Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi **25** (1-2) 331 - 345 (2009)
http://fbe.erciyes.edu.tr/
ISSN 1012-2354

PARABOLİK KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN İKİ ZAMAN ADIMLI YAKLAŞIMLAR ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Gamze YÜKSEL[1] , Mustafa GÜLSU[1,*]
[1]Muğla Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, MUĞLA

ÖZET

Bu çalışmada standart olmayan başlangıç koşuluna sahip bir boyutlu parabolik kısmi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri için sonlu fark yaklaşımları incelenmiştir. Bu amaçla Taylor polinom yaklaşımları temelinde birçok sonlu fark yaklaşımları geliştirilmiştir. Bu sonlu fark yaklaşım teknikleri kullanılarak elde edilen nümerik sonuçlar daha önceki araştırmacıların sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Problemin çözüm algoritmasında son yıllarda sıkça kullanılan Maple9 programı kullanılmıştır.
Anahtar Kelimeler: Sonlu farklar, Taylor yaklaşımları, Standart olmayan başlangıç koşulları.

A STUDY ON A TWO TIME STEP METHOD FOR PARABOLIC PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION

ABSTRACT

In this study, finite difference approximations to the solution of one dimensional parabolic partial differential equations with non-standard initial condition are studied. Several finite difference schemes based on Taylor polynomial aproximations are presented for solving a parabolic partial differential equation. The numerical results obtained by present method and compared with the earlier authors. Illustrative examples are included, performed on the computer using a program written in maple9.
Keywords: Finite difference, Taylor approximations, Non standard initial conditions.

***E-posta**: mgulsu@mu.edu.tr

1.GİRİŞ

Son yıllarda, parabolik kısmi diferansiyel denklemler konusundaki araştırmalar özellikle standart olmayan başlangıç koşullu problemler üzerinde yoğunlaşmıştır. Bu tip problemler mühendislik ve temel bilimlerin birçok dalında karşımıza çıkmaktadır. Örneğin bu tür problemler atomik reaktör çalışmalarında ve bazı ters problemlerde ısı iletiminde bilinmeyen parametrelerin bulunması gibi fizik problemlerinin modellenmesinde kullanılmaktadır [1-4]. Bu çalışmada literatürden yola çıkılarak non-standart başlangıç koşulu ile verilen zaman adımlı parabolik kısmi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri için parametreye bağlı sonlu fark yöntemleri geliştirilecek ve uygulamaları görülecektir.

Bu amaçla;

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \phi(x,t), \quad 0 < x < 1,\ 0 < t \le T \tag{1}$$

denkleminin sınır koşulları;

$$u(0,t) = g_0(t), \qquad 0 < t \le T \tag{2}$$

$$u(1,t) = g_1(t), \qquad 0 < t \le T \tag{3}$$

ve standart olmayan başlangıç koşulları;

$$u(x,0) = \sum_{j=1}^{n} \beta_j(x) u(x,T_j) + \psi(x) \quad , \ 0 < x < 1, \qquad 0 < T_1 < T_2 < ... < T_N = T \tag{4}$$

şeklinde verilmiştir. Burada $f, g_0, g_1, \phi, \psi, T_j$ ve β_j bilinen fonksiyonlar, u ise bilinmeyen fonksiyondur. $i = 1,2,...N$ olmak üzere β_j ler $0 < x < 1$ iken

$$\sum_{j=1}^{N} \left\|\beta_j(x)\right\| e^{-\pi^2 T_j} < 1 \tag{5}$$

koşulunu gerçeklerler. Burada $\|.\|$, $L^2(0,1)$ üzerindeki maksimum normu göstermektedir [1].

Özel halde (5) eşitsizliğinde $N=3$, $\beta_1 = 1, \beta_2 = -1, \beta_3 = 1$ ve $T_1 = 0.3,\ T_2 = 0.6,\ T_3 = 1$ için;

$$\begin{aligned} 1.e^{-\pi^2 0.3} + 1.e^{-\pi^2 0.6} + 1.e^{-\pi^2 1} &= 0.051773268 + 0.002680471 + 0.000051723 \\ &= 0.04914452 < 1 \end{aligned}$$

olduğu görülür.

