) farkına vararak *tanıma (recognizing*), bu özellikleri farklı karelerde uygulayarak *kullanma (building)* basamağına ulaşmışlardır.

3.2. İkinci Etkinlikten Elde Edilen Bulgular

İkinci etkinlik sorusu: *Ahmet okçuluk kursuna gitmektedir. Kursun sonunda bir yarışma düzenlenmiştir ve öğrencilerden üzerinde 1'den 100'e kadar bazı sayıların olduğu balonlara atış yapmaları istenmiştir. Bu sayılar aynı iki pozitif tamsayının çarpımlarının sonucu hesaplanarak oluşturulmuştur. Ahmet tüm balonları vurduğuna göre, yarışmada toplam kaç balon patlatmıştır*?

İkinci etkinlik sorusunun yöneltildiği başarı düzeyi düşük olan Ö4 ve Ö5 öğrencileri ile gerçekleştirilen uygulamada, araştırmacı ile öğrenciler arasındaki diyalog aşağıda verilmiştir.

A: Düşüncelerinizi paylaşmak ister misiniz?
Ö4: Soruyu tam anlayamadım.
Ö5: Ben de.
A: Şöyle düşünebiliriz, üzerinde 1'den 100'e kadar sayıların yazdığı balonlar var. Oku atan kişi de bu balonlardan üzerinde aynı iki sayının çarpımının sonucu yazılı balonları vuruyormuş sizce kaç tane balon patlatır?
Ö5: Dört tane.
A: Neden?
Ö5: (Soruda verilen görsel temsildeki balonları gösteriyor) 2, 4, 6, olabilir.
Ö4: 17 ile 7'nin çarpımı olabilir. Bilmiyorum neden.
A: Ama soruda vuracağı balonun üzerindeki sayı aynı sayıların çarpımının sonucu olması gerek. Bana aynı sayıların çarpımına örnek verebilir misiniz?
Ö5: 12x12 olabilir.
A: 12x12'nin sonucu kaçtır?
Ö4: (Çarpıyor) 144 mü?
A: Başka var mı 100'e kadar olanlardan?
Ö5: 50x2 olur.
A: Aynı sayı olacak ama? Başka örnek verebilir miyiz?
Ö5: 10x10 olur
Ö4: 5x1 olur mu?
A: Aynı sayı olması gerekli değil mi?
Ö4: O zaman olmaz.
A: Başka var mıdır?
Ö5: 6x6, 7x7, 8x8 olur başka olmaz.
A: Bu kadar sayıda mı balon vurur başka vuracağı balon var mıdır? Yazarak bulmak ister misin?
Ö5: (Bir ile on arasındaki kalan sayıları çarpıp sonuçlarını buluyor) Bu kadar vardır.
A: Sen ne düşünürsün?
Ö4: Bence 100 tane balonu vurabilir.

Ö4 ve Ö5 öğrencisi soruda verilen aynı sayıların çarpımlarının sonucu yüze kadar olan sözel ifadesini, matematiksel ifadeye dönüştürmekte zorlandıkları Ö4 öğrencisinin *tanıma (recognizing)* aşamasına ulaşamadığı ancak araştırmacının amaca yönelik sorularıyla *tanıma (recognizing)* aşamasına ulaşan Ö5 öğrencisinin tanıdığı yapıyı diğer durumlarda da uygulaması *kullanma (building)* basamağında olduğunu göstermektedir.

İkinci etkinlik sorusunun yöneltildiği başarı düzeyi orta olan Ö6 ve Ö7 öğrencileri ile gerçekleştirilen uygulamada, araştırmacı ile öğrenciler arasındaki diyalog aşağıda verilmiştir.

A: Düşündüğünüzü açıklamak ister misiniz?
Ö7: Soru biraz karışık gibi tam anlayamadım.
Ö8: Ben de.
A: 100 tane balon içerisinden hangilerini vurması gerekiyor?
Ö7: Aynı sayıların çarpımları mı? 2x2, 3x3 gibi mi?
Ö6: Burada 100 balon var deniliyor ve hepsini vurduğuna göre 100'ü 2'ye bölmemiz gerekmiyor mu?
A: Aynı sayılar nasıl olur o zaman? Aynı sayıların çarpımına örnek verebilir misiniz?
Ö7: 10x 10 olur mesela. Hem pozitif oluyor.
Ö6: 5x5 olur 6x6 olabilir.
Ö7: Bence 100 dediği için 10x10 olabilir.
A: Peki başka olabilir mi? 100'e kadar bu şekilde başka sayı var mıdır?
Ö6: 2x2=4'ü vursa 4x4=16'yı vurur.
Ö7: Ama tüm balonları diyor soruda.
Ö6: Hepsini diyorsa o zaman 100'ünüde vurması gerekir.
Ö7: Hımm.. O zaman 100, 36, 49, 81 olabilir.
Ö6: 8x8'den 64 olur. 4 ve 9 olabilir.
Ö7: Bir de olur.

(Her iki öğrenci de 10'a kadar olan sayıların kendileriyle olan çarpımlarını bulurlar.)
A: Kaç tane balonu patlatmış olur?
Ö7: On tane

Ö6: Bende dokuz tane oldu.
A: Senin neden bir tane fazla oldu?
Ö7: Ben 1'i de dahil ettim.
Ö6: Evet 1'de olabilir ama kendisiyle çarpınca yine 1 çıkıyor ya da genellikle 1 ile çok fazla çarpma işlemi yapmıyoruz ondan da almamış olabilirim. Olabilir aslında sonuçta aynı sayılar çarpılıyor.

Ö6 ve Ö7 öğrencileri tekrarlı sayıların çapımı olan 10x10 örneğinden yola çıkarak *tanıma (recognizing)*, 100'e kadar aynı iki sayının çarpımları olan sayıları elde etmeleriyle *kullanma (building)* basamağına ulaştıkları değerlendirilmektedir. Öğrencilerin grup çalışması sayesinde birbirlerinin soyutlama eylemine katkı sağladıkları gözlemlenmiştir.

İkinci etkinlik sorusunun yöneltildiği başarı düzeyi yüksek olan Ö8 ve Ö9 öğrencileri ile gerçekleştirilen uygulamada, araştırmacı ile öğrenciler arasındaki diyalog aşağıda verilmiştir.

A: Düşüncelerinizi paylaşır mısınız?
Ö9: Tam olanları bulmamız gerekiyor.
A: Tam derken neyi kastetmiş olabilirsin?
Ö9: Aynı sayıların çarpımları olan sayılardır, vuracağı balonlar sekiz tanedir. Bunlar; 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81'dir.
A: Soruda 1 ve 100 dahil denilirse fikriniz değişir mi?
Ö8: O zaman 100'ü de dahil ederiz dokuz tane olur. Hımmm…Ama 1'i almamamız gerekir.
Ö9: 1'in karesi de 1 olmuyor mu? O yüzden 1'i de vurabilir.
Ö8: Ama 1 ile 1'i çarptığımızda sonuç yine aynı sayı çıkıyor, 1'i nasıl alabiliriz?
Ö9: Bizim soruda bir şeyin karesi olan sayıları bulmamız gerek, 1'in karesi de 1 olur bu yüzden 1'i de vurabilir.
A: Dört numaralı balonu seçerken nasıl karar verdin?
Ö8: Dört ikinin karesidir o yüzden.
A: Peki aynı mantıkla 1'i düşünürsek?
Ö8: Anladım… Biliyorum ama bana ilk başta iki aynı sayı çarpıldığında, çarpım bu sayılardan farklı olacakmış gibi geldi.
A: Sonuç olarak?
Ö8 ve Ö9: Toplamda on tane balon vurulabilir.

Ö8 ve Ö9 öğrencileri iki aynı pozitif tamsayının çarpımı ifadesinin tam kare sayılara karşılık geldiğini söylemeleri *tanıma (recognizing)*, farklı tam kare sayıları oluşturabilmeleri ise *kullanma (building)* basamağında olduklarını göstermektedir. Esas uygulamada ikinci etkinliğin sonunda öğrencilerin bulunduğu soyutlama basamakları Tablo 4'de verilmektedir.

Tablo 4. Esas uygulamada ikinci etkinliğin RBC modeline göre incelenmesi

Basamaklar	Olası Gerekçeler	Katılımcılar
Tanıma	Tam kare sayıları tanıyabilme	Ö5, Ö6, Ö7, Ö8, Ö9
Kullanma	Aynı iki pozitif tamsayıların çarpımını oluşturabilme	Ö5, Ö6, Ö7, Ö8, Ö9

Yukarıdaki tabloda Ö4 öğrencisi hariç diğer öğrencilerin *tanıma (recognizing)* ve *kullanma (building)* basamaklarına ulaştıkları görülmektedir.

3.3. Üçüncü Etkinlikten Elde Edilen Bulgular

Üçüncü etkinlik sorusu: *Ayşe bir kenar uzunluğu 9 metreden az 8 metreden fazla olan kare şeklindeki salonuna kare şeklinde halı almak ister. Ayşe alan ölçüleri 60 m² 65 m² 76 m² 84 m² olarak verilen halılardan hangilerini tercih etmelidir*? *Salonunun bir kenar uzunluğu 9 metreye yakın ise halılardan hangisini tercih etmelidir? Neden? Salonunun bir kenar uzunluğu 8 metreye yakın ise halılardan hangisini tercih etmelidir? Neden?*

Üçüncü etkinlik sorusunun yöneltildiği başarı düzeyi düşük olan Ö4 ve Ö5 öğrencileri ile gerçekleştirilen uygulamada, araştırmacı ile öğrenciler arasındaki diyalog aşağıda verilmiştir.

A: Ne söylemek istersiniz?
Ö5: 76 olur.

Ö4: Ben 65 ve 76 arasında kaldım.
A: Neden böyle düşündün?
Ö4: İkisinin tam ortası olduğu için.
Ö5: 60 metrekare çok küçük bir şeydir. O yüzden 76 olur bence.
Ö4: Hımmm… Ben de 76 diyorum.
A: Alanı verilen bu halının kenar uzunlukları 8'den fazla 9'dan az olması gerekir. Peki 76 metrekare halının bir kenar uzunluğu kaç olabilir?
Ö5: Dört… yok olmaz
Ö4: 20 olur
A: 20x20=76 mıdır sence?
Ö4: 65 mi olur o zaman?
Ö5: 76 olur çünkü 38 ile 2'nin çarpımına eşittir.
A: 76 olursa bu halının bir kenar uzunluğu hangi tam sayılar arasındadır?
Ö4: 74 arasında olur.
Ö5: 72 veya 69 olabilir.
A: Kenar uzunluğu deniliyor ama?
Ö5: 80 olabilir.
A: Son olarak hangi halıları tercih edebilir?
Ö5: Hepsini de alabilir ama 60 olmayabilir. 76 ve 84 tam olur gibi.
A: Salonunun bir kenar uzunluğu 9'a yakın ise halılardan hangisini tercih etmelidir? Neden?
Ö4: 8 olur.
A: Halılardan hangisini tercih etmelidir?
Ö4: 84'ü tercih eder.
Ö5: 65 ve 76'yı tercih eder.
A: Salonunun bir kenar uzunluğu 8'e yakın ise halılardan hangisini tercih etmelidir? Neden?
Ö4: 76'yı tercih eder.
Ö5: Bence de 76'yı tercih eder.

Ö4 ve Ö5 öğrencileri daha önceki sorularda kenar uzunluğu tamsayı olan karenin alanını hesaplayamadığından, soruda istenilen kenar uzunluğu tamsayı olmayan karede kenar uzunluğunu en yakın iki tamsayı aralığında tahmin edememeleri *tanıma (recognizing)* basamağına, bu durumu başka durumlara uyarlayamadıklarından dolayı da *kullanma (building)* basamağına ulaşamadıkları değerlendirilmektedir.

Üçüncü etkinlik sorusunun yöneltildiği başarı düzeyi orta olan Ö6 ve Ö7 öğrencileri ile gerçekleştirilen uygulamada, öğrencilerin ondalık gösterimi verilen sayılar ile işlem yaparken zorlandıkları, en az, en çok gibi miktar belirten ifadeleri matematikselleştirmede güçlük yaşadıkları görülmüştür. Ö6 ve Ö7 öğrencileri kenarları tamsayı olan karenin alanını tanıyıp oluşturabildikleri *tanıma (recognizing)* ancak alanı iki tamsayının çarpımı olmayan karenin kenar uzunluğunu tahmin etmede güçlük yaşadıkları gözlemlenmiştir. Kenar uzunluğu tamsayı olmayan karelerin alanlarını bulurken ondalık gösterimi verilen sayılar üzerinden sonuca ulaşmaya çalışmaları *kullanma (building)* soyutlama seviyelerini göstermektedir.