Benzer şekilde (5) eşitsizliği $N=4,\ \beta_1 = 1,\ \beta_2 = -1,\ \beta_3 = 1,\ \beta_4 = -1$ ve $T_1 = 0.25,\ T_2 = 0.5,\ T_3 = 0.75,\ T_4 = 1$ için;

$$\begin{aligned} &1.e^{-\pi^2 0.25} + 1.e^{-\pi^2 0.5} + 1.e^{-\pi^2 0.75} + 1.e^{-\pi^2 1} = \\ &\quad 0.084804972 + 0.007191883 + 0.000609907 + 0.000051723 = 0.078171273 < 1 \end{aligned}$$

dır. Bu değerler kullanılarak standart olmayan başlangıç koşulları ile verilen yaklaşımlar için çözümler geliştirilen sonlu fark yöntemleri ile hesaplanmıştır(Tablo1-2).

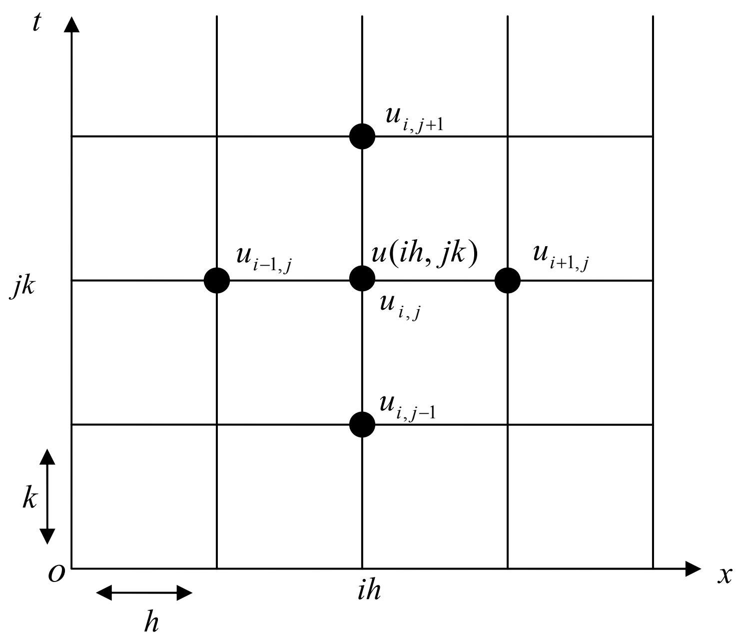
2. SONLU FARK FORMÜLLERİ

$[0,1]\times[0,T]$ ile gösterilen bölge $M \times N$ tane grid noktasından oluşan bir bölge olmak üzere sırasıyla x doğrultusundaki adımlar $h = 1/M$ ve t doğrultusunda adımlar $k = T/N$ olarak alınmıştır. M,N tamsayı ve grid noktaları $u = u(x,t)$ olmak üzere $u\left(x_i, t_j\right)$ şeklinde gösterilmiştir.Ayrıca

$$x_i = ih, \qquad i = 0,1,2,\ldots,M$$

$$t_j = jk, \qquad j = 0,1,2,\ldots,N$$

olmak üzere $u(ih, jk) = u_{i,j}$ grid noktaları için moleküler gösterim aşağıdaki şekilde verilmiştir.



Şekil 1. Grid noktaların gösterilmesi.

Bir $U = U(x,t)$ fonksiyonu ve bu fonksiyonun türevleri sonlu ve sürekli iken Taylor teoremi uyarınca

$$U(x+h,t) = U(x,t) + h\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2}h^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{1}{6}h^3\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \ldots \tag{6}$$

Ve

$$U(x-h,t) = U(x,t) - h\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2}h^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{1}{6}h^3\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \ldots \tag{7}$$

ifadeleri elde edilir. Burada (6) ve (7) taraf tarafa toplanılırsa;

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{h^2}\big(U(x+h,t) - 2U(x,t) + U(x-h,t)\big) + O(h^2)$$

hata derecesi O(h^2) olan 2.dereceden bir yaklaşım elde edilir. Burada yaklaşımın hatası ihmal edilirse;

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{h^2}\left(U(x+h,t) - 2U(x,t) + U(x-h,t)\right)$$