Üçüncü etkinlik sorusunun yöneltildiği başarı düzeyi yüksek olan Ö8 ve Ö9 öğrencileri ile gerçekleştirilen uygulamada, araştırmacı ile öğrenciler arasındaki diyalog aşağıda verilmiştir.

Ö9: Sekiz ile dokuz arasında olacakmış, kenar uzunlukları tamsayı değil demek ki. Sekiz buçuk olabilir kenar uzunluğu bence.
Ö8: 65 metrekare olur bence. Çünkü diğer karelerin alanları tamsayılar çarpılarak oluşturulmuş.
Ö9: 65'te 13 ile 5'in çarpımıdır onlarda tamsayı?
Ö8: Bir kenar uzunluğu derken kısa kenarı mı uzun kenarı mı alacağız?
Ö9: Ne fark eder ikisi de aynı sonuçta.
Ö8: Aaaa… Bunlar dikdörtgen değil mi ben dikdörtgen zannettim.
Ö9: Hayır değil, soruda kare deniliyor.
Ö8: O zaman 65 olur. 8,5 ile 8,5 çarpalım bakalım. 72,25 çıkıyor? Dokuzun karesi 81, sekizin karesi 64 olur. O zaman 76'da tercih edilemez.
A: Alanı 76 metrekare olan bir kare için bir kenar uzunluğunun neden tamsayı olması gerektiğini düşünüyorsunuz?

Ö9: Çünkü alan a'nın karesidir. 76 olur çünkü 64 ile 81 arasındadır.
Ö8: Evet. Tamam şimdi anladım. İkisinin arasındakileri (64 ve 81 metrekare arasında) tercih edebilir.
A: Salonunun bir kenar uzunluğu 9'a yakın ise halılardan hangisini tercih etmelidir? Neden?
Ö8: 81'e yakın olduğu için 76 metrekareyi tercih etmelidir.
Ö9: Bence de.
A: Salonunun bir kenar uzunluğu 8'e yakın ise halılardan hangisini tercih etmelidir? Neden?
Ö9: 64'e yakın olan 65 metrekareyi tercih etmelidir.
Ö8: Evet.

Ö8 ve Ö9 öğrencilerinin soruda alanları verilen karelerin kenar uzunluklarının tamsayı olamayacağını söylemekle *tanıma (recognizing),* kenar uzunluğu tamsayı olan karelerin alanlarını oluşturmakla *kullanma (building)* basamağında oldukları gözlemlenmiştir. Esas uygulamada üçüncü etkinliğin sonunda öğrencilerin bulunduğu soyutlama basamakları Tablo 5'de verilmektedir.

Tablo 5. Esas uygulamada üçüncü etkinliğin RBC modeline göre incelenmesi

Basamaklar	Olası Gerekçeler	Katılımcılar
Tanıma	Kenar uzunlukları tamsayı olan karenin alanını tanıma Alanı tam kare sayı olmayan kareyi fark etme	Ö6, Ö7, Ö8, Ö9
Kullanma	Kenar uzunlukları tamsayı olan farklı karelerin alanını bulabilme, Alanı (tam kare olmayan) verilen karenin bir kenar uzunluğunu ardışık iki tamsayı aralığında tahmin edebilme	Ö6, Ö7, Ö8, Ö9

Ö4 ve Ö5 öğrencilerinin kare şekline ait bilgi eksiklikleri, soruda geçen alan ifadesinin ne anlama geldiği konusundaki kavram eksikliklerinden dolayı *tanıma (recognizing)* ve *kullanma (building)* basamağına geçemedikleri gözlemlenmiştir. Ö6, Ö7, Ö8 ve Ö9 öğrencilerinin *tanıma (recognizing)* ve *kullanma (building)* basamağında oldukları değerlendirilmektedir.

3.4. Dördüncü Etkinlikten Elde Edilen Bulgular

Dördüncü etkinlik sorusu: *Matematik öğretmeni öğrencilerine bir oyun oynatmıştır. Oyunda kutunun içinde üzerinde 1'den 100'e kadar sayılar bulunan kartlar yer almaktadır. Birinci öğrenci üzerinde 36 yazılı olan bir kart çekiyor ve 36'nın aynı iki tam sayının çarpımının sonucu olduğunu görüyor. Bu sayının 6 olduğunu söylüyor ve puan kazanıyor. Sıra ikinci öğrenciye geçiyor. İkinci öğrenci ise üzerinde 60 yazılı olan kartı çekiyor ve aynı iki tam sayının çarpımının 60 olamayacağını söylüyor. Öğretmen ise öğrenciden bu sayının bulunduğu tamsayı aralığını tahmin etmesini istiyor ve ikinci öğrenci doğru cevabı veriyor? Sizce ikinci öğrenci nasıl bir cevap vermiştir? Öğrencinin verdiği cevap hangi tamsayıya yakındır?*

Dördüncü etkinlik sorusunun yöneltildiği başarı düzeyi düşük olan Ö4 ve Ö5 öğrencileri ile gerçekleştirilen uygulamada, araştırmacı ile öğrenciler arasındaki diyalog aşağıda verilmiştir.

A: Soru hakkında ne düşünüyorsunuz?
Ö4: Tam anlayamadım.
Ö5: Bende.
A: Birden yüze kadar olan sayıların bulunduğu torbadan 36 çekiyor ve cevap olarak altı söylüyor puan kazanıyor. Torbadan 60 sayısını çeken öğrencinin puan kazanması için hangi sayıyı veya hangi sayı aralığını söylemesi gerekir. 36 hangi aynı iki sayının çarpımıdır?
Ö5: Altı ile altının. 60 sayısını çekerse o zaman o da 2x30 olur.
A: Aynı sayılar olması gerekli değil mi?
Ö5: O zaman olmuyor.
A: 60 hangi aynı iki sayının çarpımına yakındır?
Ö5: 8x8
A: 8x8=?
Ö4,Ö5: 60 eder.
Ö5: 64 mü yapar?
Ö4: 9x9 olur mu?
Ö5: Sekizden küçük bir sayı söylemen gerekli 64'ten küçük olacak sonucu.
Ö4: 7x7=49 olur
A: Peki hangi sayılar arasındadır?
Ö5: 9x9 da olabilir bence.

Ö4: 8x4 veya 7x9 olur mu?
A: Öğrencinin verdiği cevap hangi tamsayıya yakındır?
Ö4: 7x7 ye yakındır.
Ö5: 8x8'e yakındır bence.
A: Peki bunun bir sistem olduğunu düşünürsek 25 olarak içeri giren sayı dışarıya 5 olarak çıkmaktadır. O halde 10, 100, 49 nasıl çıkar?
Ö4: Sadeleşerek çıkmış olabilir.
Ö5: Azalarak çıkmıştır.
A: Burada 25 sayısı nasıl bir değişikliğe uğrayarak dışarı çıkmıştır?
Ö5: Bir şeyle bir şey çarpılmış.
A: Çarpılan o sayılar ne olabilir?
Ö5: 5 ile 5 olabilir.
A: Peki, sisteme giren 10 dışarı nasıl çıkar?
Ö4: Beş olarak çıkar. Yedi çıkabilir, altı çıkabilir.
Ö5: Bence beş olarak çıkabilir.
A: Son düşüncelerinizi söylemek isterseniz?
Ö4: Ben altı olarak çıkar diyorum.
Ö5: Bence 5 olarak çıkar.
A: Ama 25'te 5 olarak çıkıyor?
Ö5: Bilmiyorum bir fikrim yok.

Dördüncü etkinlikte Ö5 öğrencisinin aynı iki sayının çarpımlarının sonucunu söyleyip iki sayı aralığını tahmin edememesi kısmen de olsa *tanıma (recognizing)* basamağında olup *kullanma (building)* basamağına ulaşamadığını, Ö4 öğrencisinin ise tam kare sayıları tanıyamadığından *tanıma (recognizing)* ve farklı tam kare sayılar oluşturamadığından *kullanma (building)* basamaklarına ulaşamadığı şeklinde değerlendirilmektedir.

Dördüncü etkinlik sorusunun yöneltildiği başarı düzeyi orta olan Ö6 ve Ö7 öğrencileri ile gerçekleştirilen uygulamada, Ö6 ve Ö7 öğrencileri kenar uzunluğu tamsayı olan karenin alanından yola çıkarak *tanıma (recognizing)*, alanı tam kare olmayan bir karenin kenar uzunluğunu tahmin etmeye yönelik çalışmalarıyla da *kullanma (building)* basamağına ulaşmışlardır. Ancak alanı tam kare olmayan karenin bir kenar uzunluğunun ondalık gösterimi verilen bir sayı olabileceğini düşünmeleri *oluşturma (constructing)* basamağına ulaşamadıklarının göstergesi olarak değerlendirilmektedir. Ek olarak, etkinliğin ilk başında Ö6 öğrencisi alanı tam kare olan karesel bölgelerin alanlarını kullanmak yerine çarpan ağacı yaparak çözüme ulaşmayı denemiş fakat çarpan ağacında sayıları yanlış çarpanlara ayırdığından doğru sonuca gidemediği, grup arkadaşının açıklamaları sonrasında soyutlama basamaklarına ulaşabildiği değerlendirilmiştir. Her iki öğrencinin de sisteme giren 10 sayısının dışarıya çıkarken ondalık gösterimi verilen bir sayı olarak çıkacağını belirtmelerinden dolayı *oluşturma (constructing)* basamağına geçemedikleri değerlendirilmektedir.

Dördüncü etkinlik sorusunun yöneltildiği başarı düzeyi yüksek olan Ö8 ve Ö9 öğrencileri ile gerçekleştirilen uygulamada, Ö8 ve Ö9 öğrencilerinin tam kare sayılardan yola çıkarak 60 sayısının tam kare sayı olamayacağını söylemeleri *tanıma (recognizing)* basamağında, 60 sayısının aynı çarpanlarını bulmak için farklı tam kare sayıları kullanarak aralık tahmininde bulunmaları da *kullanma (building)* basamağında olduklarının göstergesi olarak değerlendirilmiştir. Ancak her iki öğrenci de 60 sayısının aynı çarpanlarının bir rasyonel sayı veya ondalık gösterimi verilen sayı olacağını söylemeleri henüz *oluşturma (constructing)* basamağına geçemediklerini göstermiştir. Ancak Ö8 öğrencisinin farklı ondalık gösterimi verilen aynı sayıları deneyerek (çarparak) sonuca ulaşamamasına karşılık *"bu sayıyı bulamayız"* ifadesi Ö8 öğrencisinin kısmi olarak *oluşturma (constructing)* basamağının başlangıcında olduğu şeklinde değerlendirilebilir. Esas uygulamada dördüncü etkinliğin sonunda öğrencilerin bulunduğu soyutlama basamakları Tablo 6'da verilmektedir.

Tablo 6. Esas uygulamada dördüncü etkinliğin RBC modeline göre incelenmesi

Basamaklar	Olası Gerekçeler	Katılımcılar
Tanıma	36 sayısının aynı iki sayının çarpımı olduğunu belirtme, 60 sayısının tam kare sayı olamayacağını söyleme	Ö5, Ö6, Ö7, Ö8, Ö9
Kullanma	Aynı sayıları çarparak tam kare sayı oluşturabilme	Ö6, Ö7, Ö8, Ö9
Oluşturma	Tam kare olmayan bir sayının mevcut sayı kümeleriyle aynı iki sayının çarpımı şeklinde yazılamayacağını belirtme	Ö8

Yukarıdaki tabloda Ö5, Ö6, Ö7, Ö8, Ö9 öğrencilerinin *tanıma (recognizing)* , Ö6, Ö7, Ö8, Ö9 öğrencilerinin *kullanma (building)* basamağına, Ö8 öğrencisinin ise kısmen *oluşturma (constructing)* basamağına geçebildiği değerlendirilmektedir.

4. Sonuç ve Tartışma

Matematik biliminin sıralı ve ardışık bir bilim olması soyutlanacak kavram için ön koşul öğrenmeleri içermektedir (Altun, 2006). Bu yüzden soyutlanacak kavramla ilgili ön koşul öğrenmelerin öğrenciler tarafından biliniyor olması, öğrencinin *tanıma (recognizing)* ve *kullanma (building)* basamağına ulaşmasında önemli bir etkendir. Bu görüşü destekler nitelikte, matematik başarı düzeyi orta olan Ö2 öğrencisinin alanı 20 m^2 olan karenin bir kenar uzunluğunu 5m olarak bulması, matematik başarı düzeyi düşük olan Ö4 ve Ö5 öğrencilerinin karenin alanını bulmaya yönelik soruya *"Bir fikrimiz yok"* şeklinde cevap vermeleri, matematik başarı düzeyi orta olan Ö7 öğrencisinin alanı 20 m^2 olan karenin kenar uzunluklarını 4m ve 5m olarak bulması, Ö6 öğrencisinin karenin alanını hesaplarken verilen alan ölçüsünü dörde bölmesi örnek gösterilebilir. Bu öğrencilerden araştırmacının yönlendirici sorularıyla Ö2, Ö6 ve Ö7 öğrencileri *tanıma (recognizing)* ve *kullanma (building)* basamağına ulaşabilirken, Ö4 ve Ö5 öğrencileri için aynı durum gerçekleşmemiştir.