Veya

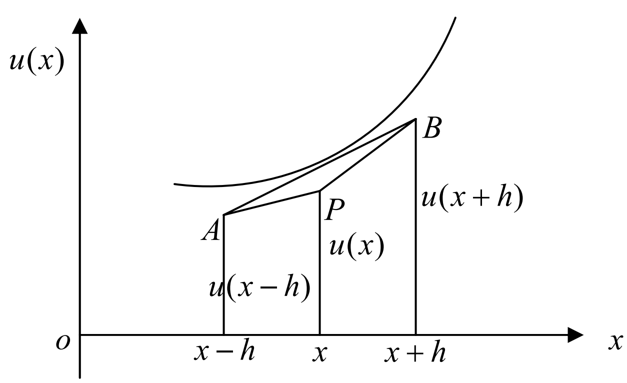
$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_{i,j} = \frac{1}{h^2}\left(U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}\right) \tag{8}$$

elde edilir.(8) eşitliği ile verilen yaklaşıma 2.dereceden merkezi fark yaklaşımı denir.

Benzer şekilde (6) ve (7) taraf tarafa çıkarılırsa;

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{1}{2h}\left(U_{i+1,j} - U_{i-1,j}\right) \tag{9}$$

hata derecesi O(h^2) olan merkezi fark yaklaşımı elde edilir. Bu yaklaşıma da merkezi fark yaklaşımı denir.



Şekil 2. Sonlu farkların geometrik gösterimi.

Taylor serisi yardımı ile benzer şekilde kısmi türevler için sırası ile,

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{1}{h}\left(U_{i+1,j} - U_{i,j}\right) \tag{10}$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{1}{h}\left(U_{i,j} - U_{i-1,j}\right) \tag{11}$$

yaklaşımları elde edilir[5].

3. KISITLANMIŞ TAYLOR YAKLAŞIMLARI

$u = u(x)$**,** fonksiyonunun bir a noktası civarında (n+1). mertebeye kadar kısmi türevlerinin mevcut olduğu varsayılmıştır. Bu türevler yardımıyla oluşturulan

$$RT_{n,u(x)}(x,a) = u(a) + \frac{u^{'}(a)}{1!}(x-a) + \frac{u''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{\varepsilon\, u^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{12}$$

fonksiyonuna $u(x)$ fonksiyonunun a noktasındaki kısıtlanmış Taylor yaklaşımı adı verilir [6-7]. $RT_{n,u(x)}(x_0) = u(x_0)$ eşitliğinden belirlenen ε değerinde yaklaşık çözüm tam çözüme eşit olacağından, yaklaşımın hatası da sıfıra eşitlenmiştir.

4. BİR BOYUTLU STANDART OLMAYAN BAŞLANGIÇ KOŞULLARI İLE VERİLEN PARABOLİK DENKLEMLER İÇİN TAYLOR SERİLERİ İLE TÜRETİLEN YAKLAŞIMLAR

(1) denklemi standart olmayan başlangıç koşullarıyla verilen problemler için sonlu farklarla türetilen yaklaşımlar yardımıyla çözülebilir.

4.1. FTCS (Forward Time Centered Space) Yöntem

(1) denkleminde türevlere sonlu farklar ile yaklaşılırsa;

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}$$

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \phi_{i,j}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik $1 \le i \le M-1, \;\; 0 \le n \le N-1$ için düzenlenirse;

$$u_{i,j+1} = ru_{i-1,j} + (1-2r)u_{i,j} + ru_{i+1,j} + k\phi_{i,j} \qquad \mathrm{r} = \delta t / \delta x^2 = k/h^2 \tag{13}$$

bir açık yöntem olan FTCS yöntemi elde edilir.