RBC soyutlama teorisinde *oluşturma (constructing)* basamağına ulaşmak için *tanıma (recognizing)* ve *kullanma (building)* bilişsel eylem basamaklarının tamamlanmış olması gerekmektedir. Buradan hareketle, soyutlama basamaklarının ardışık olduğu sonucunu çıkarmak yanlış anlaşılmalara sebep olabilir. Bu eylemler bazen ardışık yapıda olabilecekleri gibi bezen de biri diğerinin tamamlayıcısı, uzanımı veya aynı anda gerçekleşen paralel eylemler olabilmektedir (Dreyfus 2007, akt. Akkaya, 2010). Örneğin, *tanıma (recognizing)* ve *kullanma (building)* basamağını oluşturan bir öğrenci *oluşturma (constructing)* basamağına geçerken tekrardan *tanıma (recognizing)* basamağına yönelebilmektedir. Bu duruma örnek olarak, matematik başarı düzeyi yüksek olan Ö3 öğrencisi, son uygulama sorusunda *oluşturma (constructing)* basamağını gerçekleştirirken önceki sorularda gerçekleştirdiği *tanıma (recognizing)* ve *kullanma (building)* basamaklarına yönelmiştir.

Esas uygulamanın ikişer kişilik öğrenci gruplarıyla yapılması, ikinci uygulama sorusunda matematik başarı düzeyleri orta olan Ö6 ve Ö7 öğrencilerinin birbirilerinin soyutlama seviyelerine katkıda bulunduklarını göstermektedir. Soruda Ö7 öğrencisinin Ö6 öğrencisine *tanıma (recognizing)* ve *kullanma (building)* basamağına ulaşmada katkı sağladığı görülmektedir. Bu durum RBC soyutlama teorisinin, diğer soyutlama teorilerinden farklı olarak soyutlama eyleminde sosyo-kültürel şartları göz önünde bulundurmasına yönelik önemli bir sonucudur. Bu bakış açısına göre, öğrencilerin soyutlama eylemini gerçekleştirirken içinde bulundukları ortamın şartları soyutlama eylemine etki etmektedir. Esas uygulamada ikişer kişilik öğrenci gruplarında yaşanılan durum yukarıdaki görüşü destekler niteliktedir. Ancak aynı durum tek kişilik öğrencilerle gerçekleştirilen pilot uygulamada söz konusu değildir. Ek olarak, esas uygulamada ikişerli gruplardaki öğrencilerin, benzer düzeyde matematik başarısına sahip olmaları da birbirlerinin karşılıklı soyutlama eylemlerine katkıda bulunmalarını sağlayan diğer önemli bir faktör olarak değerlendirilmektedir.

Matematik başarı düzeyleri (düşük, orta, yüksek) farklı öğrencilerden matematik başarısı yüksek olan öğrencilerin soyutlama sürecinde diğer öğrencilere göre, *tanıma (recognizing)* ve *kullanma (building)* basamağına ulaşmada daha başarılı oldukları gözlenmiştir. Bu kapsamda, yeni edinilen kavram için soyutlama eyleminin gerçekleştiği *oluşturma (constructing)* basamağına katılımcı öğrencilerden matematik başarı düzeyleri yüksek olan Ö3 ve Ö8 öğrencileri ulaşabilmişlerdir. Bu sonucun gerçekleşmesinde matematik başarısının soyutlama sürecine olumlu katkısı olduğu değerlendirilebilir. Bu sonuç, Hassan ve Mitchelmore'un (2006) soyutlanacak yeni matematiksel yapı için bireyde öncesinde var olması gereken yapıların soyutlanmış olması gerektiği sonucuyla örtüşmektedir.

Araştırmanın sonuçlarından bir diğeri de, matematik başarı düzeyleri düşük (Ö1, Ö4, Ö5) ve orta (Ö2) olan öğrencilerin soru bağlamını anlamada zorluk yaşamalarıdır. Özellikle ikinci uygulama sorusunda geçen *"Ahmet aynı pozitif tamsayıların çarpımı olan tüm balonları vurduğuna göre…."* ifadesinde vurulması şarta bağlanan balonları bulmak yerine, öğrenciler *"1'den 100'e kadar tüm balonları vurmuştur"* biçiminde veya *"soru görselindeki balonları sayarak"* cevap vermişlerdir. Benzer durum üçüncü uygulama sorusunda, *"bir kenar uzunluğu 9 metreden az 8 metreden fazla"* ifadesinde matematik başarı düzeyi orta olan Ö6 öğrencisinin *"9 metreden az dediği için 8, 7, 6 ve 5 metre olabilir"* söylemine karşılık; grup arkadaşı olan Ö7 öğrencisi, arkadaşını *"8 metreden de fazla denilmiş soruda"* şeklinde uyararak arkadaşının soruyu doğru anlamasında destek sağlamıştır. Öğrencilerin, uygulama sorularında geçen ifadeleri anlamlandıramadığı, soruda istenilen durumu tam anlayamadığı durumlarda soyutlama basamağının ilk seviyesi olan *tanıma (recognizing)* basamağını gerçekleştirmede zorlandıkları görülmüştür.

Ulaşılan bir diğer sonuç ise, matematik başarı düzeyleri düşük (Ö1, Ö4, Ö5), orta (Ö2 ve Ö6) öğrencilerinin rasyonel sayıların ondalık gösterimiyle ifade edilen sayılarda toplama, çarpma işlemlerinde virgülün yerini doğru kullanmakta zorlandıkları görülmüştür. Örneğin, Ö6 öğrencisi sözel olan sekiz buçuk ifadesinin sayısal karşılığını 8,30 yazarak belirtmiştir. Ek olarak, çalışmaya katılan öğrencilerin genelinde rasyonel sayıların ondalık gösterimini *"ondalık sayı"* olarak ifade ettikleri, ondalık gösterimi ayrı bir sayı kümesi olarak gördükleri tespit edilmiştir. Ayrıca öğrencilerin, virgülle ifade edilen her sayıya ondalık sayı olarak gördükleri gözlenmiştir. Bu sonuç, Ercire (2014) ve Baştürk'ün (2015) araştırma bulgularıyla örtüşmektedir. Buradan, kareköklü sayıların soyutlanabilmesi için önceki sayı kümelerinin (tamsayılar, rasyonel sayılar) soyutlanmış olması gerektiği sonucuna ulaşılabilir.

Matematik başarısı düşük olan (Ö1, Ö4 ve Ö5) öğrencilerin diğer öğrencilere göre uygulama sürecinde araştırmacı ile ve kendi aralarında daha az iletişimde bulundukları gözlenmiştir. Söz konusu öğrenciler araştırmacının *"Problemi nasıl çözdün? Neden böyle yaptın? Başka bir yol deneyebilir misin?"* sorularına *"Öyle düşündüm, Bilmiyorum, Böyle olması gerekir"* şeklinde kestirme cevaplar vermişlerdir.

Araştırmadan elde edilen sonuçlar özetlendiğinde, öğrencilerin öğrendikleri kavramı ne için öğrendiklerini anlamlandırdıkları zaman soyutlama sürecinde o kavramı kullanıp bir sonraki kavramı soyutlayabildikleri görülmektedir. Diğer bir ifadeyle öğrencilerin Matematik Öğretim Programı'ndaki sayı kümelerini ne için öğrendiğinin farkında olması gerekmektedir. Bu durum gerçekleşmezse Adıgüzel'in (2013) de belirttiği gibi sekizinci sınıf programında yer alan irrasyonel sayı kavramı öğreniminin sonraki sınıfların programında tekrar yer almasına rağmen yeterli düzeyde gerçekleşemeyeceği açıktır. Örneğin, tamsayıları öğrenen bir öğrencinin rasyonel sayıların öğrenim sürecinde yeni bir sayı kümesine kendisinin ihtiyaç duyması, var olan sayı kümeleriyle karşılaştığı durumu çözememesinin farkına varması gerekmektedir. Aynı şekilde sayı kavramının öğrenimi sürecinde bu ihtiyaç durumu öğrencilere yaşattırılırsa, öğrenci hangi sayı kümesini ne için öğrendiğini anlamlandırıp bir sonraki sayı kümesini soyutlamada *tanıma (recognizing)* basamağını kolaylıkla gerçekleştirebilir, bir sonraki soyutlama basamağıma geçebilir. Aksi takdirde *tanıma (recognizing)* seviyesine ulaşamayan öğrenciler bilgileri ilişkilendiremediklerinden dolayı *kullanma (building)* basamağına da ulaşamayıp soyutlama eylemini gerçekleştiremeyeceklerdir. Bu çıkarım, Ayanoğlu (2012), Kaplan ve Açıl'ın (2015), Ulaş ve Yenilmez'in (2017) araştırma sonuçlarıyla da örtüşmektedir.

Öğrencinin soyutlama sürecinde neden ve sonuç ilişkilerini kurduğunda ve soyutlayacağı kavram üzerinde yoğun düşünme eylemi gerçekleştirdiğinde öğrenilecek kavramı soyutlamada başarılı olduğu çalışmalarda mevcuttur. Bu yüzden matematik öğretiminin uygulayıcıları öğrencilere bir kavramı salt bir bilgi olarak öğretmeden önce öğrencilerin kendilerinde var olan yapılarla içinden çıkamayacakları etkinlikler tasarlayabilirler. Bu durum üzerine öğrencilerin yoğun düşünme süreci yaşamalarını sağlanabilir. Bu şekilde gerçekleştirilen öğretimde yeni kavramların soyutlanarak öğrenilmesi, bilgilerin kalıcılığını artırabilir ve soyutlanan kavramın soyutlanacak bir sonraki kavram için *tanıma (recognizing)* ve *kullanma (building)* basamağı olarak kullanılma durumu gerçekleşebilir. Ek olarak bir kavarama geçmeden önce o kavramla ilişkili ön koşul öğrenme durumları Matematik Öğretim Programı'nda yer alamasa dahi uygulayıcı tarafından bu durum tespit edilebilir ve varsa bilgi eksiklikleri giderilerek yeni konuya geçiş sağlanabilir. Ders kitaplarında her konu öncesinde öğrenilecek konunun kazanımlarına yönelik ön koşul öğrenmeleri içeren, uygulamalı sorulardan oluşan etkinlik hazırlanabilir. Bu şekilde öğrenilecek konuya geçiş yapılmadan eksik veya yanlış öğrenmeler giderilebilir. Ek olarak konuya ait bir sonraki kazanıma geçmeden önce her bir kazanıma yönelik öğrenilenlerin kalıcılığını artıracak kolay etkinlikler hazırlanabilir. Ders kitaplarında yer alan etkinlikler soyutlama basamaklarına yönelik olarak düzenlenip hazırlanabilir. Eğitim fakültelerinde matematik öğretimi ile ilgili öğrenim gören öğrencilere soyutlama kavramının önemine yönelik dersler okutulabilir. Bu kapsamda herhangi bir konunun kazanımlarına yönelik soyutlama basamaklarını içeren etkinlikler tasarlamaları istenebilir. Matematik eğitimi araştırmacıları, RBC+C soyutlama teorisiyle ilgili daha büyük gruplarla, nitel ve nicel yöntemin birlikte kullanıldığı karma desenli çalışmalar gerçekleştirebilirler. Ek olarak, bu araştırmanın konusuyla ilgili yapılacak çalışmalarda RBC+C soyutlama teorisinin *pekiştirme (consolidation)* basamağını da kapsayan araştırmalar yapılabilir. RBC+C teorisiyle yapılacak çalışmalarda belirlenecek öğrenciler akademik başarılarına göre değil, RBC+C soyutlama seviyelerine göre seçilebilir.

Kaynakça

Adıgüzel, N. (2013). *İlköğretim matematik öğretmen adayları ve 8. sınıf öğrencilerinin irrasyonel sayılar ile ilgili bilgileri ve bu konudaki kavram yanılgıları* (Yayınlanmamış yüksek lisans tezi). Necmettin Erbakan Üniversitesi, Konya.

Akkaya, R. (2010). *Olasılık ve istatistik öğrenme alanındaki kavramların gerçekçi matematik eğitimi ve yapılandırmacılık kuramına göre bilgi oluşturma sürecinin incelemesi* (Yayınlanmamış doktora tezi). Uludağ Üniversitesi, Bursa.

Altun, M. (2006). Matematik öğretiminde gelişmeler. *Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *19*(2), 223-238.