(4) deki başlangıç şartları $1 \le i \le M-1, \quad N_j = \dfrac{T_j}{T}$

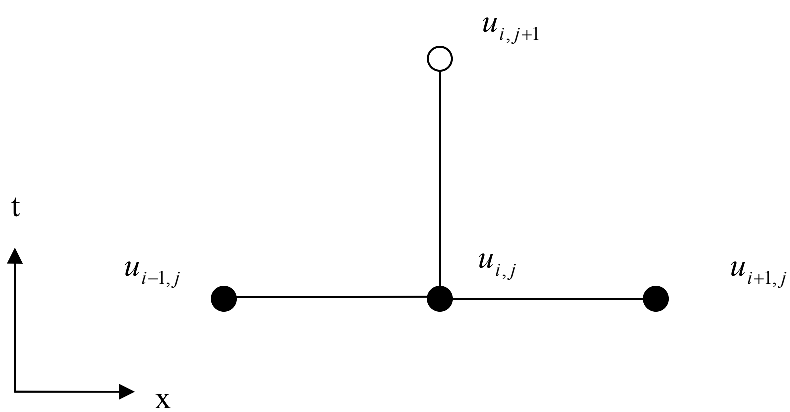
$u_{i,0} = \sum_{j=1}^{N} \beta_{j,i} u_{i,N_j} + \psi_i$ ve $0 \le j \le N$ olmak üzere (2) ve (3) den sınır şartları da $u_{0,j} = 0$ ve $u_{M,j} = 0$ şeklinde verilmiş olsun.

Problemi, bilinen yöntemler ile çözebilmek için lineer olmayan sistemlere ihtiyaç duyulmaktadır. Ancak parabolik problemlerin doğası gereği bu sorun küçük iterasyonlarla çözülebilmektedir. Dolayısıyla,

$\left(u_{i,0}\right)^{(0)} = 0$ başlangıç değeri olarak alınırsa, $\left(u_{i,0}\right)^{(l+1)}$ aşağıdaki şekilde tanımlanabilir.

$$\left(u_{i,0}\right)^{(l+1)} = \sum_{j=1}^{N} \beta_{j,\,i} (u_{i,N_j})^{(l)} + \psi_i \qquad l = 0,1,2,..., \text{ ve } i = 1,2,...,M-1 \tag{14}$$

(14) eşitliğinde $\left(u_{i,j}\right)^{(l)}$, başlangıç değeri $\left(u_{i,0}\right)^{(l)}$ ile verilen ileri Euler denkleminin sonlu fark çözümüdür [1]. Bu yöntemin $0 \le r \le 1/2$ için Von-Neumann anlamında kararlı olduğu kolayca görülür. FTCS yönteminde j. zaman adımında bilinen üç değer için, (j+1). zaman adımında bilinmeyen bir değer hesaplandığı için yöntem (3) yöntemi olarak da adlandırılır. Yöntemin moleküler gösterimi aşağıdaki gibi verilir.



Şekil 3. FTCS yöntemin moleküler gösterimi.

4.2. Kısıtlanmış FTCS (Forward Time Centered Space) Yöntem

(1)-(4) ile verilen problemi Kısıtlanmış FTCS yöntemi ile çözmek amacıyla *(i,j)* noktasında x ve *t* ye göre türevler;

$$u(x,t+k) = u(x,t) + k\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{k^2}{2!}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \ldots = (1 + \frac{k}{1!}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{k^2}{2!}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \ldots)u(x,t)$$

$$u_{i,j+1} = Exp\left[k\frac{\partial}{\partial t}\right]u_{ij} \tag{15}$$

olmak üzere $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{i,j} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} + O(k)$ ve $\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + O(h^2)$

şeklinde verilmiş olsun.(15) eşitliği (1) denkleminde yerine konursa

$$u_{i,j+1} = Exp\,[k(D^2{}_x)]\,u_{i,j} \quad , \quad D_x^2 = \frac{1}{h^2}(u_{i-1,j} - 2u_{ij} + u_{i+1,j}) \qquad , \; 1 \le i \le M-1, \;\; 0 \le n \le N-1$$

$$u_{i,j+1} = r\varepsilon u_{i-1,j} + (1-2r\varepsilon)u_{i,j} + r\varepsilon u_{i+1,j} + k\varepsilon\phi_{i,j} \qquad \mathrm{r} = \delta t/\delta x^2 = k/h^2 \tag{16}$$

ifadesi elde edilir [5]. Bu yönteme Von-Neumann anlamında kararlılık analizi uygulanırsa $0 < r\varepsilon_i \le \frac{1}{2}$ için kararlı olduğu görülür.

4.3. Crank-Nicolson Yöntemi

(1) denklemine $\{ih,(j+\frac{1}{2})k\}$ noktasında sonlu farklar uygulanırsa;

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i,j+\frac{1}{2}} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j+\frac{1}{2}} + \phi_{i,j+\frac{1}{2}}$$

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = \frac{1}{2}\left\{\frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2} + \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}\right\} + \frac{1}{2}\left(\phi_{i,j} + \phi_{i,j+1}\right)$$

$\mathrm{r} = \delta t/\delta x^2 = k/h^2$ için ;

$$-ru_{i-1,j+1} + (2+2r)u_{i,j+1} - ru_{i+1,j+1} =$$
$$ru_{i-1,j} + (2-2r)u_{i,j} + ru_{i+1,j} + \frac{k}{2}\left(\phi_{i,j} + \phi_{i,j+1}\right) \tag{17}$$

denklemi ile verilen Crank-Nicolson yöntemi elde edilir. Standart olmayan başlangıç şartlarıyla (1)-(4) problemi Crank-Nicolson yöntemiyle çözülebilir.

4.4. Crank -Nicolson yöntemi için Von-Neumann kararlılık analizi

(1) denkleminde (ph, qk) noktasında Crank-Nicolson yöntemi için sonlu fark denklemi;

$$\frac{u_{p,q+1}-u_{p,q}}{k}=\frac{1}{2}\left\{\frac{u_{p+1,q+1}-2u_{p,q+1}+u_{p-1,q+1}}{h^2}+\frac{u_{p+1,q}-2u_{p,q}+u_{p-1,q}}{h^2}\right\}$$

şeklindedir. Bu denklemde $u_{p,q}=e^{i\beta ph}\xi^{q}$ denirse;

$$\frac{e^{i\beta ph}\xi^{q+1}-e^{i\beta ph}\xi^{q}}{k}=$$

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{e^{i\beta(p+1)h}\xi^{q+1}-2e^{i\beta ph}\xi^{q+1}+e^{i\beta(p-1)h}\xi^{q+1}}{h^2}+\frac{e^{i\beta(p+1)h}\xi^{q}-2e^{i\beta ph}\xi^{q}+e^{i\beta(p-1)h}\xi^{q}}{h^2}\right\}$$

ifadesi elde edilir. Gerekli işlemler ve basit sadeleştirmelerde yapıldığında kararlılık tanımı uyarınca;

$$\|\xi\|=\frac{2-4r\sin^2\frac{\beta h}{2}}{2+4r\sin^2\frac{\beta h}{2}}\leq 1$$

olduğundan;

$$0\leq 8r\sin^2\frac{\beta h}{2}$$

elde edilir. Bu ise yöntemin $\forall\ \ r\geq 0$ için kararlı olduğunu gösterir.

4.5. Kısıtlanmış Crank-Nicolson Yöntemi

Benzer şekilde (1) denklemine aşağıdaki şekilde $\{ih,(j+\frac{1}{2})k\}$ noktasında kısıtlanmış Taylor yaklaşımları yardımı ile sonlu farklar uygulanırsa;

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i,j+\frac{1}{2}} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j+\frac{1}{2}} + \phi_{i,j+\frac{1}{2}}$$

$$-r\varepsilon u_{i-1,j+1} + (2+2r\varepsilon)u_{i,j+1} - r\varepsilon u_{i+1,j+1} = r\varepsilon u_{i-1,j} + (2-2r\varepsilon)u_{i,j} + r\varepsilon u_{i+1,j} + \frac{k\varepsilon}{2}\left(\phi_{i,j} + \phi_{i,j+1}\right) \qquad r = \delta t / \delta x^2 = k/h^2 \tag{18}$$

denklemi elde edilir. Bu yöntem $\forall\ r\varepsilon > 0$ için Von-Neumann anlamında koşulsuz kararlıdır.

5. SAYISAL BİR ÖRNEK

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \phi(x,t) \quad , \; 0 < x < 1 \, , \; 0 < t \le T$$

denkleminin sınır koşulları,

$$u(0,t) = g_0(t) = 0 \, , \qquad 0 < t \le T$$

$$u(1,t) = g_1(t) = 0 \, , \qquad 0 < t \le T$$

ve standart olmayan başlangıç koşulları,

$$u(x,0) = \sum_{j=1}^{n} \beta_j(x) u(x,T_j) + \psi(x) \qquad , \; 0 < T_1 < T_2 < \ldots < T_N = T$$