Altun, M. ve Yılmaz, A. (2008). Lise öğrencilerinin tam değer fonksiyonu bilgisini oluşturma süreci. *Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Dergisi*, *41*(2), 237-271.

Ayanoğlu, P. (2012). *7. sınıf öğrencilerinin birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem ve eşitsizlik grafiği bilgisi oluşturma süreçleri* (Yayınlanmamış yüksek lisans tezi). Kastamonu Üniversitesi, Kastamonu.

Baki, A. ve Kartal, T. (2004). Kavramsal ve işlemsel bilgi bağlamında lise öğrencilerinin cebir bilgilerinin karakterizasyonu. *Türk Eğitim Bilimleri Dergisi,2*(1), 27-46.

Baştürk, S. (2015). Sekizinci sınıf öğrencilerinin sayı ve sayı kümeleriyle ilgili kavrayışlarının incelenmesi. *Electronic Journal of Education Sciences*, *4*(8), 127-147.

Baykul, Y. (2009). *Ortaokulda matematik öğretimi (5-8. Siniflar)*. Ankara: Pegem Akademi.

Büyüköztürk, Ş., Çakmak, E. K., Akgün, Ö. E., Karadeniz, Ş. ve Demirel, F. (2016). *Bilimsel araştırma yöntemleri.* Ankara: Pegem Akademi.

Çiftçi, Z., Akgün, L. ve Soylu, Y. (2015). Matematik öğretmeni adaylarının irrasyonel sayılarla ilgili anlayışları. *Ahi Evran Üniversitesi Kırşehir Eğitim Fakültesi Dergisi, 16* (1), 341-356.

Davydov, V.V., (1990), Soviet studies in mathematics education: Vol. 2. Types of generalization in ınstruction: Logical and psychological problems in the structuring of school curricula, J. Kilpatrick (ed.) and J. Teller (Trans.), *National Council of Teachers of Mathematics*. Reston, VA.

De Lange, J. (1996). *Using and applying mathematics in education*. In: A.-J. Bishop, K. Clements, Ch. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.). International handbook of mathematics education (Part 1, pp. 49-97). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Dooley, T. (2006). 'It's infinity': Mathematical insights in a primary classroom, In Novotna, J., Moraova, M. Ve Stehlikova, N. (Eds). *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Prague.

Dreyfus, T. (2007). *Processes of abstraction in context the nested epistemic actions model*. https://pdfs.semanticscholar.org/d190/0be9d6a043ac815c81344caa8c2713dcc329.pdf, adresinden erişilmiştir.

Dreyfus, T., Hadas, N., Hershkowitz, R. & Schwarz, B. (2006). *Mechanisms for Consolidating Knowledge Constructs*. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehliková (Eds)., Proceedings of the 30th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education, (Vol. 2, pp. 465-472). Prague, Czech Republic: PME.

Dreyfus, T. & Tsamir, P. (2004). Ben's Consolidation of Knowledge Structures about Infinite Sets. *Journal of Mathematical Behavior, 23*(3), 271-300.

Ercire, Y. E. (2014). *İrrasyonel sayı kavramına ilişkin yaşanılan güçlüklerin incelenmesi* (Yayınlanmamış yüksek lisans tezi). Dokuz Eylül Üniversitesi, İzmir.

Ferrari, P. L. (2003). Abstraction in mathematics. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London B, 358,* 1225-1230.

Fischbein, E., Jehiam, R., & Cohen, C. (1995). The concept of irrational number in high school students and prospective teachers. *Educational Studies in Mathematics, 29,* 29–44. doi: 10.1007/BF01273899

Geray, H. (2006). *Toplumsal araştırmalarda nicel ve nitel yöntemlere giriş.* Ankara: Siyasal.

Güler, G. (2017).Matematik öğretmenlerinin irrasyonel sayılara yönelik kavram bilgilerinin incelenmesi. *Turkish Online Journal of QualitativeInquiry*, *8*(2), 186-215.

Güven, B., Çekmez, E. ve Karataş, I. (2011). Examining preservice elementary mathematics teachers' understandings about irrational numbers. *PRIMUS*, *21*(5), 401-416.

Hassan, I., & Mitchelmore, M. (2006). The role of abstraction in learning about rates of change. In P. Grootenboer, R. Zevenbergen and M. Chinnappan (Eds.) *Identities, Cultures and Learning Spaces* (Proceedings of the 29th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Vol. 1, pp. 278-285). Adelaide, the United States of America: MERGA.

Hershkowitz, R., Schwarz, B., & Dreyfus, T. (2001). Abstraction in contexts: Epistemic actions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *32*(2), 195-222.

Kaplan, A. ve Açıl, E. (2015). Ortaokul 4. sınıf öğrencilerinin eşitsizlik konusundaki bilgi oluşturma süreçlerinin incelenmesi. *Bayburt Eğitim Fakültesi Dergisi*, *10*(1), 130-153.

Kara, F. ve Delice, A. (2012, Haziran). Kavram tanımı mı? Yoksa kavram imgeleri mi? İrrasyonel sayıların temsilleri. *X. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi*. Niğde

Leont'ev, A.N. (1981). The problem of activity in psychology, in J.V. Wertsch (ed. And Trans.), *The Concept of Activity in Soviet Psychology* (pp. 37-71). Armonk, NY: M.E. Sharpe.

LiuP., H. (1996). Do teachers need to incorporate the history of mathematics in their teaching? *The Mathematics Teacher, 96*(6), 416.

MEB (2018). *Matematik dersi öğretim programı*. Ankara: MEB.

Merriam, S. B. (2013). *Nitel araştırma. Desen ve uygulama için bir rehber* (S. Turan, Çev.). Ankara: Nobel.

Monaghan, J., & Özmantar, M. F. (2004). *Abstraction and Consolidation*. In M. J. Hoines and A.B. Fuglesad (Eds.), Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Bergen, Norway.

Monaghan, J., & Özmantar, M. F. (2006). Abstraction and consolidation. *Educational Studies in Mathematics*, *62*, 233-258.

Moralı, S., Köroğlu H. ve Çelik A. (2004). Buca eğitim fakültesi matematik öğretmen adaylarının soyut matematik dersine yönelik tutumları ve rastlanan kavram yanılgıları. *Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi, 24*(1), 161-175.

Noss, R., & Hoyles, C. (1996). *Windows on mathematical meanings: learning cultures and computers,* (Mathematical Education Library Series, Vol. 17). Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic.

Ohlsson, S. and Lehtinen, E. (1997). Abstraction and the acquisition of complex ideas, *International Journal of Educational Research*, 27, 37–48.

Ohlsson, S. & Regan, S. (2001). A function for abstract ideas in conceptual discovery and learning. *Cognitive Science Quarterly, 1*(3), 243-277.

Olkun, S. ve Toluk, Z. (2004). *İlköğretimde etkinlik temelli matematik öğretimi.* Ankara: Anı.

Özaltun Çelik, A. ve Bukova Güzel, E. (2017). Matematik öğretmenlerinin ders imecesi kapsamında köklü ifadelerin öğretimine ilişkin oluşturdukları ders planı. *Mersin University Journal of the Faculty of Education*, *13*(2), 1.

Özmantar, M. F. (2004). *Scaffolding, Abstraction, and Emergent Goals*. In O. McNamara (Eds)., Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 24(2). Retrieved on November 16, 2007 from http://www.bsrlm.org.uk/IPs/ip24-2/BSRLM-IP-24-2-14.pdf.

Özmantar, M. F., & Monaghan, J. (2007). A dialectical approach to the formation of mathematical abstractions. *Mathematics Education Research Journal*, *19*(2), 89–112.

Peled, I., & Hershkovitz, S. (1999). Difficulties in knowledge integration: Revisiting Zeno's paradox with irrational numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 30*(1), 39–46.

Piaget, J. (1985). *The equilibration of cognitive structures: The central problem of intellectual development*. Chicago: University of Chicago Press. (New translation of the development of thought) child's conception of geometry.

Schwarz, B., & Dreyfus, T. (1995). New Actions upon Old Objects: A New Ontological Perspective on Functions. *Educational Studies in Mathematics*, *29*, 259-291.

Seyhan, G. ve Gür, H. (2004). *İlköğretim 7. ve 8. sınıf öğrencilerinin ondalık sayılar konusundaki hataları ve kavram yanılgıları.* Matematikçiler Derneği Kongresi. Ankara.

Sezgin Memnun, D. (2011). *İlköğretim altıncı sınıf öğrencilerinin analitik geometrinin koordinat sistemi ve doğru denklemi kavramlarını yapılandırmacı öğrenme ve gerçekçi matematik eğitimine göre oluşturması süreçlerinin araştırılması* (Yayınlanmamış doktora tezi). Uludağ Üniversitesi, Bursa.

Sezgin Memnun, D. ve Altun, M. (2012). RBC+ C modeline göre doğrunun denklemi kavramının soyutlanması üzerine bir çalışma: özel bir durum çalışması. *Cumhuriyet Uluslararası Eğitim Dergisi*, *1*(1), 17-37.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 1-36.

Shinno, Y. (2007). *On the teaching situation of conceptual change: epistemological considerations of irrational numbers.* In Woo, J. H., Lew, H. C., Park, K. S., & Seo, D. Y. (Eds.). Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Seoul.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in mathematics*, London: Falmer.

Sirotic, N., & Zazkis, R. (2007). Irrational numbers on the number line-Where are they?. International *Journal of Mathematics Education, Science and Technology*, *38*(4), 477-488.

Skemp, R. (1978). Relational understanding and instrumental understanding. *ArithmeticTeacher*, *26*(3), 9-15.

Stafylidou, S., & Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions, *Learning and Instruction*, *14*, 503–518.

Şandır, H., Ubuz, B. ve Argün, Z. (2007). 9. sınıf öğrencilerinin aritmetik işlemler, sıralama, denklem ve eşitsizlik çözümlerindeki hataları, *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *32*, 274-281.

Tabach, M. & Hershkowitz, R. (2002) *Construction of Knowledge and Its Consolidation: A Case Study from the Early Algebra Classroom*. In A. D. Cockburn and E. Nardi (Eds.) Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4: 265-272. Norwich, UK

Tall, D. (1991). *The psychology of advanced mathematical thinking*, in Advanced mathematical thinking, D. Tall, Editor, Kluwer, Dordrecht, The Netherlands, p. 3-21.

Taşdemir, C. (2009). İlköğretim ikinci kademe öğrencilerinin matematik dersine karşı tutumları: Bitlis ili örneği. *Dicle Üniversitesi Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi Dergisi, 12*, 89-96.

Türk Dil Kurumu. (2018, Aralık 9) http://www.tdk.gov.tr/index.php?option=com_ gts&kelime=soyutlama adresinden erişilmiştir.

Ulaş, T. ve Yenilmez, K. (2017). Sekizinci sınıf öğrencilerinin özdeşlik kavramını oluşturma süreçlerinin incelenmesi. *International e-Journal of Educational Studies, 1*(2), 103-117.

Van de Walle, J. A.,Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2013). *İlkokul ve ortaokul matematiği gelişimsel yaklaşımla öğretim* (S. Durmuş, Çev.). Ankara: Nobel.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (1996). *Assessment and realistic mathematics education* (Vol. 19). Utrecht University.

Van Oers, B. (2001). Contextualization for abstraction. *Cognitive Science Quarterly, 1*, 279-305.

Voskoglou, M., & Kosyvas, G. D. (2012). Analyzing students' difficulties in understanding real numbers. *Journal of Research in Mathematics Education*, *1*(3), 301-336.

Yeşildere, S. (2006). *Farklı matematiksel güce sahip ilköğretim 6, 7 ve 8 sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme ve bilgiyi oluşturma süreçlerinin incelenmesi* (Yayınlanmamış doktora tezi). Dokuz Eylül Üniversitesi, İzmir.

Yeşildere, S. ve Türnüklü, E. B. (2008). İlköğretim sekizinci sınıf öğrencilerin bilgi oluşturma süreçlerinin matematiksel güçlerine göre incelenmesi. *Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 21*(2), 485-510.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2016). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri*. Ankara: Seçkin.

Yıldırım, C. (2004). *Matematiksel düşünme*. İstanbul: Remzi.

Yin, R. K. (2003). *Case study research design and methods*. London: Sage.

Zazkis, R., & Sirotic, N. (2010). Representing and defining irrational numbers: exposing the missing link. *CBMS Issues in Mathematics Education,16*, 1-27.

Zehir, H., Işık, A. ve Zehir, K. (2008). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının kümeler konusundaki kavramsal bilgi düzeyleri. *Bayburt Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 3*(1), 61-74.

Zembat, İ. Ö. (2007). Yansıma dönüşümü, doğrudan öğretim ve yapılandırmacılığın temel bileşenleri. *Gazi Üniversitesi Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *27*(1), 195-213.