şeklinde verilmiştir. Burada

$$\phi(x,t) = (-1+\pi^2)\sin(\pi x)\exp(-t) \quad , \; \psi(x) = \sin(\pi x)(1 - e^{T_1} + e^{T_2})$$

ve denklemin analitik çözümü

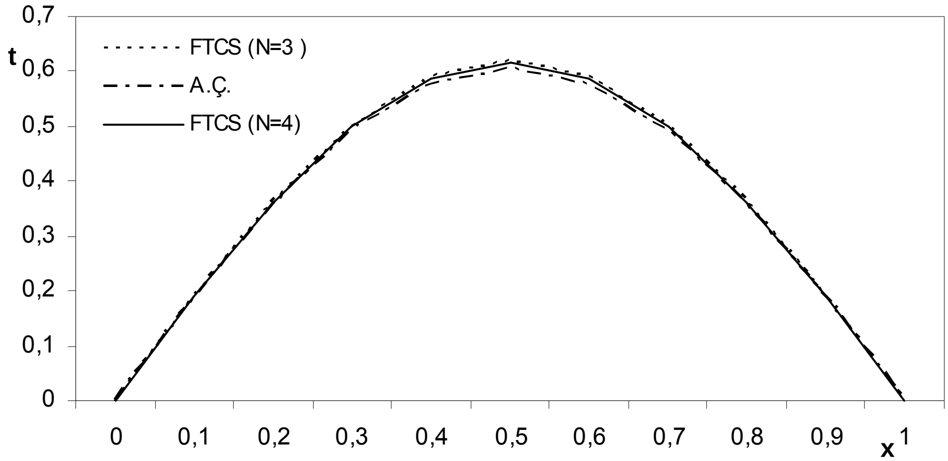
$u(x,t) = \sin(\pi x)e^{-t}$ şeklindedir.

Problemin çözümü $N = 3\,, \beta_1 = 1, \beta_2 = -1, \beta_3 = 1\,, T_1 = 0.3,\ T_2 = 0.6,\ T_3 = 1$ ve $N = 4,\ \beta_1 = 1,\ \beta_2 = -1,\ \beta_3 = 1,\ \beta_4 = -1\,, T_1 = 0.25,\ T_2 = 0.5,\ T_3 = 0.75,\ T_4 = 1$ değerleri

için farklı yöntemler kullanılarak aşağıdaki gibi karşılaştırmalı olarak verilmiştir (Şekil4-5).

Tablo 1. t =0.5 için FTCS yöntemine ait sonuçlar (h=0.1)

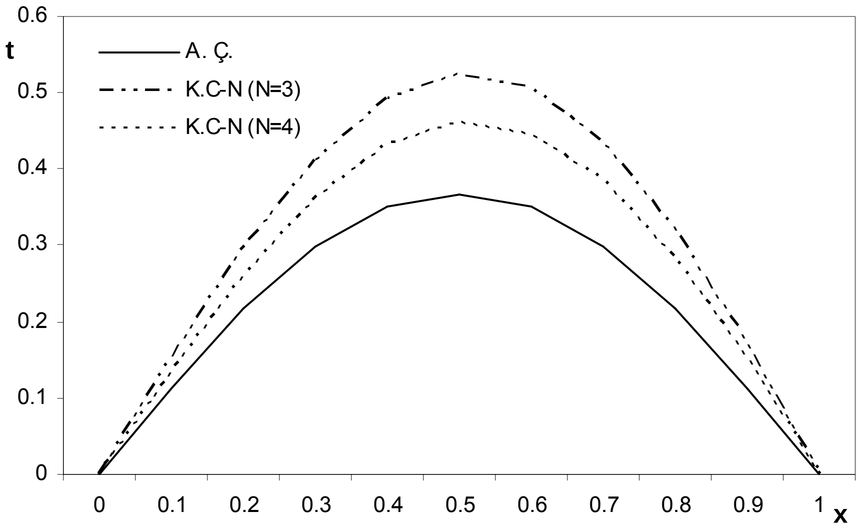
x	A.Ç.	FTCS (N=3)	FTCS Hata N=3	FTCS (N=4)	FTCS Hata (N=4)
0	0	0	0	0	0
0.1	0.187428282	0.191354586	0.003926305	0.190503862	0.003075581
0.2	0.356509777	0.363978052	0.007468276	0.362359879	0.005850102
0.3	0.490693611	0.500972811	0.010279199	0.498745586	0.008051975
0.4	0.576844936	0.588928860	0.012083923	0.586310600	0.009465664
0.5	0.606530660	0.619236449	0.012705789	0.616483447	0.009952788
0.6	0.576844936	0.588928860	0.012083923	0.586310600	0.009465664
0.7	0.490693611	0.500972811	0.010279199	0.498745586	0.008051975
0.8	0.356509777	0.363978052	0.007468275	0.362359879	0.005850102
0.9	0.187428281	0.191354586	0.003926305	0.190503862	0.003075581
1	0	0	0	0	0



Şekil 4. t=0.5 için FTCS yönteme ait grafik (h=0.1).

Tablo 2. t = 1 için K.C-N yöntemine ait sonuçlar (h =0.1)

X	A. Ç.	K.C-N (N=3)	K.C-N Hata (N=3)	K.C-N (N=4)	K.C-N Hata (N=4)
0	0	0	0	0	0
0,1	0,113680999	0,152938051	0,039257052	0,133538918	0,019857919
0,2	0,216234110	0,295302067	0,079067957	0,258402723	0,042168613
0,3	0,297620719	0,412277666	0,114656946	0,361490075	0,063869356
0,4	0,349874139	0,491349764	0,141475624	0,431645370	0,081771230
0,5	0,367879441	0,523584637	0,155705196	0,460807723	0,092928282
0,6	0,349874139	0,504567397	0,154693257	0,444863004	0,094988864
0,7	0,297620719	0,434900068	0,137279348	0,384112478	0,086491758
0,8	0,216234110	0,320208584	0,103974474	0,283309240	0,067075129
0,9	0,113680999	0,170655047	0,056974048	0,151255914	0,037574915
1	0	0	0	0	0



Şekil 2 t = 1 için K.C-N yöntemine ait grafik (h =0.1)

Şekil 5. t=1 için K.C-N yönteme ait grafik (h=0.1).

7. SONUÇ ve TARTIŞMA

Bu çalışmada bir boyutlu ısı denklemine standart olmayan başlangıç koşulları ile iki farklı başlangıç şartı için sonlu fark denklemleri ile türetilen iki zaman adımlı yöntemler uygulanmıştır. Bu yöntemler kısıtlama parametresine bağlı olarak ve kısıtlama parametresine bağlı olmadan çözülmüş ve farkları karşılaştırılmıştır.

Yöntemler yapılan hata bakımından ele alındığında bu çalışmada geliştirilen yöntemlerin hata oranıyla diğer bilinen klasik yöntemlerin hata oranlarının benzer olduğu gözlenmiştir. Ayrıca işlem süresinin birbirine yakın olduğu saptanmıştır. Bu ise küçük adımlı problemlerin kişisel bilgisayarda çözümünü sağladığından bir avantaj olarak görülmektedir.

İleride yapılacak çalışmalarla standart olmayan başlangıç koşullu problemlerin yaklaşık çözümleri için daha hassas ve daha kolay hesaplama teknikleri geliştirileceği düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

1. Dehghan M., Numerical Schemes for One-Dimensional Parabolic Equations with Nonstandard lnitial Condition. Applied Mathematics and Computation, 147, 321-331, 2004.
2. Dehghan M., Three-Leve1 Techniques for One-Dimensional Parabolic Equation with Nonlinear lnitial Condition. Applied Mathematics and Computation, 151, 567-579, 2004.
3. Dehghan M., Identifying a Control Function in Two-Dimensional Parabolic Inverse Problems. Applied Mathematics and Computation,143, 375-391, 2003.
4. Duchateau P., Zachmann W.D., Partial Differential Equations,s.235, Kın Keong Printing Co. Pte. Ltd., Singapore 1986.
5. Smith G.D., Numerical Solution of Partial Differential Equations, s.330, Clarendon Press, Oxford 2005.
6. İsmail H.N.A., Elbarbary E.M.E., Restrictive Taylor's Approximation And Parabolic Partial Differential Equations. Intern. J. Computer Math. 78, 73-82, 2000.
7. İsmail H.N.A., Elbarbary E.M.E., Salem G.S.E., Restrictive Taylor's Approximation for Two Dimensions Initial Boundary Value Problem for Parabolic PDE. Applied Mathematics and Computation, 147(2), 355-363, 2004.